Trigonalisation

Définition : Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, est dit trigonalisable ssi il existe une base $\mathscr{E}$ de E telle que la matrice de u dans cette base soit triangulaire.

Définition : Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, avec $\mathbb{K}$=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$est dite trigonalisable ssi M est semblable à une matrice triangulaire, cad ssi il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}MP = T$, avec T matrice triangulaire.

Remarques

- $u \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable ssi pour toute base $\mathscr{E}$ de E, $\text{Mat}(u, \mathscr{E})$ est trigonalisable ssi il existe une base $\mathscr{E}$ de E, $\text{Mat}(u, \mathscr{E})$ soit trigonalisable.
- Si u (rp. M) est diagonalisable, u (rp. M) est trigonalisable.
- Toutes les matrices triangulaires sont trigonalisables : on écrit $I_n^{-1} T I_n = T$, avec $I_n \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$.
- Rappelons que si T est triangulaire $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, alors $T^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2^k & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$

  On ne peut rien dire / pas de formule pour les coefficients du triangle strict supérieur.

Théorème : $u \in \mathscr{L}(E)$ (rp $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé.

Corollaire : Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev, toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Démo : Montrons par récurrence sur $n \geq 1$, que toute matrice d'ordre n dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable.

- $n = 1$: Une matrice d'ordre 1 est triangulaire donc trigonalisable (elle est aussi diagonalisable).
- Supposons toute matrice d'ordre $n \geq 1$ de polynôme scindé trigonalisable et considérons une matrice M d'ordre $n+1$ de polynôme scindé $P = \chi_M$. Il existe donc au moins une vp λ et un vecteur $U \neq 0$ tq $MU = \lambda U$. Complétons U en $\mathscr{F} = (U, X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathbb{K}^{n+1} \sim M_{n+1,1}(\mathbb{K})$. Si nous considérons Q la matrice « *constituée* » de cette base « *en colonnes* », qui n'est rien d'autre que la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ à $\mathscr{F}$, on a :

  $$Q^{-1}MQ = \begin{pmatrix} \lambda & V^{\mathrm{T}} \\ 0 & A \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \text{ et } V \in \mathbb{K}^n \sim M_{n,1}(\mathbb{K}) \qquad \text{On pose } Q' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} \text{ d'où } Q'^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}$$

  On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à A, il existe $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP = T$. On calcule alors :

  $$Q'^{-1}Q^{-1}MQQ' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & V^{\mathrm{T}} \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & V^{\mathrm{T}}P \\ 0 & AP \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & V^{\mathrm{T}}P \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

  Cette dernière matrice étant triangulaire supérieure, la preuve est acquise.

Cet exercice est la ***généralisation*** de $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ (qui, lui , est du cours)

Application 1 : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée dont les n vp (complexes), comptées avec la multiplicité, sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors, on a $\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ pour tout entier $k \geq 1$

Démo : On trigonalise la matrice dans $\mathbb{C}$ (son polynôme caractéristique est scindé) : il existe une matrice inversible P et une matrice triangulaire T telle que $A = PTP^{-1}$ et les coefficients diagonaux de T sont les λ_i. On sait $A^k = PT^kP^{-1}$ puis

$$\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(PT^kP^{-1}) \overset{\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)}{=} \operatorname{tr}(T^kP^{-1}P) = \operatorname{tr}(T^k) \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_i^k$$

(1) : propriété des mat. triangulaires, sur la diagonale de T^k se trouvent les éléments diagonaux de T à la puissance k.

Application 2 : Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les n vp de A (comptées avec la multiplicité), les n vp de $Q(A)$ (avec Q polynôme) sont $Q(\lambda_1), \dots, Q(\lambda_n)$. En particulier, les n vp de A^2 sont $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ (en raisonnant dans $\mathbb{C}$)

Démo : On a $A = PTP^{-1}$ avec sur la diagonale de T, les n vp de A et $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$. Ensuite $A = PT^kP^{-1}$ et, avec $Q(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$:

$$Q(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = \sum_{k=0}^{p} a_k PT^kP^{-1} = P\Big(\sum_{k=0}^{p} a_k T^k\Big)P^{-1}$$

Le lecteur comprendra par lui-même que sur la diagonale de $\sum_{k=0}^{p} a_k T^k$, nous avons les $\sum_{k=0}^{p} a_k \lambda_i^k = Q(\lambda_i)$

Pratique de la trigonalisation On suppose donnée une matrice M carrée réelle d'ordre n dont le polynôme caractéristique est scindé. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres 2 à 2 distinctes (donc $p \leq n$) et on suppose que M n'est ***pas diagonalisable***, (donc $p \leq n-1$), ce qui signifie que :

$$\operatorname{Ker}(M - \lambda_1 I_n) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(M - \lambda_p I_n) \subsetneq \mathbb{R}^n \qquad \text{ou} \qquad \dim(\operatorname{Ker}(M - \lambda_1 I_n)) + \cdots + \dim(\operatorname{Ker}(M - \lambda_p I_n)) < n$$

Cas simple : $\dim \operatorname{Ker}(M - \lambda_1 I_n) + \ldots + \dim \operatorname{Ker}(M - \lambda_p I_n) = n-1$

Dans ce cas, il est facile de ***trigonaliser***. On commence par calculer une famille de $n-1$ vecteurs propres indépendants (possible d'après les hypothèses), et on ***complète*** en une base $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^n$ en « *rajoutant* » un vecteur à la « *fin* », vecteur que l'on prend le plus simple possible pour les calculs ultérieurs. « *Dans* » cette base, la matrice sera triangulaire.

Exemple : Trigonaliser la matrice $eA = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & 1 & -7 \end{pmatrix}$

On calcule (je ne mets pas de détails) :

$$\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^2(1+\lambda) \qquad E_A(-1) = \operatorname{Ker}(A + I_3) = \operatorname{Vect}(-2,2,3) \quad E_A(2) = \operatorname{Vect}(1,-1,-1)$$

On pose $U = (1,-1,-1)$, $V = (-2,2,3)$ et on ***complète*** avec $E_1 = (1,0,0)$. $\mathscr{E} = (U, V, E_1)$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$ (on peut le vérifier par $\det P \neq 0$). On écrit alors, par changement de bases « *implicite* » :

$$P = P_{\varepsilon}^{\mathscr{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{puis on sait alors que} \qquad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = T$$

Comme cette matrice T est semblable à A, elle a les ***mêmes valeurs propres avec la même multiplicité***. Comme elle est triangulaire, les valeurs propres se « *lisent* » sur la diagonale, il vient alors $c = 2$. Pour « *remplir* » la dernière colonne, il faut ***calculer les coordonnées de*** AE_1 dans la base $\mathscr{E} = (U, V, E_1)$:

$$AE_1 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & 1 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ -10 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a - 2b + 2 & = & 9 \\ -a + 2b & = & -7 \\ -a + 3b & = & -10 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -3 \end{array} \right.$$

Cas général : $\dim \operatorname{Ker}(M-\lambda_1 I_n)+\ldots+\dim \operatorname{Ker}(M-\lambda_p I_n)\leq n-2$

Là, en principe on doit vous aider. En général, pour les petites dimensions, on a directement la question « *prouver que la matrice est semblable à T* » et on vous donne cette matrice triangulaire T, ce qui a l'avantage de vous permettre de l'utiliser dans les questions suivantes, même si vous ne savez pas faire…

> ***Exemple*** : Montrez que A est semblable à T
>
> $$A=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\-15&-6&11\\-14&-6&11\end{pmatrix}\qquad T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

On calcule $\chi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^3$. Pour ***raisonner proprement*** on appelle $a\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A (donc dans la base canonique $\mathscr{E}$) et on cherche une base $\mathscr{F}=(F_1,F_2,F_3)$ telle que la matrice de a dans la base $\mathscr{F}$ soit T. On est obligé de faire une ***Analyse - Réciproque :***

Analyse :

Si une telle base (F_1,F_2,F_3) existe, alors (regardez les colonnes de T!) $a(F_1)=F_1$ $a(F_2)=F_1+F_2$ $a(F_3)=F_2+F_3$. F_1 est donc vecteur propre de A associé à 1. Ok. Terminé pour F_1. Pour les 2 autres, il ***l'idée est de revenir*** au $A-\lambda I$ et donc ***ici***, à $A-I$:

$$\begin{aligned}
a(F_2)&=F_1+F_2 &&\Longrightarrow (a-I)F_2=F_1 &&\text{donc } F_1 \text{ est déterminé par } F_2\\
a(F_3)&=F_2+F_3 &&\Longrightarrow (a-I)F_3=F_2 &&\text{donc } F_2 \text{ et } F_1 \text{ sont déterminés par } F_3
\end{aligned}$$

On continue à analyser. $(A-I)^2F_3=(A-I)F_2=F_1\neq 0$, puis $(A-I)^3F_3=(A-I)F_1=0$. Mais çà on le savait par **Cayley**[1]-**Hamilton**[2] car le polynôme caractéristique $(X-1)^3$ est ***annulateur de*** A. En fait il suffit de prendre $F_3\notin \operatorname{Ker}(A-I)^2$, ensuite on prendra $F_2=(A-I)F_3$, puis $F_1=(A-I)F_2$. La question qu'on pourrait se poser c'est : est-ce que F_1 sera bien un vecteur propre ? Oui parce que $(A-I)F_1=(A-I)^3F_3=0$. L'analyse est terminée.

Réciproque

On regarde donc $\operatorname{Ker}(A-I)^2$ donc on calcule (laissé au lecteur) :

$$A-I=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\-15&-7&11\\-14&-6&10\end{pmatrix}\qquad (A-I)^2=\begin{pmatrix}-4&-2&3\\-4&-2&3\\-8&-4&6\end{pmatrix}$$

On a ***immédiatement*** $\operatorname{rg}(A-I)^2=1$ puis $\operatorname{Ker}(A-I)^2$ est le plan d'équation : $-4x-2y+3z=0$. On prend $F_3\notin \operatorname{Ker}(A-I)^2$ le plus simple possible, soit :

$$F_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\quad F_2=(A-I)F_3=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\-15&-7&11\\-14&-6&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-15\\-14\end{pmatrix}\quad F_1=(A-I)F_2=(A-I)^2F_1=\begin{pmatrix}-4&-2&3\\-4&-2&3\\-8&-4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-4\\-8\end{pmatrix}$$

Voilà c'est fini. On peut vérifier (F_1,F_2,F_3) base de $\mathbb{R}^3$ par $\det P\neq 0$. Ensuite :

$$\text{on pose } P=\begin{pmatrix}-4&-3&1\\-4&-15&0\\-8&-14&0\end{pmatrix}\qquad \text{on sait par changement de base } P^{-1}AP=T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

1. **Arthur Cayley** : mathématicien anglais (1821-1895). Un des inventeurs du calcul matriciel.
2. **William Rowan Hamilton** : mathématicien irlandais (1805-1865). Connu pour la découverte des quaternions.