

SOMME DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

Dans toute la suite $(E, +, \cdot)$ désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (s'il est de dimension finie, on la note n). Je rappelle que la somme (ou somme directe) de 2 sevs a été traitée en Sup. Il s'agit ici d'une somme de n sev avec $n \geq 2$. Certains résultats sont identiques, d'autres non.

Théorème et définition : Soient $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sevs de E . On appelle **somme** des F_i et on note $F_1 + \dots + F_p$ ou même $\sum_{i=1}^p F_i$ l'ensemble de toutes les sommes $\{f_1 + \dots + f_p, \forall 1 \leq i \leq p, f_i \in F_i\}$. C'est un **sous-espace vectoriel** de E

Remarques

- Définition analogue au cas $p = 2$. On a $F_i \subset F_1 + \dots + F_p$ (car $f_i = 0 + \dots + 0 + f_i + 0 + \dots + 0$).
- C'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sev de E contenant tous les F_i : si un sev G vérifie $G \supset F_i$ pour tout i , alors $G \supset F_1 + \dots + F_p$.
- Si les F_i sont de dimension finie, on n'a pas de formule (au programme de PSI!) comme pour $p = 2$ (formule de **Grassmann**¹ $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2)$). Néanmoins on a que $F_1 + \dots + F_p$ est de dimension finie et l'inégalité $\dim(F_1 + \dots + F_p) \leq \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p)$.

Démo : On montre $F_1 + \dots + F_p = H$ sev de E par la méthode générale :

- $H \ni 0$ car $0 = 0 + \dots + 0$ et chaque $0 \in F_i$.
- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $h, h' \in H$. On a donc $h = f_1 + \dots + f_p, h' = f'_1 + \dots + f'_p$ avec $f_i, f'_i \in F_i$.
 $\alpha h + \beta h' = (\alpha f_1 + \beta f'_1) + \dots + (\alpha f_p + \beta f'_p)$. On a **bien** $\alpha f_i + \beta f'_i \in F_i$ car F_i est un sev, et donc $\alpha h + \beta h' \in H$.

Exercice : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

Alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice de E ssi $\text{Vect}(e_1) + \dots + \text{Vect}(e_p) = E$

Théorème et définition : Soient $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de sevs de E . La somme $F_1 + \dots + F_p$ est dite **directe** et on la note $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) Pour tous $f_i \in F_i, f_1 + \dots + f_p = 0 \implies f_1 = \dots = f_p = 0$ (plutôt en dimension infinie).
- (ii) $\dim(F_1 + \dots + F_p) = \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p)$ (en dimension finie)
- (iii) Pour $p = 2$ **uniquement**, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$

Remarques

- **Attention!** pour $p \geq 3$ cette condition $F_i \cap F_j = \{0\}$ (avec $i \neq j$) est nécessaire mais **n'est plus suffisante**.
- Quand la somme est **directe** (des $\oplus$), on a l'égalité $\dim(F_1 \oplus \dots \oplus F_p) = \dim(F_1) + \dots + \dim(F_p)$.
- $F_1 + \dots + F_p$ et $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ sont les **mêmes** sevs! sauf que la deuxième expression en dit plus sur l'ev. On peut toujours écrire la 1^{re} mais pas toujours la 2^e.

Exercice : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

Alors la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre ssi la somme $\text{Vect}(e_1) + \dots + \text{Vect}(e_p)$ est directe.

1. **Hermann Günther Grassmann** : allemand (1809-1877). Fondateur du calcul tensoriel et des espaces-vectoriels.

Démo : On considère l'application φ de $F_1 \times \dots \times F_p$ dans $F_1 + \dots + F_p$ dans qui à $(f_1, \dots, f_p)$ associe $f_1 + \dots + f_p$. Le lecteur remarquera que φ est surjective **par définition** de la somme

La condition (i) s'écrit $\text{Ker } \varphi \subset \{0\}$ ce qui équivaut à $\text{Ker } \varphi = \{0\}$ et φ injective.

La condition (ii) s'écrit les deux evs ont même dimension finie.

La condition (iii) est identique à (i), car $f_1 + f_2 = 0$ équivaut à $x = f_1 = -f_2 \in F_1 \cap F_2 = \{0\}$

Le cours nous donne alors l'équivalence : surjectif + injectif $\implies$ bijectif $\implies$ même dimension finie et surjectif + même dimension finie $\implies$ bijectif $\implies$ injectif.

Théorème : Soient $(F_i)_{1 \leq i \leq p}$ des sevs de E de dimension finie, alors on a $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ ssi l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

(i) Pour tout élément $x \in E$, il existe des **uniques** $f_i \in F_i$ tels que $x = f_1 + \dots + f_p$.

(ii) $E = F_1 + \dots + F_p$ et $\dim E = \dim F_1 + \dots + \dim F_p$ (en dimension finie).

(iii) **Seulement pour** $p = 2$: $\dim E = \dim F_1 + \dim F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

(iv) $E = F_1 + \dots + F_p$ et pour tous $f_i \in F_i$, $f_1 + \dots + f_p = 0 \implies f_i = 0$ pour tout i (plutôt en dimension **infinie**)

(v) **Seulement pour** $p = 2$: $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ (plutôt en dimension **infinie**).

Démo : On reprend l'application φ mais **un peu beaucoup** différemment : ψ de $F_1 \times \dots \times F_p$ dans E dans qui à $(f_1, \dots, f_p)$ associe $f_1 + \dots + f_p$. Je vous laisse réfléchir à :

La condition (i) s'écrit ψ est bijective.

La condition (ii) s'écrit ψ est surjective et les 2 evs ont même dimension.

La condition (iii) s'écrit les 2 evs ont même dimension et ψ injective.

La condition (iv) et (v) s'écrivent ψ est surjective, cad $\text{Im } \psi = E$, et $\text{Ker } \psi = \{0\}$, cad ψ injective.

Remarques

- Une application utile dans la pratique : si on prend une base $\mathcal{E}_i$ de chaque F_i , alors la réunion $\bigcup_{i=1}^p \mathcal{E}_i$ est une base de $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.
- Je rappelle que si f a pour valeurs propres **distinctes** $\lambda_1, \dots, \lambda_p$,
 f est diagonalisable ssi $\text{Ker } (\lambda_1 \text{Id} - f) \oplus \dots \oplus \text{Ker } (\lambda_p \text{Id} - f) = E$.

Exercice : Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n .

Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ssi $\text{Vect}(e_1) \oplus \dots \oplus \text{Vect}(e_n) = E$.