Ensam PSI 2018 - ENTPE-EIVP PSI 2009 (morphisme d'applications continues)

Enoncé 1 On définit T sur $E = \mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ par $T(f) = F$, où $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,dt$.

1) Tracez le graphe de $g(t) = \min(x,t)$ pour $x \in [0,1]$. **(2009 :** question absente)

2) Montrez T endomorphisme. Est-il surjectif?

3) T est-elle injective? Conclure quant à l'éventuelle dimension de E.

4) Trouvez les valeurs propres de T et sous-espaces propres associés.

---

2) Comme $\min(x,t) = t$ si $t \le x$ et $= x$ si $t \ge x$, on écrit :

$$T(f)(x) = F(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Je rappelle, cours de Sup, que $x \longrightarrow \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable de dérivée $g(x)$ puisque c'est la primitive de g qui s'annule en a. Par conséquent F est dérivable donc continue sur [0,1], soit $F \in E$. On en conclut que T est un endomorphisme puisque la linéarité est immédiate (résultant de la linéarité de l'intégration).

Le même argument permet de prouver que T n'est pas surjective puisque $T(f)$ est dérivable, hypothèse ***plus forte*** que la continuité sur [0,1]. On n'a donc ***pas*** $\operatorname{Im} T = E$.

3) T est injective car son noyau vérifie $\operatorname{Ker} T = \{0\}$:

$$\begin{aligned} f \in \operatorname{Ker}(T) &\iff T(f) = 0 \iff \forall\, 0 \le x \le 1,\ F(x) = \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\overbrace{\iff}^{(1)} \forall\, 0 \le x \le 1,\ F'(x) = x f(x) + 1 \times \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t + x\Big(\int_x^1 f\Big)' = 0 \overbrace{\iff}^{(2)} \forall\, 0 \le x \le 1,\ \int_x^1 f = 0 \\ &\overbrace{\iff}^{(3)} \forall\, 0 \le x \le 1,\ -f(x) = 0 \end{aligned}$$

- **(1)** 2 fonctions (dérivables sur un intervalle, ici [0,1]) sont égales ssi leurs dérivées sont égales et elles sont égales en un point : ici $F(0) = O(0) = 0$
- **(2)** La dérivée de $x \longrightarrow \int_x^1 f = -\int_1^x f$ est $-f(x)$
- **(3)** Comme au 1, et les 2 fonctions sont égales en 1 (de valeur 0) ce qui justifie l'équivalence

T étant un ***endomorphhisme*** non surjectif et injectif, E est nécessairement de dimension infinie (mais on le savait).

4) On fait une Analyse-Synthèse :

Analyse :

Soit λ une valeur propre de T, alors il existe $f \neq 0$ tel que $T(f) = \lambda f$ ce qui s'écrit, comme au-dessus, $\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda f(x)$; avant de dériver, ***on vérifie*** f dérivable car ce ***n'est pas*** dans l'hypothèse : λf est égal à une fonction dérivable (comme vu plus haut), donc f l'est ***si*** $\lambda \neq 0$. On peut supposer $\lambda \neq 0$ ce cas étant déjà traité. On arrive à $\int_x^1 f = \lambda f'(x)$. Pour la même raison, on a f' dérivable (donc f 2 fois dérivable, ce qui au passage ***prouve*** qu'un vecteur propre est nécessairement 2 fois dérivable), on dérive d'où $-f(x) = \lambda f''(x)$, soit f solution sur [0,1] de l'équation différentielle linéaire $\lambda y'' + y = 0$. Cette équation ***étant à coefficients constants***, on écrit l'équation caractéristique : $\lambda X^2 + 1 = 0$.

Je ne m'attarde pas sur les détails. Si $\lambda < 0$, les solutions sont $f(x) = A\exp\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x\right) + B\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}x\right)$ et si $\lambda > 0$, elles sont $f(x) = A\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right) + B\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}x\right)$

Réciproque :

On peut commencer par remarquer que ces fonctions sont bien dans E car clairement continues sur [0,1]. Une première méthode ***serait*** de calculer $T(y)$ ppour ces deux cas mais c'est assez long. On peut-être un peu plus efficace en ragardant où il y a (ou n'y a aps!) équivalence dans l'analyse. En fait, il ya perte d'équivalence lorsqu'on a dérivé deux fois? Il suffit de rajouter les conditions sur les constantes pour avoir l'équivalence; A la première déirvation, comme vu plus haut, on prend la valeur en 0 qui donne $0 = \lambda f(0)$ dc $f(0) = 0$ et dans la deuxième on arrive à $0 = \lambda f'(1)$ soit $f'(1) = 0$. Deux systèmes à résoudre; $\lambda < 0$ n'est ***pas*** valeur propre car :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A+B & = & 0 \\ A\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\exp\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right) - B\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} B & = & -A \\ A\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}2\cosh\left(-\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\right) & = & 0 \end{array}\right. \iff A = B = 0$$

Quant à $\lambda > 0$, seuls les $\lambda = \dfrac{1}{(\pi/2 + k\pi)^2}$ sont valeurs propres car :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & 0 \\ -A\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) + B\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi & & \end{array}\right.$$

Conclusion $\operatorname{Sp} T = \left\{ \frac{1}{(\pi/2+k\pi)^2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $E(\lambda_k) = \operatorname{Vect}\left(x \longrightarrow \sin\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}x\right)\right)$.

ICNA PSI 2013 (endomorphisme symétrique de matrices)

Enoncé 2 Soient un entier $n \geq 2$ et $u(M) = -M + \operatorname{tr}(M) I_n$ défini sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Prouvez que -1 est valeur propre de u. Trouvez une base de $E_{-1}(u)$.

2) Montrez que u est diagonalisable. Déterminez $\det u$ et $\operatorname{tr} u$.

3) Donnez un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lequel u est un endomorphisme symétrique. Trouvez une base orthonormale de vecteurs propres de u pour ce produit scalaire.

---

1) On constate que si $\operatorname{tr}(M) = 0$, alors $u(M) = -M$. ***Comme il existe*** des matrices de trace nulle ***non nulles*** (par exemple la matrice avec que des 1 et des 0 sur la diagonale), on en déduit -1 valeur propre de u.

On a immédiatement $u(M) = -M \iff \operatorname{tr} M = 0$. Par conséquent, $E_{-1}(u) = \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$; comme la trace est une forme linéaire, on en déduit que $E_{-1}(u)$ est un hyperplan H, cad de dimension $n^2 - 1$. On rappelle que $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, où E_{ij} est la matrice constituée de 0 sauf un 1 à la position (i, j). Montrons que $\mathscr{E} = \left((E_{ij})_{i\neq j}, (E_{11} - E_{ii})_{i\geq 2}\right)$ est une base de H :

- Ces éléments sont bien tous de trace nulle.
- Le cardinal de la famille $\mathscr{E}$ vaut $\operatorname{Card}\{(i, j),\ 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\} + \operatorname{Card}\{(i, i),\ i \geq 2\} = n^2 - n + n - 1 = n^2 - 1$ qui est bien la dimension de H.
- $\mathscr{E}$ est bien une famille libre : en effet soient (α_{ij}) des scalaires vérifiant $\sum_{i\neq j} \alpha_{ij} E_{ij} + \sum_{k=2}^{n} \alpha_{kk}(E_{11} - E_{kk}) = 0 = M$. Alors le coefficiezn$t$ (i, j) de M, pour $i \neq j$, est $\alpha_{ij} = 0$, et pour $i = j$, si $i \geq 2$, c'est $-\alpha_{kk} = 0$ et pour $i = j = 1$, c'est $\sum_{k=2}^{n} \alpha_{kk} = 0$, ce qui entraîne $\alpha_{kk} = 0$

2) On a démontré $\dim E_{-1}(u) = \dim H = n^2 - 1$. On en déduit que -1 est valeur propre de u avec la multiplicité $\mu(-1) \geq n^2 - 1$. Ensuite, on constate que $u(I) = -I + nI = (n-1)I$. Par conséquent, ***comme*** $I \neq 0$, $n - 1$ est valeur propre de u de multiplicité au moins 1. Pour des raisons de dimension, $\dim E_{-1}(u) = n^2 - 1 = \mu(-1)$ et $\mu(n-1) = 1$ donc on sait $\dim E_{n-1}(u) = 1$. Comme chaque valeur propre de u est telle que son espace propre associé a pour dimension sa multiplicité, on en déduit u diagonalisable. On peut ensuite écrire :

$$\operatorname{tr}(u) = (n^2 - 1) \times (-1) + 1 \times (n - 1) = n - n^2 \qquad \det(u) = (-1)^{n^2-1}(n - 1)$$

3) Le premier produit scalaire qu'il faut essayer est le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui, je vous le rappelle, est $(A|B) = \operatorname{tr}({}^tAB) = \sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}B_{ij}$. Pour toutes matrices $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\big(u(M)\,|\,N\big) = \operatorname{tr}\Big({}^t\big(-M+\operatorname{tr}(M)I\big)\,N\Big) = \operatorname{tr}\Big(-{}^tMN+\operatorname{tr}(M)N\Big) = -\operatorname{tr}({}^tMN)+\operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(N) = \big(M\,|\,N\big)+\operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(N)$$

L'expression étant ***symétrique*** en M, N, on a bien $\big(u(M)\,|\,N\big) = \big(M\,|\,u(N)\big)$, donc u est un endomorphisme symétrique (pour le produit scalaire canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$).

Comme u est un endomorphisme symétrique, on sait qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u. On sait aussi $E_{-1}(u) \perp E_{n-1}(u)$. Il suffit de « *réunir* » une BON de chacun des 2 espaces propres. Comme $E_{n-1} = \operatorname{Vect}(I)$, une BOn est $\frac{I}{\|I\|}$ avec $\|I\|^2 = \operatorname{tr}({}^tII) = n$; A la question Q1, on avait trouvé une base de E_{-1} : les $(E_{ij})_{i\neq j}$ et les $F_i = E_{11} - E_{ii}$, avec $i \ge 2$. On a immédiatement $E_{ij} \perp E_{kl}$, $E_{ij} \perp F_k$. Par contre les F_k ne sont pas orthogonaux entre eux, puisque $\big(F_k\,|\,F_m\big) = 1$. On les « *modifie* » légèrement : on prend $G_i = \sum_{k=1}^{i} E_{kk} - iE_{i+1,i+1}$. On a, en supposant $k < m$ (c'est équivalent pour $m < k$ par symétrie des lettres) :

$$\big(G_k\,|\,G_m\big) = \underbrace{1\times 1+\cdots+1\times 1}_{k \text{ fois}} + (-k)\times 1 + 0 = k-k = 0$$

Cette famille $\big((E_{ij})_{i\neq j}, (G_k)_{k\ge 2}\big)$ est bien orthogonale. Il suffit alors de normer (cad diviser par la norme) les vecteurs pour avoir une BON de E_{-1} : $\|E_{ij}\| = 1$ $\|G_k\| = \sqrt{k+k^2}$. Une BON de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de u est :

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\,I, (E_{ij})_{i\neq j}, (\frac{1}{\sqrt{k+k^2}}\,G_k)_{k\ge 2}\Big)$$

Ensam PSI 2018 (matrice $n\times n$ creuse)

Enoncé 9 Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Soit M la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la première et la dernière colonne ont tous leurs coefficients égaux à a et dont la première et la dernière ligne sont égales à $(a, -b, \dots, -b, a)$ et dont tous les autres coefficients sont nuls. Etudiez la diagonalisabilité de A et déterminez ses éléments propres.

On écrit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & -b & \dots & -b & a \\ a & 0 & \dots & 0 & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & 0 & \dots & 0 & a \\ a & -b & \dots & -b & a \end{pmatrix}$

On constate tout de suite $\operatorname{rg} M = 2$ (sauf dans le cas (C_1, C_2) lié qui équivaut à $a = b = 0$). On en déduit que $\dim \operatorname{Ker} M = n-2$ puis que 0 est valeur propre de M de multiplicité $\mu(0) \ge n-2$. Comme $C_1 - C_n = 0$, on a $(1, 0, \dots, 0, -1)$ vecteur propre associé à 0. De $C_2 = C_k$ pour $3 \le k \le n-1$, il vient que $(0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0)$ est aussi vecteur propre (avec -1 en position k). Il reste 2 valeurs propres λ, μ à trouver; on peut essayer d'utiliser la trace mais cela ne suffira pas car on obtient $\operatorname{tr} M = 2a = 0+\lambda+\mu$. Si on ne peut « *deviner* » les valeurs propres (ce qui arrive mais n'est pas le cas ici), l'idée est de trouver un plan P stable ***bien choisi***. En effet, si on appelle $u \in \mathscr{L}(R^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à M et u' l'endomorphisme induit sur P, un théorème nous apprend $\chi_{u'} \,/\, \chi_u$. Ce polynôme étant de degré 2 on trouvera les 2 valeurs propres (s'il est bien choisi, sinon on retrouvera 0). Le lecteur comprendra qu'il est raisonnable de choisir $P = \operatorname{Vect}(U, V)$ avec $U = (1, \dots, 1)$ et $V = (1, 0, \dots, 0, 1)$.

$$MU = \big(2a+(n-2)b, 2a, \dots, 2a, 2a+(n-2)b\big) = 2aU+(n-2)bV \qquad MV = \big(2a, \dots, 2a\big) = 2aU$$

On a donc $M' = \operatorname{Mat}(u', (U, V)) = \begin{pmatrix} 2a & 2a \\ (n-2)b & 0 \end{pmatrix}$. On calcule immédiatement le polynôme caractéristique $\chi_{u'} = \lambda^2 - 2a\lambda - 2ab(n-2)$, puis $\chi_u = \big(\lambda^2 - 2a\lambda - 2ab(n-2)\big)\lambda^{n-2}$. Ensuite on discute suivant le discriminant :

- $a^2-2ab(n-2)<0$. $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ a $n-2$ valeurs propres réelles et n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
- $a^2-2ab(n-2)>0$. 2 valeurs propres de multiplicité 1 : $\lambda_i=a\pm\sqrt{\Delta}$. Comme l'autre valeur propre est 0 de multiplicité $n-2$ et d'espace propre associé $\operatorname{Ker} M$ de dimension $n-2$, M est ***diagonalisable***. Reste à trouver les 2 vecteurs propres dirigeant les 2 droites : on revient à la matrice 2×2 :

$$M'X=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2ax+2ay & = & (a\pm\sqrt{\Delta})x \\ b(n-2)x & = & (a\pm\sqrt{\Delta})y \end{array}\right. \iff b(n-2)x=(a\pm\sqrt{\Delta})y \iff E_{M'}(\lambda_i)=\operatorname{Vect}(a\pm\sqrt{\Delta},b(n-2))$$

  On « *revient* » à M les vecteurs propres associés à λ_i sont donc $(a\pm\sqrt{\Delta})U+b(n-2)V$
- $\Delta=0 \iff a=2b(n-2)$ ou $a=0$. Alors la matrice M' n'a qu'***une seule valeur propre*** a. On sait alors que M' n'est diagonalisable que si c'est aI ce qui n'est pas (sauf $a=b=0$). M' donc M n'est pas diagonalisable.

CCP 2018 (diagonalisabilité matrice par blocs)

Enoncé 10 Soit $M=\begin{pmatrix}0_n & A\\ B & 0_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$

1) Calculez M^2

2) Justifiez que si $P(M)=0$, les valeurs propres de M sont racines de P.

3) On choisit $A=B^{-1}$. Justifiez que M est diagonalisable et précisez les dimensions des espaces propres.

4) On choisit $A=I_n=-B$. Justifiez que M est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et précisez les dimensions des espaces propres.

---

1) On calcule immédiatement $M^2=\begin{pmatrix}AB & 0\\ 0 & BA\end{pmatrix}$.

2) Voir son cours.

3) Ici $M^2=\left(\begin{smallmatrix}I_n & 0\\ 0 & I_n\end{smallmatrix}\right)=I_{2n}$. Par conséquent M annule le polynôme $X^2-1=(X-1)(X+1)$ qui est polynôme scindé à racines simples, M est donc diagonalisable. On a aussi $\operatorname{Sp} M\subset\{-1,1\}$. En fait M est une (matrice de) symétrie. A noter que, le spectre étant non vide, on a 3 cas $\operatorname{Sp} M=\{-I\}$, $\operatorname{Sp} M=\{1\}$ et $\operatorname{Sp} M=\{-1,1\}$. Le premier (rp. deuxième) cas n'est réalisé ***que dans le cas*** $M=-I$ (rp. $M=I$), en vertu du résultat important, qui d'ailleurs n'est pas vraiment du cours, que si M est diagonalisable et n'a ***qu'une seule*** valeur propre λ, ce ne peut être que $M=\lambda I$.

Il est « *adroit* » de chercher un vecteur propre sous la forme par blocs $Z=\left(\begin{smallmatrix}X\\ Y\end{smallmatrix}\right)\in\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$,avec $X,Y\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$MZ=1Z \iff \begin{pmatrix}0 & A\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} AY & = & X \\ A^{-1}X & = & Y \end{array}\right. \iff Y=A^{-1}X$$

Par conséquent, l'espace propre $E(1)$ est l'ensemble (l'ev) des matrices $\left\{\left(\begin{smallmatrix}X\\ A^{-1}X\end{smallmatrix}\right),\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right\}$. Pour prouver que cet ensemble est de dimension n, il suffit de considérer $\varphi : E(1)\longrightarrow\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à $\left(\begin{smallmatrix}X\\ A^{-1}X\end{smallmatrix}\right)$ associe X (clairement défini, c'est une projection en fait sur le « *premier axe* »). Elle est clairement linéaire, et bijective puisque sa réciproque est immédiatement $M\longrightarrow\left(\begin{smallmatrix}X\\ A^{-1}X\end{smallmatrix}\right)$! φ est donc un isomorphimse, d'où $\dim E(1)=\dim\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})=n$. Comme M est diagonalisable, $\dim E(1)+\dim E(-1)=\dim\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})=2n$, soit $\dim E(-1)=n$.

4) De la même manière, on en déduit $M^2=-I_{2n}$, donc M annule le polynôme scindé à racines simples ***mais dans*** $\mathbb{C}$: $X^2+1=(X+i)(X-i)$ et aussi $\operatorname{Sp} M\subset\{-i,i\}$. Par un calcul similaire, $MZ=iZ \iff Y=iX$. L'espace propre de M associé à i est donc l'ensemble des matrices $\left\{\left(\begin{smallmatrix}X\\ iX\end{smallmatrix}\right),\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})\right\}$ qui est un $\mathbb{C}$-ev de dimension n. La matrice étant ***réelle***, on sait alors que $E(-i)$ est l'espace propre « *conjugué* » $\left\{\left(\begin{smallmatrix}\overline{X}\\ -i\overline{X}\end{smallmatrix}\right),\ X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})\right\}$ de dimension n.

Ensam PSI 2013 (endomorphisme cyclique et commutant)

Enoncé 24 u est un endomorphisme de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n pour lequel il existe $x_0 \in E$ tel que $(u(x_0), \dots, u^n(x_0))$ est libre.

1) Montrez que $\mathscr{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

2) Montrez que u est un automorphisme et écrire sa matrice dans la base B.

3) Montrez que les sous-espaces propres de u sont de dimension 1 et en déduire une CNS pour que u soit diagonalisable.

4) On choisit $n = 4$ et $u^4(x_0) = x_0$. Donnez la matrice de u dans B. Est-il diagonalisable ? Trouvez le commutant de u.

---

1) $\mathscr{B} = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est une base de E car elle vérifie :

- Les vecteurs $(u^k(x_0))_{0 \le k \le n-1}$ sont bien des éléments de E.
- Le cardinal de la famille vaut $\operatorname{Card} \mathscr{B} = n = \dim E$.
- La famille est libre car soient $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ des scalaires vérifiant : $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 u(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_0) = 0$. En composant par u et en utilisant la linéarité, il vient $\alpha_0 u(x_0) + \dots + \alpha_{n-1} u^n(x_0) = u(0) = 0$. L'hypothèse de l'énoncé : la famille $(u(x_0), \dots, u^n(x_0))$ est libre amène $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$.

2) u est un endomorphisme par hypothèse. Reste à démontrer u bijective. ***Ici***, le plus simple est d'utiliser la critère : l'image d'une base est une base. En effet, $\mathscr{B}$ est une base et $u(\mathscr{B}) = (u(x_0), \dots, u^n(x_0))$ est une base par liberté et cardinal n.

Pour écrire la matrice dans la base $\mathscr{B}$, on calcule les images de la base, et on écrit les coordonnées dans cette base. On a $u(x_0) = u(x_0)$ (2^e^vecteur de la base) et plus généralement, pour $1 \le k \le n-2$, $u(u^k(x_0)) = u^{k+1}(x_0)$. Les $n-1$ premières colonnes sont donc les vecteurs $(E_2, \dots, E_n)$ de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par contre, pour $u(n^{n-1}(x_0))$ on ne peut rien dire ! On écrit donc $u^n(x_0) = a_0 x_0 + \dots + u_{n-1} u^{n-1}(x_0)$.

$$\operatorname{Mat}(u, \mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Remarque : Ce n'est pas vraiment au programme, mais on recpnnaît une ***matrice-compagnon*** de $(-a_0, \dots, -a_{n-1})$ ou plutôt compagnon du polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$. On l'appelle comme çà, parce que son polynôme caractéristique vaut $P(X)$!

3)

$$\operatorname{Ker}(\lambda I - M) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ -1 & \lambda & & & -a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On remarque que $(C_1, \dots, C_{n-1})$ forme un système libre. On en déduit $\operatorname{rg}(\lambda I - M) \ge n-1$ puis, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - M) \le 1$. Si $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - M) = 0$, λ n'est pas une valeur propre et sinon $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - M) = 1$ ce qui est bien le résultat demandé.

M est donc diagonalisable ssi toutes les valeurs propres (existent) sont de multiplicité 1 et donc ssi il y a n valeurs propres distinctes (je rappelle que le « *seulement si* » est faux en général, il est ici vrai à cause des hypothèses).

4) On a ici $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & -1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \overbrace{=}^{\text{dév } L_1} \lambda \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix} - (-1) \begin{pmatrix} -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \lambda\,\lambda^3 + 1(-1)^3 = \lambda^4 - 1$$

M est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (et pas sur $\mathbb{R}$) car possède 4 valeurs propres distinctes qui sont d'ailleurs les 4 racines quatrièmes de 1 :$-1, 1, i, -i$. Je rappelle que le commutant de u est l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u. C'est un ev car c'est le ***noyau*** de l'application linéaire $v \longrightarrow u \circ v - v \circ u$ (je vous laisse y réfléchir)

Méthode1 : Pour calculer le commutant, l'idée est de diagonaliser (si u est diagonalisable…ce qui n'est pas toujours le cas, même dans $\mathbb{C}$). Il faut calculer les espaces propres. Je vous rappelle que ***ici*** onsait que ce sont des droites. Je vous calcule juste l'espace propre de M assoicé à i :

$$MX = iX \iff (iI_n - M)X = 0 \iff \begin{cases} ix - t &= 0 \\ -x + iy &= 0 \\ -y + iz &= 0 \\ -z + it &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= x \\ y &= -ix \\ z &= -x \\ t &= ix \end{cases}$$

On en déduit $E(i) = \text{Vect}(1, -i, -1, i)$ puis comme M est ***réelle***, $E(-i) = \text{Vect}(1, i, -1, -i)$. Pour les 2 autres on trouve : $E(1) = \text{Vect}(1, 1, 1, 1)$ $E(-1) = \text{Vect}[-1, 1, -1, 1)$. On pose P et en déduit D :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & i & -i \end{pmatrix} \text{ donc } P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = D$$

Ensuite pour chercher le commutant de M on écrit successivement N commute avec M ssi $NM = MN \iff NPDP^{-1} = PDP^{-1}N$ ssi (en $\times$ à gauche par P^{-1} et à droite par P) ssi $P^{-1}NPD = DP^{-1}NP \iff N'D = DN'$ (on a posé $N' = P^{-1}NP$). On est donc « *ramené* » aux matrices qui commutent avec une matrice diagonale : c'est plus facile et on peut prendre une matrice à coefficients indéterminés :

$$N'D = DN' \iff \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ n & o & p & q \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a &= a \\ -b &= b \\ ic &= c \\ -id &= d \\ \dots \end{cases} \iff b = c = d = e = g = h = j = k = m = n = o = p = 0$$

Il suit que l'ensemble des matrices qui commutent avec M est (comme $N = PN'P^{-1}$) (je ne calcule pas P^{-1}) :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -i & i \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & i & -i \end{pmatrix}^{-1}$$

Méthode2 : C'est une méthode plus adaptée ici, plus élégante mais un peu plus difficile. On raisonnons avec les endomorphismes canoniquement associés u et n. On suppose donc $u \circ n = n \circ u$. On a $n(x_0) = b_0 x_0 + b_1 u(x_0) + b_2 u^2(x_0) + b_3 u^3(x_0)$ (on utilise $\mathscr{B}$ base de E) ; ensuite on pose $P(X) = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + B_3 X^3$; on a donc $v(x_0) = P(u)(x_0)$. Enfin on remarque que $v(u^k(x_0)) = u^k(v(x_0))$ car u et v commutent, donc $v(u^k(x_0)) = u^k(P(u)(x_0)) = P(u)(u^k(x_0))$ car u^k et $P(u)$ commutent, il n'y a que du u! On constate alors que $v = P(u)$ ***sur la base*** $\mathscr{B} = (x_0, u(x_0), u^2(x_0), u^3(x_0))$, ***ils sont donc égaux***. On vient de démontrer que si v commute avec u, v est un polynôme en u. La réciproque étant immédiate, le commutant de u (de M) est l'ensemble des polynômes en u (en M). Pour info, cet ensemble (ev!) se note $\mathbb{K}[u]$ (ou $\mathbb{K}[M]$).

Remarques

- La méthode 1 et 2 ne semblent pas donner la même chose! En fait, tous les polynômes en M commutent avec M. Cet ensemble est un ev de dimension 4 (je ne le démontre pas, je vous laisse y réfléchir) ; Donc l'ensemble de laméthode 1 le ***contient***. Or, il est immédiat que cet ensemble est aussi de dimension 4 (4 coefficients indéterminés...). Il est donc égal. Il est clair que l'on ne « *voit pas* » que $PN'P^{-1}$ est un polynôme en M...
- Comme déjà dit, le commutant de u contient au moins tous les polynômes en u (que l'on note $\mathbb{K}[u]$). S'il ne contient que cela, c'est un endomorphisme ***cyclique*** (ce n'est pas au programme). On démontre qu'un endomorphisme est cyclique s'il existe un x_0 tel que $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ soit une base. C'est justement le cas de cet exo...

CCP PSI 2018 - Mines-Ponts PSI 2017 (diagonalisabilité d'une matrice par blocs)

Enoncé 26 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices qui commutent et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

1) Montrez que si U est semblable à V, pour tout polynôme R, $R(U)$ est semblable à $R(V)$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Exprimez $P(M)$ en fonction de $P(A), P'(A)$ et B.

3) Montrez que M est diagonalisable ssi A est diagonalisable et que $B = 0$.

---

1) Si U est semblable à V, alors $U = PVP^{-1}$ avec $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$. On sait alors, pour tout $k \in \mathbb{N}, U^k = PV^kP^{-1}$. Par suite, si $R \in \mathbb{C}[X]$ est le polynôme $R = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$:

$$R(U) = \sum_{k=0}^{p} a_k U^k = \sum_{k=0}^{p} PV^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{p} a_k V^k\right)P^{-1} = PR(V)P^{-1}$$

donc $R(U)$ est semblable à $R(V)$.

2) En calculant les premières valeurs M^2, M^3, on devine aisément $M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$ (***car*** A ***et*** B ***commutent!*** : par exemple, pour $k = 2$, on trouve $AB + BA = 2AB$), pour $k \in \mathbb{N}^*$ et même $k = 0$. On le démontre alors par récur-

rence, ce qui est immédiat, je ne le fais donc pas ici. Ensuite, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$:

$$P(M) = \sum_{k=0}^{p} a_k M^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k A^k & \sum_{k=0}^{p} a_k k A^{k-1} B \\ 0 & \sum_{k=0}^{p} a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)B \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

car on sait que $P'(X) = \sum_{k=0}^{p} k a_k X^{k-1}$.

3)

$\boxed{\Longleftarrow}$

Si A est diagonalisable et $B = 0$, alors $M = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$. Or on sait, cours, qu'une matrice diagonale par blocs est diagonalisable ssi chaque bloc diagonal est diagonalisable, donc M diagonalisable. On le redémontre quand même, mais juste le sens qui nous intéresse. On a $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. Par suite :

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PDP^{-1} & 0 \\ 0 & PDP^{-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}}_{Q} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}}_{Q^{-1}} = Q\Delta Q^{-1}$$

Δ est diagonale par blocs avec les blocs diagonaux étant des matrices diagonales ; c'est donc une matrice diagonale et M est alors diagonalisable.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons ici M diagonalisable. Il existe donc un polynôme P ***scindé à racines simples*** tel que $P(M) = 0$. Si on sait bien son cours, on peut même choisir le polynôme « *minimal* » égal à $\prod_i (X - \lambda_i)$ où les λ_i sont les valeurs propres ***distinctes*** de M. En utilisant le Q2), on en déduit $P(A) = 0$ et $P'(A)B = 0$. Comme P est ***scindé à racines simples***, on en tire que A est diagonalisable. Reste à montrer $B = 0$. Faire attention que de $P'(A)B = 0$ on ***ne peut pas*** en déduire $P'(A) = 0$ ou $B = 0$! Par contre je rappelle que si $CB = 0$ ***et*** C ***inversible***, on peut en déduire $B = 0$.

On va montrer $P'(A)$ inversible par l'absurde. P' est scindé car on est dans $\mathbb{C}$, donc $P'(X) = \prod_i (X - b_i)$. Comme $P'(A)$ n'est pas inversible, nécessairement l'un des $A - b_i I$ n'est pas inversible (en effet en passant au déterminant nul, l'un des déterminantd du produit est nécessairement nul). Or, le cours nous apprend que, si $A - b_i I$ n'est pas inversible, alors b_i est une valeur propre de A. b_i est donc aussi racine de P. b_i étant racine de P ***et de*** P' est alors une ***racine au moins double*** de P. C'est absurde car P est à racines simples.

Remarque : Je rappelle que a est racine (au moins) de multiplicité k de P ssi $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$. En particulier, si $P(a) = 0$ et $P'(a) \neq 0$, a est racine simple de P

Mines-Ponts PSI 2018 (diagonalisabilité de A^2 et A)

Enoncé 35

1) Soit $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 est diagonalisable. Montrez que A est diagonalisable.

2) Le résultat demeure-t-il si $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$?

---

1) Avant de répondre à la question posée, je vous démontre le sens réciproque qui est des fois posé à CCP, il est plus facile. Soit A diagonalisable ; elle est donc semblable à une matrice diagonale D, soit $A = PDP^{-1}$ d'où $A^2 = PD^2P^{-1}$. Comme D^2 est diagonale, on en déduit A^2 diagonalisable (on en déduit aussi que les valeurs propres de A^2 sont alors les carrés des valeurs propres de A). La réciproque est fausse en général, cad A^2 diagonalisable n'entraîne pas A diagonalisable ; voir question2. Par contre, elle est vraie si on prend l'hyppothèse $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ comme dans Q1.

A^2 est diagonalisable. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes. On sait alors que A^2 annule le ***polynôme scindé à racines simples*** $P(X) = (X - \lambda_1)\ldots(X - \lambda_p)$. L'hypothèse $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ amène que 0 n'est pas valeur propre soit

$\lambda_i \neq 0$. Le lecteur réfléchira alors au fait que ***alors*** A annule le polynôme $P(X^2) = (X^2 - \lambda_1)\dots(X^2 - \lambda_p) = Q(X)$. Q est-il scindé à racines simples? Il est scindé ***car on est dans*** $\mathbb{C}$: λ_i a ***toujours*** deux racines carrées $\pm\mu_i$, donc $Q(X) = (X-\mu_1)(X+\mu_1)\dots(X-\mu_p)(X+\mu_p)$. Il est à racines simples ***car on a*** $\lambda_i \neq 0$: ceci entraîne $+\mu_i \neq -\mu_i$ et par suite tous les $\pm\mu_i$ distincts 2 à 2. A est donc diagonalisable.

2) Le résultat est faux dans $\mathbb{R}$ et, sur le même contre-exemple, on prouve aussi que A^2 diagonalisable entraîne A diagonalisable est faux en général. Prenons $A = Rot(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ car elle n'a pas de valeurs propres réelles et elle est bien inversible. D'autre part, $A^2 = Rot(\pi) = -I$ qui est évidemment diagonalisable car diagonale.

Remarques

- On démontre que les hypothèses ***minimum*** sont, dans le cas de $\mathbb{C}$: A^2 diagonalisable et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2 \implies A$ diagonalisable et, dans le cas de $\mathbb{R}$: A^2 diagonalisable et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$ et $\operatorname{Sp} A^2 \subset \mathbb{R}^+ \implies A$ diagonalisable.
- On peut remarquer que si $A \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{C})$, $\operatorname{Ker} A^2 = \{0\} = \operatorname{Ker} A$.

Centrale PSI 2018 (nilpotence et trace des puissances itérées)

Enoncé 36 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On note $a_1, \dots, a_p$ les valeurs propres distinctes de A et $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités respectives.

1) (i) Soit G l'ensemble des polynomes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $m_1 Q(a_1) + \dots + m_p Q(a_p) = 0$. Montrez que $G = \{Q \in \mathbb{C}[X],\ Q(0) = 0\}$.

(ii) En déduire $\operatorname{Sp} A = \{0\}$ puis que A est nilpotente.

2) On considère la série entière de terme général $\operatorname{tr}(A^k) z^k$. Exprimez son rayon de convergence à l'aide des valeurs propres de A et retrouvez le résultat de la première question.

---

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de valeurs propres (comptées avec la multiplicité) ; on sait $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^p m_i a_i$,en utilisant les notations de l'énoncé avec la multiplicité. Montrons d'abord $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \sum_{i=1}^p m_i a_i^k$ (car ce n'est pas du cours). A étant complexe, on peut la trigonaliser $A = PTP^{-1}$, puis $A^k = PT^kP^{-1}$. On en déduit $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(T^k)$. Or, si l'on sait bien son cours sur les matrices triangulaires, T^k est triangulaire ave sur la diagonale, les éléments de la diagonale de T à la puissance k. Le résultat est donc acquis. A noter que ce résultat susbsiste dans $\mathbb{R}$ si le polynôme caractéristique est scindé (car alors la matrice est trigonalisable dans $\mathbb{R}$, c'est du cours).

Notons $H = \{Q \in \mathbb{C}[X],\ Q(0) = 0\}$. On peut constater que H est le noyau de la forme linéaire $\varphi : Q \longrightarrow Q(0)$. Par conséquent, c'est un hyperplan. Mais attention ! ce n'est pas complètement au programme car on est en dimension infinie. Considérons le polynôme $Q = X^k$ avec $k \geq 1$. Alors $m_1 Q(a_1) + \dots + m_p Q(a_p) = m_1 a_1^k + \dots + m_p a_p^k = \operatorname{tr}(A^k) = 0$: on en déduit $X^k \in G$. Or $X^k \in H$ et même $H = \operatorname{Vect}\big((X^k)_{k\geq 1}\big)$; il vient alors $H \subset G$. Montrons $G \subset H$ et par ***double inclusion***, la preuve sera acquise.

Soit $Q \in G$, $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$. Par hypothèse $m_1 Q(a_1) + \dots + m_p Q(a_p) = 0$ soit

$$0 = \sum_{i=1}^p m_i Q(a_i) = \sum_{i=1}^p m_i \sum_{k=0}^m b_k a_i^k = \sum_{k=0}^m b_k \sum_{i=1}^p m_i a_i^k = \sum_{k=0}^m b_k \operatorname{tr}(A^k) = b_0 \operatorname{tr}(A^0) + 0 = n b_0$$

On en déduit $b_0 = 0$, soit $Q(0) = 0$ ou encore $Q \in H$ (on a permuté les sommes ***car elles sont finies***).

Considérons le polynôme, pour $1 \leq i \leq p$, $P_i = X\prod_{k\neq i}(X-a_k)$. On remarque $P_i(0)=0$, $P_i(a_k)=0$ pour $k\neq i$ et $P_i(a_i) = a_i\prod_{k\neq i}(a_i-a_k)$. On a donc $P_i \in H$, donc $P_i \in G$. Il vient alors $m_1P_i(a_1)+\cdots+m_pP_i(a_p) = m_iP_i(a_i) = m_ia_i\prod_{k\neq i}(a_i-a_k) = 0$ et comme les a_j sont 2 à 2 distincts, il vient $a_i = 0$. On vient de démontrer $\operatorname{Sp} A \subset \{0\}$.

Réciproquement, 0 est nécessairement valeur propre sinon A n'aurait pas de valauer propre, ce qui est impossible dans $\mathbb{C}$. On en déduit le polynôme caractéristique $\chi_A = (\lambda-0)^n = \lambda^n$. Par le théorème de **Cayley**[1]**-Hamilton**[2], il vient $A^n = 0$ soit A nilpotente.

2) Comme $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=0}^p m_ia_i^k$, la série entière $\sum_k \operatorname{tr}(A^k)z^k$ est la somme $\sum_{i=0}^p$ de m_i fois les séries entières $\sum_k a_i^kz^k$. Chacune de ces séries est une série géométrique convergeant ssi $|a_iz|<1 \iff |z|<\frac{1}{|a_i|}$, donc de rayon de convergence $R=\frac{1}{|a_i|}$. Comme ces nombres sont ***distincts***, un théorème du cours nous donne que le rayon de convergence de la série entière initiale est $\inf_i \frac{1}{|a_i|}$.

Reprenons l'hypothèse de l'exercice : $\operatorname{tr}(A^k)=0$ pour $k\geq 1$. On en déduit que la série entière est la série nulle (à partir du rang 1) elle est donc convergente pour tout $z\in\mathbb{C}$, soit $R=+\infty$. Il vient alors $\frac{1}{|a_i|}=+\infty$ soit $|a_i|=0$. On retrouve le résultat de la question précédente.

Remarques

- Nous venons de démontrer, par ***deux méthodes*** que si une matrice vérifie $\operatorname{tr}(A^k)=0$ pour $k\geq 1$, alors elle est nilpotente (en fait il suffit pour $1\leq k\leq n$).
- La réciproque est facile. Je vous laisse y réfléchir.

Centrale PSI 2018 (racine carrée matrice symétrique)

Enoncé 80 Pour $M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, on note $M\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, pour tout $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX\geq 0$.

1) Montrez que $M\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ ssi toutes ses valeurs propres sont positives.

Soit $M\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mu_1,\dots,\mu_p$ ses valeurs propres 2 à 2 distinctes.

2) Montrez il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ de degré $p-1$ tel que $P(\mu_i)=\sqrt{\mu_i}$, pour tout $1\leq i\leq p$.

3) Montrez $P(M)\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $P(M)^2=M$.

---

1)

$\boxed{\Longrightarrow}$

Soit $M\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de M. Alors il existe $X\neq 0$ tel que $MX=\lambda X$. Il suit ${}^tXMX = \lambda\,{}^tXX = \lambda\|X\|_{can}^2$. Je rappelle que $(X|Y)_{can} = {}^tXY$ est le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Par hypothèse, on a donc $\lambda\|X\|_{can}^2\geq 0$ ce qui amène $\lambda\geq 0$ ***car*** $X\neq 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Soit $M\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres positives $\lambda_i\geq 0$. D'après le théorème spectral, il existe une matrice orthogonale

1. **Arthur Cayley** : mathématicien anglais (1821-1895). Un des inventeurs du calcul matriciel.
2. **William Rowan Hamilton** : mathématicien irlandais (1805-1865). Connu pour la découverte des quaternions.

P telle que $M = PD\,{}^tP = PDP^{-1}$. On écrit alors ${}^tXMX = {}^tXPD\,{}^tPX = {}^tYDY$ après avoir posé $Y = {}^tPX$. Puis :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & \dots & \dots & y_n \end{pmatrix}}_{{}^tY} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 & \dots & \dots & \lambda_n y_n \end{pmatrix}}_{{}^tYD} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \right)}_{{}^tYDY}$$

Il vient alors, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXMX = {}^tYDY = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq 0$ car $\lambda_i \geq 0$ et y_i réel.

2) Question un peu difficile. On va démontrer le théorème de **Lagrange**[3] un peu plus « *large* » : pour tous réels $a_1, \dots, a_p$ 2 à 2 distincts, il existe ***un et un seul polynôme*** P de degré $\leq p-1$ vérifiant $P(a_i) = b_i$ (avec b_i réels quelconques). Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R}_{p-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^p$ qui à tout polynôme P associe le p-uplet $(P(a_1), \dots, P(a_p))$. Elle est visiblement linéaire entre deux ev de ***même*** dimension p. Regardons son noyau : si P vérifie $\varphi(P) = 0$, alors $P(a_1) = \dots = P(a_p) = 0$, cad P de degré $\leq p-1$ possède au moins p racines. C'est donc le polynôme nul. On en déduit $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$ puis φ isomorphisme et donc la preuve du théorème.

Cela ne sert pas dans la question mais on peut expliciter un peu plus ce polynôme, on introduit les polynômes dits de Lagrange : le polynôme L_i est tel que $L_i(a_j) = \delta_{ij}$. Le lecteur vérifiera qu'il est colinéaire à $\prod_{k \neq i}(X - a_k)$ et que, en fait, comme $L_i(a_i) = 1$, c'est le polynôme $L_i(X) = \frac{1}{\prod_{k \neq i}(a_i - a_k)} \left(\prod_{k \neq i}(X - a_k)\right.$. Ensuite, le polynôme recherché, cad tel que $P(a_i) = b_i$) est le polynôme $\sum_i b_i L_i(X)$.

Le lecteur a compris que la question est démontrée en prenant $a_i = \mu_i$ qui sont bien distincts et $b_i = \sqrt{\mu_i}$.

3) On a $M = QD\,{}^tQ$ comme déjà vu, avec sur la diagonale de D, les valeurs propres μ_i. Cela amène, c'est du cours, $P(M) = P(QD\,{}^tQ) = QP(D)\,{}^tQ$. $P(D)$ est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $P(\mu_i)$, c'est aussi du cours ; en fait $P\big(D\mathrm{iag}(\lambda_i)\big) = D\mathrm{iag}\big(P(\lambda_i)\big)$. $P(M)$ est donc semblable à $P(D)$ qui est ***diagonale*** et a pour coefficients diagonaux les $P(\mu_i) = \sqrt{\mu_i} \geq 0$. Ce sont donc les valeurs propres de $P(M)$ qui sont positives, d'où $P(M) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Ensuite :

$$(P(M))^2 = (QP(D)\,{}^tQ)^2 = Q(P(D))^2\,{}^tQ = QD\,{}^tQ = M$$

car on a $P(D)^2 = \big(D\mathrm{iag}(\sqrt{\mu_i})\big)^2 = D\mathrm{iag}\big(\sqrt{\mu_i}^2\big) = D\mathrm{iag}(\mu_i) = D$.

CCP PSI 2018 (distance à un sev)

Enoncé 100 On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} t^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1) Calculez A_n en distinguant 2 cas selon la parité de n. Donnée : $A_0 = 1$.

2) Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$. Vérifiez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Calculez $d\big(X^3, \mathbb{R}_2[X]\big)$.

---

1) Je rappelle que si une fonction est paire (et l'intégrale existe !), $\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$ et si f est impaire, $\int_{-a}^a f = 0$. Montrons rapidement que A_n existe : on a la continuité de $f_n(t) = t^n e^{-t^2}$ sur $\big[0, +\infty\big[$ et $\lim_{+\infty} t^2 f_n(t) = 0$ ce qui amène l'intégrabilité par le critère $t^a f(t)$ avec $a > 1$..

3. **Joseph-Louis Lagrange** : français (1736-1813). Fondateur du calcul des variations. Importants travaux en algèbre, théorie des nombres et géométrie. Connu pour les théorèmes éponymes en théorie des groupes et fractions continues.

La fonction f_n étant impaire pour n impair, $I_n = 0$. Pour $2n$ pair, on effectue une ipp avec $u = e^{-t^2}$ $v' = t^{2n}$ $u' = -2te^{-t^2}$ $v = \frac{t^{2n+1}}{1n+1}$.

$$I_{2n} = \Big[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}e^{-t^2}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{2}{2n+1}\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n+2}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}I_{2n+2}$$

On a ***pu appliqué directement*** l'ipp en $+\infty$ car la deuxième intégrale converge car on a reconnu I_{2n+2}. On a :

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2}I_{2n} = \frac{(2n+1)(2n-1)}{2^2}I_{2n-2} = \frac{(2n+1)(2n-1)\times\cdots\times 3\times 1}{2^{n+1}}\ I_0 \quad \textbf{car le dernier} \text{ est } I_2 = \frac{1}{2}I_0$$

On en déduit (démonstration par récurrence immédiate :

$$I_{2n+2} = \frac{(2n+1)!}{2n(2n-2)\times\cdots\times 2\ 2^{n+1}} = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}\ n!} = \frac{(2n+2)!}{2^{2n+2}\ (n+1)!} \quad\Longrightarrow\quad I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\ n!}$$

2) L'existence de l'intégrale $\varphi(P,Q)$ résulte de la continuité de la fonction sur $\mathbb{R}$ et du critère $t^2 f(t) \longrightarrow 0$ en $\pm\infty$ par croissances comparées ***parce que ce*** sont des polynômes. La symétrie est immédaite de même que la bilinéarité. La positivté aussi car $\varphi(P,P) = \int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \geq 0$ car la fonction est positive (on est dans $\mathbb{R}$). Reste à prouver définie :

Si $\varphi(P,P) = 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} P^2(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction « *interne* » étant ***continue et positive***, on en déduit sa nullité ce qui amène $P = 0$.

3) On applique le théorème sur la distance à un sev dans les evs euclidiens :

$$d^2\big(X^3, \mathbb{R}_2[X]\big) = \| X^3 - p(X^3)\|^2 = \| X^3\|^2 - \| p(X^3)\|^2$$

où p désigne la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_2[X]$. On calcule immédiatement $\| X^3\|^2 = \varphi(X^3, X^3) = I_6 = \frac{12!}{2^{12}\,6!} = \frac{10395}{64}$. Pour calculer la 2ième norme, il faut d'abord calculer le projeté que l'on calcule à l'aide de la formule du projeté orthogonal. A cette fin, il faut contruire une BON de $\mathbb{R}_2[X]$ que l'on construit par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de la base quelconque $(1, X, X^2)$. On pose $P_0 = 1,\ P_1 = X + \alpha$ tq $(P_1|P_0) = 0$ et $P_2 = X^2 + \beta X + \gamma$ tq $(P_2|P_1) = [P_2|P_0) = 0$. On a :

$$\begin{aligned}
(P_1|P_0) &= (X+\alpha|1) = (X|1) + \alpha - 1|1) = I_1 + \alpha I_0 = \alpha I_0 = 0 \implies \alpha = 0\\
(P_2|P_0) &= (X^2|1) + \beta(X|1) + \gamma(1|1) = I_2 + \beta I_1 + \gamma I_0 = 0 \implies \gamma = -I_2 = -\frac{1}{2}\\
(P_2|P_1) &= (X^2|X) + \beta(X|X) + \gamma(1|X) = I_3 + \beta I_2 + \gamma I_1 = 0 \implies \beta = 0
\end{aligned}$$

$\big(1, X, X^2 - \frac{1}{2}\big)$ est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ et il vient alors que $\Big(\frac{1}{\|1\|}, \frac{X}{\|X\|}, \frac{X-\frac{1}{2}}{\|X^2-\frac{1}{2}\|}\Big)$ est une base orthonormée. En appliquant la formule du projeté orthogonale, il vient :

$$p(X^3) = \frac{\big(X^3\,|\,1\big)}{\|1\|^2}\,1 + \frac{\big(X^3\,|\,X\big)}{\|X\|^2}\,X + \frac{\big(X^3\,|\,X^2-\frac{1}{2}\big)}{\|X^2-\frac{1}{2}\|^2}\,\big(X^2 - \frac{1}{2}\big)$$

Je vous laisse donc réfléchir au fait que l'on a donc :

$$\| p(X^3)\|^2 = \frac{\big(X^3\,|\,1\big)^2}{\|1\|^2} + \frac{\big(X^3\,|\,X\big)^2}{\|X\|^2} + \frac{\big(X^3\,|\,X^2-\frac{1}{2}\big)^2}{\|X^2-\frac{1}{2}\|^2} = \frac{I_3^2}{I_0^2} + \frac{I_4^2}{I_2} + \frac{(I_5 - \frac{1}{2}I_3)^2}{I_4 + \frac{1}{4}I_0 - I_2} = \frac{9}{8}$$

CCP PSI 2018 - ENSEA PSI 2015 (somme d'une série entière)

Enoncé 111 Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $a_1 = a_0 = 1$ et $\forall\, n \geq 1,\ a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$.

1) Montrez $\forall\, n \geq 1,\ 1 \leq a_n \leq n^2$. (**Ensea :** Montrez que la suite $\left(\frac{a_n}{n^2}\right)$ converge).

2) Donnez le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

3) Calculez la somme. *Indication :* utilisez une équation différentielle vérifée par la somme. (**Ensea :** pas d'indication).

---

1) Montrons par récurrence sur $n \geq 1$, $\mathscr{P}(n) : 1 \leq a_n \leq n^2$:

- $\mathscr{P}(1) : 1 \leq a_1 = 1 \leq 1^2$. On calcule $a_2 = 1 + \frac{2}{2} 1 = 2$. On a bien $1 \leq a_2 = 2 \leq 2^2$. $\mathscr{P}(2)$ Ok.
- Supposons la propriété vraie pour n et $n-1$, avec $n \geq 2$. Alors $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \geq 1 + \frac{2}{n+1}\, 1 \geq 1$ et :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \leq n^2 + \frac{2(n-1)^2}{n+1} = \frac{n^3 + 3n^2 - 4n + 2}{n+1} \leq \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{n+1} = \frac{(n+1)^3}{n+1} = (n+1)^2$$

On a bien $-4n + 2 \leq 3n + 1$ car ceci équivaut à $7n \geq 1$. $\mathscr{P}(n+1)$ est donc vrai.

2) On peut remarquer que l'application immédiate de la règle de d'**Alembert**[4] ne « *marche* » pas. On utilise plutôt la propriété suivante : si $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R(\sum a_n x^n) \geq R(\sum b_n x^n)$. Ceci nous donne que le rayon R de notre série entière vérifie $R \leq R(\sum 1 x^n)$ qui vaut 1 (c'est la série géométrique usuelle !), soit $R \leq 1$. Puis la série entière $\sum n^2 x^n$ a pour rayon 1 (par d'alembert). On en déduit $R \geq 1$, puis $R = 1$.

3)

$$\forall\, x \in \left]-1, 1\right[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = 1 + x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{n+1} + 2 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n+1} x^{n+1}}_{g(x)}$$

$$= 1 + x + x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 2g(x) = 1 + x + x\big(f(x) - 1\big) + 2g(x) \quad (1)$$

g est aussi une série entière de rayon 1 (on peut reprendre l'encadrement) donc dérivable terme à terme sur $]-1, 1[$ et vaut alors $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n = x f(x)$. En dérivant (1) on obtient $f'(x) = 1 + f(x) - 1 + x f'(x) + 2x f(x)$. On en déduit que f est solution de l'équation différentielle $(1-x)y' - (2x+1)y = 0$ sur $\left]-1, 1\right[$ avec la condition initiale $f(0) = a_0 = 1$. Les solutions de l'équation :

$$y = C \exp\left(\int \frac{2x+1}{1-x}\, \mathrm{d}x\right) = C \exp\left(\int (2 + \frac{3}{1-x})\, \mathrm{d}x\right) = C \exp\left(2x - 3\ln|1-x|\right) = C \frac{e^{2x}}{|1-x|^3} = C \frac{e^{2x}}{(1-x)^3}$$

On peut « *enlever* » la valeur absolue car $1 - x$ est de signe constant sur $]-1, 1[$ et signe constant fois constante = constante ou, plus simplement ***ici***, car $|1-x| = 1 - x$ sur $]-1, 1[$. Par théorème d'unicité de **Cauchy**[5], on en déduit $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{(1-x)^3}$.

Mines-Ponts PSI 2018 (équivalent d'une suite sous forme de somme) ✌

Enoncé 115 Soit $p, q > 0$. Montrez que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p (\ln n)^q \sim \frac{1}{p+1} n^{p+1} (\ln n)^q$.

---

4. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).
5. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable, plus de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe et en théorie des groupes.

On utilise une comparaison d'aires série-intégrale. On utilise le fait que $x \longrightarrow x^p \nearrow$ car $p > 0$.

$$\forall\, k \geq 1,\ \int_{k-1}^{k} x^p\,\mathrm{d}x \leq k^p \leq \int_{k}^{k+1} x^p\,\mathrm{d}x \implies \frac{n^{p+1}}{p+1} = \int_0^n x^p\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=1}^{n} k^p \leq \int_1^{n+1} x^p\,\mathrm{d}x = \frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1}$$

On a $\frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1} \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$. Comme on n'a pas de théorème d'encadrement par des mêmes équivalents, on effectue d'bord une division puis une limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$:

$$1 \longleftarrow \frac{n^{p+1}/p+1}{n^{p+1}/p+1} \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}/p+1} \leq \frac{((n+1)^{p+1}-1)/p+1}{n^{p+1}/p+1} \longrightarrow 1$$

Du théorème d'encadrement de limites, on déduit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$ puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p (\ln n)^q \sim \frac{n^{p+1}\ln^q n}{p+1}$.

CCP PSI 2018 2011 - IMT PSI 2016 (série à terme récurrent)

Enoncé 124 Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$.

1) Montrez $u_n \longrightarrow 0$ et déterminez la limite de (nu_n). (**2011 :** donnez limite de u_n)

2) Nature des séries de terme général u_n et $(-1)^n u_n$?

---

1) On a immédiatement $u_{n+1} \geq 0$ puis l'encadrement $\forall\, n \geq 1, 0 \leq u_n = \dfrac{e^{-u_{n-1}}}{n} \leq \dfrac{1}{n}$ qui amène $u_n \longrightarrow 0$.
Ensuite on écrit $(n+1)u_{n+1} = e^{-u_n} \longrightarrow e^0 = 1$ soit $\lim nu_n = 1$.

2) De la question précédente, on déduit $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ qui amène immédiatement la divergence de la série $\sum u_n$.
On peut aussi écrire $\dfrac{(-1)^n}{u_n} \sim \dfrac{(-1)^n}{n}$ mais je rappelle que le ***critère d'équivalent ne s'applique pas*** ici car le signe n'est pas constant : on ***peut*** avoir une série alternée convergente équivalente à une série alternée divergente (j'ai donné un exemple dans le cours). On peut d'ailleurs préciser que c'est ***bien*** une série alternée car u_n est ***de signe constant***. Normalement on commence par essayer le CSSA mais ici démontrer la décroissance de $|u_n|$ est difficile.L'idée est alors de faire un développement asymptotique de u_n en utilisant la méthode des équivalents « *successsifs* ». Je rappelle l'idée, utile lorsque l'on ***ne peut pas*** faire un développement directement, comme c'est le cas pour une suite récurrente comme ici. on esssaye :

$$u_n \sim ?a_n \quad \text{puis } u_n - a_n \sim ?b_n \quad \text{puis } u_n - a_n - b_n \sim ?c_n \implies u_n = a_n + b_n + c_n + o(c_n)$$

On écrit donc ici :

$$(-1)^n u_n - \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^n \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} - \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(e^{-u_{n-1}} - 1\right) \sim \frac{(-1)^n}{n} \times (-u_{n-1}) \sim \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

On a utilisé $e^u - 1 \sim_{u\to 0} u$ avec $u_{n-1} \to 0$. On a alors : $u_n = \underbrace{\dfrac{(-1)^n}{n}}_{a_n} + \underbrace{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}}_{b_n} + \underbrace{o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}_{c_n}$

La série $\sum a_n$ est convergente par le CSSA, la série $\sum b_n$ est convergente absolument par **Riemann** [6] et la série $\sum c_n$ est convergente comme « *petit 0* » d'une série ***positive convergente*** (c'est un critère). On en déduit que la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

6. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

CCP PSI 2018 (développement en série d'une intégrale)

Enoncé 139

1) Montrez la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$.

2) Montrez que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,n}{1+n^2}$.

---

1) La convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\cos t}{1+e^t}}_{f(t)}\,\mathrm{d}t$ résulte de :

- f continue sur $\left[0,+\infty\right[$.
- $|f(t)| \leq \dfrac{1}{1+e^t} \sim_{+\infty} e^{-t}$. Le critère de majoration des fonctions positives et le critère $t^a f(t)$: $\lim_{+\infty} t^2 f(t) = 0$ permet de conclure à l'intégrabilité de f sur $\left[1,+\infty\right[$.

2)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos t}{e^{-t}+1}\,\mathrm{d}t \overset{(2)}{=} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t}\cos t}{e^{-t}+1}\,\mathrm{d}t \overset{(3)}{=} \int_{]0,+\infty[} e^{-t}\cos t \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \cos t\, e^{-(n+1)t}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t \overset{(4)}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{(5)}{=} \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{(6)}{=} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n \cos t\, e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t \overset{(7)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n+1)^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$$

- **(1)** Cette astuce est obligatoire en anticipant le développement du (3) : on a $e^{-t} < 1$ ***mais pas*** $e^t < 1$.
- **(2)** Je rappelle qu'à partir du moment où une intégrale existe (ou converge), on a $\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b[} f$. Cette astuce est aussi en anticipant le développement du (3) où il faut $-1 < e^{-t} < 1$ ce qui impose $t \neq 0$.
- **(3)** On utilise le développement ensérie entière $\dfrac{1}{1+u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^n$ valide pour $|u| < 1$. On a bien $|e^{-t}| < 1$, pour $t \in \left]0,+\infty\right[$.
- **(4)** Le théorème usuel d'intégration terme à terme ne « *marche* » pas bien : il est difficile de démontrer que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. On va donc utiliser le théorème de convergence dominée de **Lebesgue**[7].
- **(5)** Le théorème de Lebesgue s'applique car :
  - On a bien la ***convergence simple*** de $\sum_{n=1}^{N} f_n(t)$, pour tout $t \in \left]0,+\infty\right[$ (lorsque $N \longrightarrow +\infty$), puisque cette série converge puisqu'elle vient d'un développement en série !
  - ***Domination :***

$$\left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n \cos t\, e^{-(n+1)t}\right| = |\cos t| e^{-t} \left|\frac{1-(-1)^{N+1}e^{-(N+1)t}}{1-(-e^{-t})}\right| \leq \frac{e^{-t}\times(1+1)}{1+e^{-t}} \sim 2e^{-t} = \varphi(t)$$

  φ est bien intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ en vertu du critère $t^a f(t)$.
- **(6)** On peut ici intervertir l'intégration et la somme car la somme est ***finie***.
- **(7)** Ceci résulte du calcul de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Re\mathrm{e}\,(e^{it})e^{-(n+1)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Re\mathrm{e}\left(e^{t(i-(n+1))}\right) = \Re\mathrm{e}\left(\int_0^{+\infty} e^{t(i-(n+1))}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \Re\mathrm{e}\left(\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{t(i-(n+1))}}{i-(n+1)}\right]_0^A\right) = \Re\mathrm{e}\left(\frac{-1}{i-(n+1)}\right) = \Re\mathrm{e}\left(\frac{i+(n+1)}{(n+1)^2+1}\right) = \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

7. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

La limite de la ***fonction complexe*** $e^{A(i-(n+1))}$ lorsque $A \longrightarrow +\infty$ vaurt bien 0 car en passant au module, on obtient $|e^{A(i-(n+1))}| = e^{-(n+1)A}$.

CCP PSI 2018-2015-2014-2013 (équivalent d'une suite-intégrale)

Enoncé 161

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. Justifiez l'existence de I_n. Déterminez $\lim I_n$ puis un équivalent de I_n.

---

1) La convergence de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$ résulte de :

- f_n est ***continue*** sur $]0,+\infty[$.
- $f_n(t) \sim_0 \dfrac{t/n}{t\times 1} = \dfrac{1}{n}$. f_n se prolonge en une fonction continue sur $[0,1[$ et est donc ***intégrable*** sur $]0,1[$.
- $|f_n(t)| \leq \dfrac{1}{t(1+t^2)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^3}$ Le critère de majoration d'une fonction ***positive*** et le critère de **Riemann**[6] ($a = 3 > 1$) permet de conclure à l'intégrabilité de f_n sur $[1,+\infty[$.

2)

- ***convergence simple de*** (f_n) :
  Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\frac{t}{n} \longrightarrow 0$, donc $f_n(t) \longrightarrow 0$. On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge ***simplement*** vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$.
- ***Hypothèse de Domination :***

$$|f_n(t)| \leq \frac{|t/n|}{t(1+t^2)} = \frac{1}{n(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \text{intégrable sur }]0,+\infty[$$

Le théorème de convergence dominée de **Lebesgue**[7] permet de conclure $\lim I_n = \int_0^{+\infty} 0 = 0$

3) On écrit $nI_n = \int_0^{+\infty} \underbrace{\dfrac{\sin(t/n)}{(t/n)(1+t^2)}}_{g_n(t)}\,\mathrm{d}t$. Appliquons à nouveau le théorème de convergence dominée :

- ***Etude de la convergence simple de*** (g_n) :
  pour tout $t \in]0,+\infty[$, comme $\frac{t}{n} \longrightarrow 0$ et en rappelant $\lim_0 \frac{\sin u}{u} = 1$, on en déduit que $g_n(t) \longrightarrow \frac{1}{1+t^2} = h(t)$. la suite de fonctions (g_n) converge donc simplement vers h sur $]0,+\infty[$.
- ***Hypothèse de Domination :***

$$|g_n(t)| \leq \frac{|t/n|}{t/n(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2} \quad \text{intégrable sur }]0,+\infty[$$

Le théorème de convergence dominée de **Lebesgue**[7] permet de conclure $\lim nI_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, puis $I_n \sim \dfrac{\pi}{2}\dfrac{1}{n}$.

Mines-Ponts PSI 2018 (prolongement C^1 d'une fonction-intégrale)

Enoncé 162 Soit $f : x \longrightarrow \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrez que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrez que le prolongement continu de f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais pas sur $\mathbb{R}^+$.

---

6. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.
7. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)
7. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

1) Rappelons que l'intégrale $\int_a^b f$ existe dès que f est ***continue par morceaux*** sur le ***segment*** $\left[a,b\right]$. Commençons par remarquer que $t>0$ entraîne $x>0$. Puis, $\frac{1}{\ln t}$ étant continue sur $D=\left]0,1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$, f est définie dès que $\left[x,x^2\right]\subset D$. Le lecteur comprendra que ceci est vérifié pour $x\in D$. Par conséquent f est définie sur au moins D et n'est clairement pas définie en 0 et 1, donc finalement définie sur D.
Je rappelle le théorème qui dit que si f est continue par morceaux sur un intervalle I, que $a\in I$, alors l'application $x\longrightarrow\int_a^x f$ est continue et dérivable sur I de dérivée $f(x)$ (puisque c'est la primitive qui s'annule en a). En prenant ici $a=\frac{1}{2}\in\left]0,1\right[$ et $G:x\longrightarrow\int_{1/2}^x\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$, on sait G continue sur $\left]0,1\right[$. En remarquant, par l'utilisation de **Chasles**[8], que $f(x)=G(x^2)-G(x)$, on en déduit que f est ***continue*** sur $\left]0,1\right[$. Raisonnement identique avec $a=\frac{3}{2}$ sur $\left]1,+\infty\right[$. f est donc continue sur D.

f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ ssi elle admet des limites ***finies*** en 0 et 1.

En $x=0$, on utilise le théorème des accroissements finis : G est dérivable sur $\left[x,x^2\right]$, par conséquent il existe $x<c<x^2$ tel que $f(x)=G(x^2)-G(x)=(x^2-x)G'(c)=\dfrac{x^2-x}{\ln c}$. Un encadrement donne :

$$\frac{x^2-x}{2\ln x}=\frac{x^2-x}{\ln(x^2)}\leq f(x)\leq\frac{x^2-x}{\ln x}$$

Comme $\lim\limits_0\dfrac{x^2-x}{\ln x}=\dfrac{0}{-\infty}=0$, on en déduit $\lim_0 f=0$.
Cette méthode ne « *marche* » pas pour $x=1$, le lecteur vérifiera qu'on encadre par 2 limites différentes $\frac{1}{2}$ et 1. On va utilise la méthode du développement : On développe $\frac{1}{\ln t}$ au voisinage de 1 : on pose $u=t-1$ puis

$$\frac{1}{\ln t}=\frac{1}{\ln(1+u)}=\frac{1}{u-\frac{1}{2}u^2+o(u^2)}=\frac{1}{u}\,\frac{1}{1-\underbrace{\dfrac{1}{2}u+o(u)}_{\to 0}}=\frac{1}{u}\left(1+\frac{1}{2}u+o(u)\right)=\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}+o(1)$$

Comme lorsque $x\longrightarrow 1$, le segment $\left[x,x^2\right]$ est dans un voisinage de 1 aussi proche « *que l'on veut* » on ***peut remplacer*** la fonction par son développement à l'intérieur de l'intégrale :

$$f(x)=\int_x^{x^2}\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{2}+o(1)\right)\mathrm{d}t=\Big[\ln|t-1|\Big]_x^{x^2}+\frac{1}{2}(x^2-x)+\int_x^{x^2}o(1)\,\mathrm{d}t=\underbrace{\ln\left|\frac{x^2-1}{x-1}\right|}_{=\ln(x+1)\longrightarrow\ln 2}+\underbrace{\frac{1}{2}(x^2-x)}_{\longrightarrow 0}+k(x)$$

Montrons $\lim_1 k(x)=0$ et on aura prouvé $\lim_1 f(x)=\ln 2$. Par définition, pour t assez proche de 1, $|o(1)|<\varepsilon$. Donc pour x assez proche de 1, on peut écrire $|k(x)|\leq\int_x^{x^2}\varepsilon\,\mathrm{d}t=(x^2-x)\varepsilon<1\times\varepsilon$ puisque $x^2-x\longrightarrow 0$. Le résultat est donc acquis.

2) Je rappelle le résultat suivant, souvent appelé « *théorème du prolongement* » C^1 : si f est continue sur un intervalle I mais seulement C^1 sur $I-\{a\}$ ***et que*** $\lim_a f'(x)$ existe et est finie (et vaut ℓ) alors f est C^1 sur I (et on a $f'(a)=\ell$). On a aussi l'extension suivante : si $\lim_a f'(x)=\pm\infty$, alors f n'est ***pas dérivable*** en a. Si, par contre, la limite de f' n'existe pas en a, on ne peut pas conclure.

On a ici f continue sur $\mathbb{R}^+$ et C^1 sur $D=\mathbb{R}-\{0,1\}$ puisque $f(x)=G(x^2)-G(x)$ amène $f'(x)=2xG'(x^2)-G'(x)=\frac{2x}{\ln(x^2}-\frac{1}{\ln x}=\frac{x-1}{\ln x}$ qui est continue sur D. On a immédiatement $\lim_0 f'=0$ et par un équivalent simple en 1, $\lim_1 f'(x)=\lim_1\frac{x-1}{x-1}=1$. Par conséquent, f (prolongée à $\mathbb{R}^+$) est C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

8. **Michel Chasles** : mathématicien français (1793-1880). A introduit en géométrie les grandeurs orientées. Auteur d'un *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.*

Centrale PSI 2018 (limite de suites-intégrales) ✌

Enoncé 163 Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t/n)}{t^n + t^2 + 1}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n\sin(t/n)}{t^n + t^2 + 1}\,\mathrm{d}t$. Déterminez les limites de (I_n) et (J_n).

$\lim I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\cos(t/n)}{t^n + t^2 + 1}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$ résulte du théorème de **Lebesgue**[7] :

- ***Etude de la convergence simple de*** (f_n) **:**

  Pour tout $t \in \left]0, +\infty\right[$, $\frac{t}{n} \longrightarrow 0$ donc $\cos(\frac{t}{n}) \longrightarrow 1$. Par contre, la limite de t^n dépend de la position de t par rapport à 1 :

$$f_n(t) \longrightarrow f(t) \begin{cases} \frac{1}{t^2+1} & \text{si } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } t = 1 \\ \frac{1}{+\infty} = 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

- ***Domination :*** $\forall\, n \in \mathbb{N},\ |f_n(t)| \leq \dfrac{1}{0 + t^2 + 1}$ intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$.

On applique également le théorème de Lebesgue pour $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{n\sin(t/n)}{t^n + t^2 + 1}}_{g_n(t)}\,\mathrm{d}t$:

- ***Etude de la convergence simple de*** (g_n) **:**

  Pour tout $t \in \left]0, +\infty\right[$, on a $n\sin(\frac{t}{n}) \sim n\frac{t}{n} = t$. Par conséquent :

  - Pour $0 < t < 1$, $g_n(t) \sim \frac{t}{t^2+1} \longrightarrow \frac{t}{t^2+1}$.
  - Pour $t = 1$, $g_n(1) \sim \frac{1}{3} \longrightarrow \frac{1}{3}$.
  - Pour $t > 1$, $g_n(t) \sim \frac{t}{t^n} \longrightarrow 0$.

  La suite de fonctions (g_n) ***converge simplement*** sur $\left]0, +\infty\right[$ vers la fonction $g(t) = \begin{cases} \frac{t}{t^2+1} & \text{si } 0 < t < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } t = 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$.

- ***Domination :***

$$\left|g_n(t)\right| = \left|\frac{n\sin(t/n)}{t^n + t^2 + 1}\right| \leq \varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{n \times \frac{t}{n}}{0 + t^2 + 1} = \dfrac{t}{1+t^2} & \text{si } 0 < t < 1 \\ \dfrac{1}{3} & \text{si } t = 1 \\ \dfrac{n \times \frac{t}{n}}{t^3 + t^2 + 1} = \dfrac{t}{t^3 + t^2 + 1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

  On a appliqué $|\sin u| \leq |u|$ et $t^n \geq t^3$ pour $t > 1$ (et $n \geq 3$). On notera que $\frac{t}{t^2+1}$ n'est pas intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$ d'où la majoration en « *par morceaux* ». On n'oublie pas de conclure que φ est bien intégrable sur $\left]0, +\infty\right[$ car ***continue par morceaux*** sur $\left[0, +\infty\right[$ et $\sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$.

On conclut par $\lim J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g = \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$.

IMT PSI 2018 (intégrale de Frullani)

Enoncé 170 Soit $F : \lambda \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-\lambda x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

1) Déterminez le domaine de définition de F.

2) Montrez que F est de classe C^1 sur tout intervalle $\left[a, +\infty\right[$ et calculez F' puis F.

3) En déduire, pour $a, b > 0$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x$.

7. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

1) Afin de se retrouver en « *terrain connu* », on change le nom des variables : $F(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}}_{f(x,t)} \mathrm{d}t$

- $t \longrightarrow f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$, et ce ***pour tout*** $x \in \mathbb{R}$.
- ***Etude en 0 :*** $f(x,t) = \frac{(1-t+o(t)) - (1-xt+o(t))}{t} \sim_{t=0} \frac{(x-1)t}{t} = x-1$ et ce, ***pour tout*** $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que l'on peut prolonger en une fonction continue en $t=0$, d'où l'intégrabilité sur $]0,1]$..
- ***Etude en*** $+\infty$ ***:*** On rappelle $e^{at} = o_{+\infty}(e^{bt}) \iff a < b$. Par suite : $f(x,t) \sim_{t=+\infty} \begin{cases} \frac{e^{-t}}{t} & \text{si } x > 1 \\ \frac{-e^{-xt}}{t} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

  L'utilisation du critère $t^a g(t)$ amène l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$ pour $x > 1$ puisque $\lim_{+\infty} t^2 \frac{e^{-t}}{t} = 0$, pour $0 < x \leq 1$ pour la même raison et la non intégrabilité pour $x <= 0$ car $\lim_{+\infty} t^{1/2} \frac{-e^{-xt}}{t} = -\infty$.

Le domaine de définition « *correspond* » à $x > 0$, soit $\mathrm{Def} F = \mathbb{R}^{+*}$.

2) Appliquons le théorème C^1 d'une intégrale à paramètre sur $I =]0,+\infty[$ à F. D'abord on constate que F admet une dérivée partielle par rapport à x et ceci pour $x > 0$ et $t \in]0,+\infty[$: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{(-t) - e^{-xt}}{t} = e^{-xt}$.

- $\forall x \in I, x \longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux et ***intégrable*** sur $]0,+\infty[$ (Q1).
- $\forall x \in I, x \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- $\forall t \in]0,+\infty[, t \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.
- ***Domination :***

$$\forall x \in [a,b] \subset]0,+\infty[, \forall t \in]0,+\infty[, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|e^{-xt}\right| \leq e^{-at}$$

  Cette fonction est bien ***intégrable*** sur $]0,+\infty[$ ***car*** $a > 0$ (critère $t^2 g(t)$).

On peut alors écrire $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} = \left[\frac{e^{-xt}}{-x}\right]_{t=0}^{\emptyset+\infty} = \frac{1}{x}$ puis $F(x) = \ln|x| + cste$. On a immédiatement $F(1) = 0$, soit $F(x) = \ln x$.

3) Le changement $u = bx$ $\mathrm{d}u = b\mathrm{d}x$ bijectif et C^1 de $]0,+\infty[$ sur $]0,+\infty[$ amène

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u} - e^{-\frac{a}{b}u}}{u} \mathrm{d}u = F\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

CCP PSI 2018 (temps d'attente au guichet)

Enoncé 212 Trois individus A_1, A_2 et A_3 se présentent dans un bureau de poste comportant 2 guichets. Les individus A_1 et A_2 sont pris en charge dès leur arrivée, A_3 doit attendre que A_1 ou A_2 ait fini pour passer à son tour au guichet. Le temps passé au guichet par A_i est noté X_i $(1 \leq i \leq 3)$; on suppose que chaque X_i suit une loi géométrique de paramètre p. On note Y le temps d'attente de A_3 avant son passage au guichet.

1) Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminez $P(Y > k)$. Donnez la fonction de répartition de Y.

2) Soit Z le temps total passé par A_3 à la poste. Donnez la loi de Z.

3) Déterminez le temps moyen passé par A_3 à la poste.

1) X_i est le temps d'attente de A_i et A_3 attend que l'un des deux ait « *fini* », donc $Y = \min(X_1, X_2)$. Comme on a $\min(x,y) > k \iff x > k$ et $y > k$, il vient pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P(Y > k) = P\big((X_1 > k) \bigcap (X_2 > k)\big) \overset{(1)}{=} P(X_1 > k) \times P(X_2 > k) \overset{(2)}{=} (1-p)^k (1-p)^k = (1-p)^{2k}$$

- **(1)** Résulte de l'***indépendance*** de X_1 et X_2, temps passé au guichet des individus A_1 et A_2.
- **(2)** Comme $X_i \hookrightarrow \mathscr{G}(p)$, l'événement $(X_i > k)$ est l'événement $\{$avoir k échecs en k premiers essais$\}$. Par suite $P(X_i > k) = (1-p)^k$

2) Je vous laisse réfléchir au fait que $Z = Y + X_3$. On en déduit $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* + \mathbb{N}^* = [\![2 ; +\infty [\![$. Ensuite on écrit :

$$\begin{aligned}
\forall\, n \geq 2,\ P(Z=n) &\overset{(1)}{=} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1} \underbrace{(Y=k)\cap(X_3=n-k)}_{\mathbb{U}_k}\Big) \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n-1} P\big((Y=k)\cap(X_3=n-k)\big) \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{k=1}^{n-1} P(Y=k)\times P(X_3=n-k) \overset{(4)}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \big((1-p)^{2k-2}-(1-p)^{2k}\big)\times p(1-p)^{n-k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{n+k-3} - p\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{n+k-1} = p(1-p)^{n-2}\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} - p(1-p)^n\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1} \\
&= p(1-p)^{n-2}\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} - p(1-p)^n\frac{1-(1-p)^{n-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^{n-2}-(1-p)^{2n-3}-(1-p)^n+(1-p)^{2n-1}
\end{aligned}$$

- **(1)** Les limites du symbole union sont dues au fait que Y et X_3 étant à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on a à la fois $k \geq 1$ et $n-k \geq 1$.
- **(2)** Les événements U_k sont ***incompatibles*** entre eux, car si $Y = k$, on n'a pas $Y = k'$, soit $U_k \cap U_{k'} = \emptyset$.
- **(3)** Les variables aléatoires Y temps d'attente de A_3 et X_3 temps de passage de A_3 sont indépendantes.
- **(4)** On a $(y = k) = (Y > k-1) - (Y > k)$ et ***comme*** $(Y > k) \subset (Y > k-1)$, on en déduit $P(Y = k) = P(Y > k-1) - P(Y > k)$

3) Il faut comprendre que le temps moyen passé par A_3 à la poste est l'espérance $E(Z)$. Comme la varaible Z est discrète dénombrable, il faut normalement d'abord prouver la convergence absolue de $\sum_{n\geq 2} nP(Z=n)$. La valeur absolue du terme général de cette série se majore par 4 séries du type $\sum nx^n$ avec $0 < x < 1$ qui converge, d'après d'Alembert par exemple.

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(Z=n) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(1-p)^{n-2} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(1-p)^{2n-3} - \sum_{n=2}^{+\infty} n(1-p)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(1-p)^{2n-1} \\
&= \frac{1}{1-p}\sum_{n=2}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} - \frac{1}{1-p}\sum_{n=2}^{+\infty} n\big((1-p)^2\big)^{n-1} - (1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} + (1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} n\big((1-p)^2\big)^{n-1} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{1-p}\frac{1-p^2}{p^2} - \frac{1}{1-p}\frac{(p-1)^2(-p^2+2p+1)}{p^2((2-p)^2} - (1-p)\frac{1-p^2}{p^2} + (1-p)\frac{(p-1)^2(-p^2+2p+1)}{p^2((2-p)^2} \\
&= \cdots = \frac{3-p}{p(2-p)}
\end{aligned}$$

Le (1) résulte du calcul $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty}(x^n)' = \Big(\frac{1}{1-x} - 1 - x\Big)' = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$, la dérivation terme à termé étant justifiée sur]-1,1[, car $R = 1$.

Ensam PSI 2018 (trois enfants jouent à la balle)

Enoncé 214 Trois enfants A, B et C jouent à la balle :

- A envoie la balle à B avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une proba de $\frac{1}{4}$.
- B envoie la balle à A avec une probabilité de $\frac{3}{4}$ et à C avec une proba de $\frac{1}{4}$.
- C envoie toujours la balle à B.

On note a_n, b_n et c_n les probabilités que A, B ou C ait la balle à la n-ième étape.

1) Exprimez a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2) Trouvez une matrice M telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

3) Déterminez la limite de (a_b, b_n, c_n) quand $n \longrightarrow +\infty$ et montrez que cette limite est indépendante des conditions initiales. **detaille**

---

1) On note A_n (rp. B_n, C_n) l'événement « *A (rp B, C) possède la balle à l'étape n* ». Par définition, $a_n = P(A_n)$. On constate que (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements : $A_n \cup B_n \cup C_n = \Omega$ car ou A ou B ou C possède la balle et les événements sont incompatibles car, par exemple, si A possède la balle, alors B ne la possède pas. On écrit alors la formule des probabilités totales à A_{n+1} :

$$P(A_{n+1}) = \underbrace{P(A_{n+1}|A_n)}_{0} \times \underbrace{P(A_n)}_{a_n} + \underbrace{P(A_{n+1}|B_n)}_{\frac{3}{4}} \times \underbrace{P(B_n)}_{b_n} \underbrace{P(A_{n+1}|C_n)}_{0} \times \underbrace{P(C_n)}_{c_n}$$

On en tire $a_{n+1} = \frac{3}{4} b_n$. De même on trouve $b_{n+1} = \frac{3}{4} a_n + c_n$ et $c_{n+1} = \frac{1}{4} a_n + \frac{1}{4} b_n$.

2)

On a donc $U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ avec $M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) De la question précédente, on tire immédiatement $U_n = M^n U_0$. Il faut donc calculer M^n.

Je rappelle qu'une méthode classique est de diagonaliser (si M est diagonalisable) puis d'écrire $M^n = PD^nP^{-1}$. D^n est alors facile à calculer car c'est la matrice diagonale de ses coefficients à la puissance n. Ensuite, si $\lim D^n$ existe (je vous laisse réfléchir qu fait qu'elle n'existe que si les valeurs propres vérifient $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$). Ensuite $\lim M^n = P \lim D^n P^{-1}$, en ***utilisant la continuité*** de $M \longrightarrow PMP^{-1}$ car linéaire en dimension finie.

Une deuxième méthode pour calculer M^n est de trouver un polynôme annulateur (si possible, de degré le plus petit possible). On calcule ici (je ne mets pas les détails) $\chi(M) = \lambda^3 - \frac{13}{16}\lambda - \frac{3}{16} = (\lambda - 1)(\lambda + \frac{1}{4})(\lambda + \frac{3}{4})$. Un polynôme annulateur de M est donc $P(X) = (X - 1)(X + \frac{1}{4})(X + \frac{3}{4})$ (je vous laisse réfléchir au fait qu'il est le plus petit degré possible). Ensuite le théorème de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ amène $X^n = Q(X)P(X) + R(X) = Q(X)P(X) + a_n X^2 + b_n X + c_n$ (E). On en déduit (comme $P(M) = 0$), $M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I$. Le lecteur réfléchira au fait que les a_n, b_n, c_n (comme les coefficients de la matrice M^n sont des combinaisons linéaires des valeurs propres à la puissance n ; d'après la remarque précédente, on en déduit que $\lim a_n, \lim b_n, \lim c_n$ existent. On utilise (E) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1^n & = & a_n + b_n + c_n \\ (\frac{-1}{4})^n & = & \frac{1}{16} a_n - \frac{1}{4} b_n + c_n \\ (\frac{-3}{4})^n & = & \frac{9}{16} a_n - \frac{3}{4} b_n + c_n \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & \lim a_n + \lim b_n + \lim c_n \\ 0 & = & \frac{1}{16} \lim a_n - \frac{1}{4} \lim b_n + \lim c_n \\ 0 & = & \frac{9}{16} \lim a_n - \frac{3}{4} \lim b_n + \lim c_n \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \lim a_n & = & \frac{12}{35} \\ \lim b_n & = & \frac{16}{35} \\ \lim c_n & = & \frac{1}{5} \end{array} \right.$$

Le plus simple pour résoudre le système est d'utiliser la méthode du pivot de **Gauss**[9].

9. **Carl Friedrich Gauss** : allemand (1777-1855). Contribution fondamentales en ***Théorie des Nombres*** et ***Géométrie***.

Mines-Ponts PSI 2018 (probabilité matrice diagonalisable)

Enoncé 215 Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $P(Y=k)=P(Y=-k)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$ et que $|Y|$ suive une loi de Poisson. On pose $A=\begin{pmatrix}0 & Y & 1\\ Y & 0 & 1\\ Y & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1) Donnez la loi du rang de A.

2) Calculez la probabilité que A soit diagonalisable.

---

1) On constate déjà que $\operatorname{rg} A\neq 0$ car $A\neq 0$ puis $\operatorname{rg} A\geq 2$ car C_2 et C_3 sont visiblement non colinéaires. Si on pose la varaible aléatoire $Z=\operatorname{rg} A$, on a donc $Z(\Omega)=\{2,3\}$. On se rappelle alors que, mathématiquement, $\operatorname{rg} A=3 \iff \det A\neq 0$. Un calcul immédiat donne : $\det A = Y(Y+1)$. Par suite :

$$P(Z=2)=P\big((Y=0)\cup(Y=-1)\big)\overbrace{=}^{(2)}P(Y=0)+P(Y=-1)\overbrace{=}^{(3)}e^{-\lambda}+\frac{1}{2}e^{-\lambda}\lambda$$

- **(2)** Les événements $(Y=0)$ et $(Y=-1)$ sont clairement incompatibles.

$$P(Y=0)=P(|Y|=0)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}=e^{-\lambda}$$
$$P(Y=1)=\frac{1}{2}\Big(P(Y=1)+P(Y=-1)\Big)=\frac{1}{2}P\big((Y=1)\cup(Y=-1)\big)=\frac{1}{2}P(|Y|=1)=\frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1!}$$

Il est ensuite ***maladroit*** de calculer directement $P(Z=3)$ car on écrit $P(Z=3)=1-P(Z=2)=1-e^{-\lambda}(\lambda+\frac{1}{2})$.

2)

Le calcul du polynôme cacactéristique de A donne immédiatement $\chi_A=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-Y-Y^2)$. On calcule le discriminant : $\Delta=1+4Y+4Y^2=(1+2Y)^2>0$ car $Y(\Omega)=\mathbb{Z}$ donc les racines sont ***distinctes*** $-Y$ et $Y+1$. On doit ensuite regarder si la dimension de l'espace propre de chaque valeur propre est égal à sa multiplicité. ***Mais attention*** au piège, on ***pourrait avoir*** une multiplicité douvle si $-Y=-1$ ou $Y+1=-1$, soit $Y=1,-2$.

- $Y\neq 1,-2$. Les 3 valeurs propres sont distinctes (donc de multiplicité 1) soit A est diagonalisable.
- $Y=1$. -1 est de multiplicité 2. Il est ***maladroit*** de calculer l'espace propre : on fait un calcul de rang car $\dim\operatorname{Ker}(A+I)=2 \iff \operatorname{rg}(A+I)=1$: $A+I=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. C'est clair !
- $Y=-2$ $\operatorname{rg}(A+I)=\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-2&1&1\\-2&1&1\end{pmatrix}=2$. A n'est pas diagonalisable.

$$P(A \text{ diagonalisable})=P(Y\neq -2)=1-P(Y=2)=1-\frac{1}{2}P(|Y|=2)=1-\frac{1}{2}e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2}$$