CCP PSI 2017 (matrice $n\times n$ et polynôme caractéristique)

ENONCÉ 2 Soit $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ avec $a_2\neq 0$. On définit $A_n=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ a_2 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_n & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$.

1) On note $\chi_n=\det(XI_n-A_n)$. Calculez χ_2 et χ_3.

2) Montrez que χ_n est divisible par X^{n-2}.

3) Montrez que $\chi_n=X^{n-2}(X^2-a_1X-B)$ avec $B=\sum\limits_{k=2}^{n}a_k^2$.

4) On suppose $B=0$. La matrice A_n est-elle diagonalisable?

5) On suppose $B\neq 0$. Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que A_n soit diagonalisable.

---

1) On calcule trivialement la règle de Sarrus pour l'ordre 3 :

$$\chi_2=\begin{vmatrix} X-a_1 & -a_2\\ -a_2 & X\end{vmatrix}=X^2-a_1-a_2^2\qquad \chi_3=\begin{vmatrix} X-a_1 & -a_2 & -a_3\\ -a_2 & X & 0\\ -a_3 & 0 & X\end{vmatrix}=\dots=X^3-a_1X^2-(a_2^2+a_3^2)X$$

2) Comme $a_2\neq 0$, on peut écrire pour toute colonne C_k avec $k\geq 3$:

$$C_k=(a_k,0,\dots,0)=\frac{a_k}{a_2}(a_2,0,\dots,0)=\frac{a_k}{a_2}C_2$$

Par conséquent $\operatorname{rg}A=\operatorname{rg}(C_1,C_2,\dots,C_n)=\operatorname{rg}(C_1,C_2)=2$ car C_1 et C_2 sont visiblement non colinéaires (à cause de $a_2\neq 0$). Il suit $\dim\operatorname{Ker}A=n-2$ et donc la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique vaut $\mu(0)\geq n-2$. Or par définition, $X^{\mu(0)}\ /\ \chi_n$. Il suit $X^{n-2}\ /\ \chi_n$

3) Montrons par récurrence sur $n\geq 2$, $\mathscr{P}(n):\chi_n=X^{n-2}(X^2-a_1X-\sum\limits_{k=2}^{n}a_k^2)$:

- $\mathscr{P}(2)$ vrai : $\chi_2=X^2-a_1-a_2^2=X^{2-2}(X^2-a_1X-\sum_{k=2}^{2}a_k^2)$
- $\mathscr{P}(3)$ vrai : $\chi_3=X^3-a_1X^2-(a_2^2+a_3^2)X=X^{3-2}(X^2-a_1X-\sum_{k=2}^{3}a_k^2)$
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vrai. En développant χ_{n+1} suivant la dernière colonne et le deuxième déterminant suivant la dernière ligne (on rappelle que le signe devant le coeff est $(-1)^{i+j}$ où i (rp j) est l'indice de ligne (rp de colonne) du coefficient :

$$\chi_{n+1}=\begin{vmatrix} X-a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n+1}\\ -a_2 & X & 0 & \dots & 0\\ -a_3 & 0 & X & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ a_n & 0 & \dots & 0 & X\end{vmatrix}=(-1)^{n+1+1}(-a_{n+1})\begin{vmatrix} -a_2 & X & 0 & \dots & 0\\ -a_3 & 0 & X & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ -a_n & \vdots & & 0 & X\\ -a_{n+1} & 0 & \dots & & 0\end{vmatrix}+X\chi_n$$

$$=(-1)^{n+3}a_{n+1}\Big((-1)^{n+1}(-a_{n+1})X^{n-1}\Big)+X\Big(X^{n-2}(X^2-a_1X-\sum_{k=2}^{n}a_k^2)\Big)$$

$$=X^{n-1}\Big(-a_{n+1}^2+X^2-a_1X-\sum_{k=2}^{n}a_k^2\Big)=X^{n+1-2}\Big(X^2-a_1X-\sum_{k=2}^{n+1}a_k^2\Big)$$

$\mathscr{P}(n+1)$ est donc vérifié.

4) Attention on est dans $\mathbb{C}$. La matrice est symétrique ***mais*** complexe, on ne peut donc rien en déduire. De même $B=0$ est une somme de carrés nulle mais de complexes, on ne peut donc rien en déduire non plus. Revenons au polynôme caractéristique : on a $\chi_n = X^{n-2}(X^2 - a_1X) = X^{n-1}(X - a_1)$. 0 est donc une valeur propre de multiplicité $n-1$ alors qu'on a déjà vu que la dimension de l'espace propre associé, cad $\operatorname{Ker} A$ est de dimension $n-2$. A n'est donc pas diagonalisable.

5) Si $B \neq 0$, remarquons que 0 n'est pas racine de $X^2 - a_1X - B$, par conséquent 0 est bien une valeur propre de multiplicité $n-2$ et on sait que son espace propre est de dimension 2. Ok pour cette valeur propre.
Etudions selon les racines de l'équation du second degré :

- $\Delta \neq 0$. L'équation $X^2 - a_1X - B$ admet donc deux racines distinctes, donc 2 racines de multiplicité 1 (et différentes de 0). On sait alors, que dans ce cas, l'espace propre est nécessairement de dimension 1. Par conséquent pour les 3 valeurs propres, la dimension de l'espace propre est égale à la multiplicité, donc A est diagonalisable.
- $\Delta = a_1^2 + 4B = 0$. Remarquons alors que comme $B \neq 0$, nécessairement $a_1 \neq 0$. On sait que la racine double, c'est-à-dire la valeur propre double vaut $\lambda = \frac{a_1}{2}$. A sera diagonalisable si la dimension de l'espace propre associé, cad $\operatorname{Ker}(\frac{a_1}{2}I - A)$ est 2. Regardons donc son rang :

$$\frac{a_1}{2}I - A = \begin{pmatrix} -a_1/2 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n+1} \\ -a_2 & a_1/2 & 0 & \dots & 0 \\ -a_3 & 0 & a_1/2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & a_1/2 \end{pmatrix}$$

  On voit immédiatement, comme $a_1 \neq 0$, que les colonnes $C_2, \dots, C_n)$ sont libres (par exemple par le côté triangulaire comme dans la méthode du pivot de Gauss), par conséquent $\operatorname{rg}(\frac{a_1}{2}I - A) \geq n-1$ et donc la dimension du noyau ne peut être égale à 2 : A n'est pas diagonalisable.

Conclusion : A est diagonalisable ssi $B \neq 0$ et $\Delta = a_1 + 4B = a_1^2 + 4\sum_{k=2}^{n} a_k^2 \neq 0$

CCP PSI 2017 (morphisme $M \to AM$)

ENONCÉ 17 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit f_A

1) Montrez que f_A est un endomorphisme

2) Montrez que si $A^2 = A$, alors f_A est un pr

3) Montrez que A est diagonalisable ssi f_A l

---

1) f_A est clairement linéaire (il faut savoir le dire) et endomorphisme résulte du fait que si A et M sont des matrices carrées réelles d'ordre n, alors AM en est aussi une.

2) f_A est un projecteur car $f_A^2 = f_A$ car :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f_A^2(M) = f_A(f_A(M)) = Af_A(M) = AAM = A^2M = AM = f_A(M)$$

3) Question un peu difficile sans autre indication. On peut commencer par remarquer que de même que plus haut, on a montré que $f_A^2(M) = A^2M$ (là on ne se servait pas de l'hypothèse A matrice de projection), par récurrence immédiate on montrerait que $f_A^p(M) = A^pM$. Puis par combinaison linéaire, par exemple, $\alpha f_A^p(M) + \beta f_A^q(M) = \alpha A^pM + \beta A^qM = (\alpha A^p + \beta A^q)M$. Ensuite en remarquant que un polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ n'est qu'une combinaison linéaire des X^k, on a :

$$P(f_A)(M) = a_0Id(M) + a_1f_A(M) + \dots + a_pf_A^p(M) = a_0IM + a_1AM + \dots + a_pA^pM = P(A)M$$

Ne pas oublier que pour montrer diagonalisable, on n'a pas que le théorème qui consiste à calculer les valeurs propres et à regarder si chaque multiplicité correspond à la dimension de l'espace propre. On a aussi le très important théorème : A est diagonalisable ssi A annule un polynôme ***scindé à racines simples***. Démontrons maintenant la question :

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons A diagonalisable. Alors il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(A)=0$. On en déduit pour toute matrice M, $P(f_A)(M)=P(A)M=0$, soit $P(f_A)$ est l'endomorphisme nul. Comme P est scindé à racines simples, il suit que f_A est diagonalisable.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons f_A diagonalisable. Alors il existe un polynôme Q scindé à racines simples tel que $Q(f_A)=0$. Donc pour ***toute*** matrice M, $Q(f_A)M=Q(A)M=0$. Attention à ne pas utiliser un argument du genre : on prend $M\neq 0$, donc $Q(A)=0$ car cet argument est faux dans les matrices : je rappelle qu'il existe des matrices A,B ***non nulles*** telles que $AB=0$ (des matrices nilpotentes par exemple). Le plus simple ici est deprendre $M=I$. Il suit alors $Q(A)I=Q(A)=0$. Comme Q est scindé à racines simples, ceci prouve A diagonalisable.

Mines-Ponts 2017 (matrice nilpotente antisymétrique)

Enoncé 52 Trouvez toutes les matrices réelles nilpotentes antisymétriques.

Montrons d'abord que la seule matrice symétrique réelle S nilpotente est la matrice nulle. on a donc $S^n=0$, cad S annule le polynôme X^n. On en déduit que $\operatorname{Sp} S\subset\{0\}$ puisque 0 est la seule racine de ce polynôme annulateur. S étant symétrique réelle, elle est diagonalisable : $S=PDP^{-1}$. Or D est diagonale avec nécessairement des 0 sur la diagonale, donc $D=0$ puis $S=POP^{-1}=0$.

Reprenons l'exercice : soit A une matrice antisymétrique réelle nilpotente, cad $A^n=0$. Commençons par remarquer que si A est antisymétrique, alors A^2 est symétrique. En effet : ${}^t(A^2)={}^tA\,{}^tA=(-A)(-A)=A^2$. Elle est aussi nilpotente puisque $(A^2)^n=A^{2n}=(A^n)^2=0$. On en déduit $A^2=0$. Par contre ***Attention!*** L'implication $A^2=\Longrightarrow\ A=0$ est ***fausse***! On peut se rappeler que l'assertion $A^2=0$ signifie A matrice nilpotente (d'indice 2), donc elle n'a aucune raison d'être nulle. Par contre $A^2=A\times A=-{}^tAA$ et l'implication ${}^tAA=0\implies A=0$ est elle vraie! Je vous donne deux méthodes.

Méthode 1 : On se rappelle que si X et Y sont des matrices-colonnes (cad $\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), alors ${}^tXY$ est (l'expression matricielle du) le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, puisqu'égal à $\sum_{i=1}^n x_iy_i$. ${}^tXX$ désigne alors la norme euclidienne canonique. Revenons à l'exo, pour tout $X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$ {}^tAA=0\implies {}^tX\,{}^tAAX={}^t(AX)AX=\|AX\|_{can}^2=0\implies AX=0 $$

Comme $AX=0$ ***pour tout*** X, on en déduit $A=0$

Méthode 2 : On calcule les coefficients de ${}^tAA$ par la formule-produit :

$$ \forall\,1\leq,i,j\leq n,\ \left[{}^tAA\right]_{ij}=\sum_{k=1}^n[{}^tA]_{ik}A_{kj}=\sum_{k=1}^n A_{ki}A_{kj}\implies\left[{}^tAA\right]_{ii}=\sum_{k=1}^n A_{ki}^2 $$

L'hypothèse nous amène $\sum_{k=1}^n A_{ki}^2=0$ et comme ce sont des réels, on en déduit $A_{ki}=0$ et ceci ***pour tous*** i,k. Il vient alors $A=0$.

Navale 2017 - TPE PSI 2009 (endomorphisme $(u(x)|x)=0$)

Enoncé 58 Soit $u\in\mathscr{L}(E)$, $E=\mathbb{R}$-ev euclidien tel que $\forall\,x\in E, (u(x)|x)=0$

1) Montrez $\forall\,x,y\in E\quad (u(x)|y)=-(x|u(y))$ (pas en 2017)

2) Etablir $\operatorname{Ker}u$ et $\operatorname{Im}u$ supplémentaires orthogonaux puis $\operatorname{rg}u$ pair.

1) Soient $x, y \in E$. L'hypothèse permet d'écrire $(u(x+y)|x+y) = 0$. De la bilinéarité de $(x, y) \to (x|y)$ et de la linéarité de u il résulte :

$$(u(x+y)|x+y) = \underbrace{(u(x)|x)}_{0} + (u(x)|y) + (u(y)|x) + \underbrace{(u(y)|y)}_{0} = 0 \implies (u(x)|y) = -(x|u(y))$$

Remarque : On dit que l'endomorphisme est antisymétrique et on démontre que sa matrice (dans une bon) est antisymétrique, cad ${}^tM = -M$.

2) On a $\operatorname{Ker} u \perp \operatorname{Im} u$ car $\forall\, x \in \operatorname{Ker} u, y \in \operatorname{Im} u$, donc $y = u(z)$. la question précédente amène :

$$(x|y) = (x|u(z) = -(u(x)|z) = -(0|z) = 0$$

Cours : comme les 2 espaces sont orthogonaux, il sont en somme directe : $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$. Le théorème du rang $\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = \dim E$ amène immédiatement qu'ils sont supplémentaires cad $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$.

Remarque : Si 2 espaces sont supplémentaires et orthogonaux, cad $E = F \oplus G$ et $F \perp G$ alors on a $F = G^{\perp}$ ce qui est équivalent à $G = F^{\perp}$.

On va d'abord montrer, le résultat « *classique* » pour les matrices / endomorphismes antisymétriques : la ***seule*** valeur propre ***réelle possible*** est 0. Soit λ une valeur propre de u. Il existe donc $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$, ce qui amène $(u(x)|x) = \lambda(x|x) = \lambda\|x\|^2 = 0 \implies \lambda = 0$ car $\|x\| \neq 0$. On a donc démontré $\operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} u \subset \{0\}$. ***Attention!*** réciproquement, 0 ***peut*** ne pas être valeur propre. Le lecteur pourra considérer la matrice antisymétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est $\chi_A = X^2 + 1$.

$\operatorname{Im} u$ est (toujours) stable par u car $u(\operatorname{Im} u) \subset \operatorname{Im} u$ (l'étudiant réfléchira au fait que pour tout sev F, on a nécessairement $u(F) \subset \operatorname{Im} u$). Selon le cours u induit donc, par co-restriction, un endomorphisme u' de $\operatorname{Im} u$ qui donc vérifie $u'(x) = u(x)$ puisque c'est une restriction. On rappelle qu'en raisonnant dans $\mathbb{C}$, le nombre de valeurs propres complexes, comptées avec la multiplicité, est égale à n, cad la dimension de l'espace. Ici, nous allons montrer que les valeurs propres de u' sont complexes, donc 2 à 2 conjuguées (car on est dans une ev réel) donc $\operatorname{Im} u$ est de dimension paire donc $\operatorname{rg} u$ pair.
Comme u' est une co-restriction de u, u' est aussi antisymétrique donc la seule valeur propre ***réelle*** possible est 0. 0 est valeur propre de u' ssi $\operatorname{Ker} u' \neq \{0\}$. u' étant un erestriction de u à $\operatorname{Im} u$, on a $\operatorname{Ker} u'$ est une « *restriction* » de $\operatorname{Ker} u$ à $\operatorname{Im} u$, autrement dit ou mieux dit, $\operatorname{Ker} u' = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$. Comme $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$, il vient que $\operatorname{Ker} u' = \{0\}$, donc les valeurs propres de u' sont toutes (vraies) complexes.

CCP PSI 2017 (série à terme intégral)

ENONCÉ 77 On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1) Montrez que la suite (a_n) est bien définie.
2) Déterminez la limite de cette suite.
3) Calculez $a_n + a_{n+1}$ et en déduire un équivalent de a_n (utilisez des encadrements).
4) Prouvez la convergence et calculez la somme des séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

---

1) a_n est bien définie car $f_n : t \longrightarrow \frac{-t^n \ln t}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ car :

- f_n est continue sur $]0,1]$.

- $f_n(t) \sim_0 t^n \ln t$. Et par application du critère $t^a f(t)$ avec ***ici*** $a = \frac{1}{2} < 1$, comme $\lim_{t\to 0} \sqrt{t} f_n(t) = \lim_0 t^{n+1/2} \ln t = 0$ (croissances comparées), f_n est donc intégrable sur $\left]0,1\right]$ (***remarque :*** comme $\lim_0 f_n(t) = 0$, on pouvait aussi dire que f_n se prolonge en une fonction continue sur $\left[0,1\right]$)

2) On vous demande une limite d'intégrale « *avec du n* », il faut tout de suite penser au théorème de **Lebesgue**[1]. Et si c'est une limite d'intégrale « *avec du x* », appliquer la caractérisation séquentielle (avec Lebesgue).

Par application du théorème de Lebesgue, on a $\lim a_n = \lim \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \lim f_n(t) = \int_0^1 0 = 0$ car :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***:***
  Pour $0 < t < 1$, $t^n \longrightarrow 0$ puis $f_n(t) \longrightarrow 0$. Pour $t = 1$, $f_n(1) = 0 \longrightarrow 0$. Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge simplement versd la fonction nulle sur $]0,1]$.
- ***Domination :***
  $$\forall\, 0 < t \leq 1,\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{-t^n \ln t}{1+t}\right| \leq \frac{-\ln t}{1+t} = \varphi(t)$$
  φ est bien ***intégrable*** sur $]0,1]$ par continuité et $\varphi(t) \sim_0 \ln t$ et $\ln t$ l'est (c'est du cours)

3)

$$a_n + a_{n+1} = \int_0^1 \frac{(t^n + t^{n+1})(-\ln t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 -t^n \ln t\,\mathrm{d}t = \left[-\ln t \frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 = \frac{1}{(n+1)^2}$$

On a utilisé l'ipp : $u = \ln t$ $v' = t^n$ $u' = \dfrac{1}{t}$ $v = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$
On demande d'utiliser des encadrements. En fait, c'est $a_n + a_{n+1}$ qu'il faut encadrer. Il faut remarquer que a_n est une suite décroissante puisque :

$$\forall\, 0 < t \leq 1,\ t^{n+1} \leq t^n \implies \frac{t^{n+1}(-\ln t)}{1+t} \leq \frac{t^n(-\ln t)}{1+t} \implies a_{n+1} = \int_0^1 \frac{t^{n+1}(-\ln t)}{1+t} \leq \int_0^1 \frac{t^n(-\ln t)}{1+t} = a_n$$

On en déduit : $2a_{n+1} \leq a_n + a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2a_n$. L'inégalité de droite donne $\frac{1}{2(n+1)^2} \leq a_n$ et l'inégalité de gauche, en changeant $n+1$ en n : $a_n \leq \frac{1}{2n^2}$. On divise alors cette double inégalité par $\frac{1}{n^2}$:

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leq a_n \leq \frac{1}{2n^2} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1/2(n+1)^2}{1/2n^2} \leq \frac{a_n}{1/2n^2} \leq 1$$

Du théorème d'encadrement, il résulte $\lim \dfrac{a_n}{1/2n^2} = 1$ ou encore $a_n \sim \dfrac{1}{2n^2}$

4) Ne pas oublier avant d'étudier une série de regarder le signe des termes qui change les critères à appliquer. On a vu $a_n \geq 0$ (à cause du $-$ car $\ln t \leq 0$ pour $0 < t \leq 1$). On en déduit immédiatement la convergence de la série $\sum a_n$ par le critère d'équivalent à une série de Riemann $a_n \sim \frac{1}{n^2}$.

Quant à $\sum (-1)^n a_n$ c'est bien une série alternée car $a_n \geq 0$ (Attention au piège toute série du type $\sum (-1)^n a_n$ n'est pas toujours alternée). On lui applique le CSSA, on a déjà vu $a_n \longrightarrow 0$ et $a_n \searrow$. Un autre critère marchait aussi : la série est absolument convergente donc convergente puisque $|(-1)^n a_n| = a_n \sim \frac{1}{n^2}$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^n(-\ln t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \overbrace{=}^{\textbf{(1)}} \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n(-\ln t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1+t} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1+t}\,\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

L'intégration terme à terme de (1) est licite car :

1. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

- Les f_n sont continues et intégrables sur $]0,1]$ (Q1)
- La suite de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ puisqu'on peut simplement calculer sa somme (pour une fois on n'applique pas de critères) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n(-\ln t)}{1+t} = \frac{-\ln t}{1+t} \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{-\ln t}{1+t}\frac{1}{1-t} = \varphi(t)$$

  et $\varphi(t)$ est bien une fonction continue par morcveaux sur $]0,1[$.
- La série $\sum \int_0^1 |f_n|$ converge puisque c'est la série $\sum a_n$.

Mines-Ponts PSI 2017 (rayon et somme de série entière)

Enoncé 82 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $f : z \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} z^n$.

1) Déterminez le rayon de convergence de cette série entière.

2) Soit $x \in [0,1[$. Donnez l'expression de $f(x)$.

---

1) On constate tout de suite que le critère d'**Alembert**[2] ne pourra pas s'appliquer car $\cos(n\theta)$ n'a pas de limite lorsque $n \to +\infty$. Il faut donc regarder de plus près pour quels z la série $\sum a_n z^n$ diverge ou converge (on peut même regarder pour quels z la suite $a_n z^n \longrightarrow 0$ ou pas, si vous savez bien votre cours). Ceci permet de trouver le rayon de convergence par encadrement. En fait ici il y a une autre astuce qu ipermet de simplifier un peu plus l'exo, c'est de se rappeler qu'une série entière et une série entière dérivée ont même rayon de convergence : donc $\sum \cos(n\theta)z^{n-1}$ a même rayon de convergence qui elle-même a même rayon de convergence que la série $\sum \cos(n\theta)z^n$ (multiplication d'un terme constant z). On procède ensuite par encadrement :

- On a $|\cos(n\theta)z^n| \leq |z|^n$. Or on sait que pour $|z| < 1$, la série géométrique $\sum z^n$ converge. apr critère de majoration d'une ***série positive*** (à cause de la valeur absolue), la série $\sum \cos(n\theta)z^n$ converge absolument donc converge. Il en résulte $R \geq 1$.
- On regarde pour $z = 1$ la série est la série $\sum \cos(n\theta)$ qui diverge grossièrement puisque l'on sait que $\cos(n\theta)$,ne tend pas vers 0. par conséquent, $R \leq 1$

Par encadrement, $R = 1$.

2) On rappelle que le log complexe « *n'existe pas* ». Par conséquent, il faut d'abord dériver avant de passer à l'exponentielle complexe : la série $\sum \frac{z^n}{n}$ est la série entière usuelle $-\ln(1-z)$ mais on n'a pas le droit (dans votre programme)de prendre z complexe pour la formule avec le log. Le fait de dériver va faire disparaître le n et ce problème. On rappelle qu'une série entière est dérivable terme à terme sur $]-R,R[$. On peut donc le faire ici pour $x \in [0,1[$, comme le demande l'énoncé :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\theta)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(e^{in\theta})x^{n-1} \overbrace{=}^{\textbf{(2)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \Re\left((e^{i\theta})^n x^{n-1}\right) \\
&\overbrace{=}^{\textbf{(3)}} \Re\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{i\theta})^n x^{n-1}\right) = \Re\left(e^{i\theta}\sum_{n=1}^{+\infty} (e^{i\theta}x)^{n-1}\right) = \Re\left(e^{i\theta}\sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\theta}x)^{n}\right) \\
&\overbrace{=}^{\textbf{(4)}} \Re\left(e^{i\theta}\frac{1}{1-e^{i\theta}x}\right) = \Re\left(\frac{e^{i\theta}(1-e^{-i\theta}x)}{|1-e^{i\theta}x|^2}\right) = \Re\left(\frac{e^{i\theta}-x}{(1-x\cos\theta)^2+(x\sin\theta)^2}\right) \\
&= \frac{\cos\theta - x}{x^2-2x\cos\theta+1}
\end{aligned}$$

- **(1)** x^{n-1} est réel, on peut donc l'intégrer à la partie réelle $\Re(\alpha z) = \alpha\Re(z)$. Faux si α complexe.

2. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).

- **(2)** C'est du cours sur les séries numériques. Si une série complexe converge, la partie réelle de la somme (infinie) est égale à la somme de lla partie réelle.
- **(3)** On a reconnu une série géométrique ***complète*** ($n=0$). Il est plus propre de vérifier qu'on est bien dans le cas de convergence : en effet $|e^{i\theta}x| = |x| < 1$.

On s'aperçoit que, par « *chance* », cette fraction rationnelle est presque de la forme $\frac{u'}{u}$. Attention à ne pas oublier la constante d'intégration (on prend la valeur en 0). On procède proprement comme suit :

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{\cos\theta - t}{t^2 - 2t\cos\theta + 1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\ln|t^2 - 2t\cos\theta + 1|\right]_0^x = -\frac{1}{2}\ln|x^2 - 2x\cos\theta + 1|$$

TPE PSI 2017 (suite de fonctions) ✌

Enoncé 90 On définit pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

1) Etudiez la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

2) A-t-on convergence uniforme ?

3) Prouvez la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$ lorsque $a > 0$.

---

1) On peut commencer par remarquer que la fraction est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour $x \neq 0$, on a $f_n(x) \sim_{n\to+\infty} \dfrac{nx}{n^2x^2} = \dfrac{1}{nx} \longrightarrow 0$. Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$. Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

2) Je rappelle que pour étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions (f_n) vers f ***sur*** un intervalle I, on regarde si le sup $\sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0. Pour prouver ceci, on regarde si le sup est « *calculable* » par une étude des variations, sinon on essaye comme d'habitude des majorations - minorations.
Ici, on commence par remarquer que $f_n(x) - f(x) = f_n(x)$ puis que f_n est impaire. Comme on demande d'étudier la convergence uniforme sans préciser on utilise l'intervalle donné dans la définition de la fonction qui est $\mathbb{R}$ et par imparité ramène à $\mathbb{R}^+$. On calcule :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^2x(nx)}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

x	0		$\frac{1}{n}$		$+\infty$
f_n'		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Prêter attention au fait que l'on cherche le sup de la valeur absolue donc dans certains cas, ce peut être en bas du tableau ! Ici, on a immédiatement que $\sup_{\mathbb{R}}|f_n(x)| = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0. par conséquent, la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

3) Il faut positionner $a > 0$ dans le tableau de variations donc par rapport à $\frac{1}{n}$. On remarque que $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, donc, ***à partir d'un certain rang***, $\frac{1}{n} < a$ (car $a > 0$). Par suite, le tableau montre que $\sup_{x\in[a,+\infty[}|f_n(x)| = f_n(a) \longrightarrow 0$. Il y a bien convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

Ensam PSI 2017 (intégrale et développement en série)

ENONCÉ 100

1) Justifiez l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

2) Montrez l'égalité $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)^2}$.

3) Sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, donnez la valeur de I.

---

1) L'existence (cad la convergence) de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \underbrace{\ln(x)\ln(1-x)}_{f(x)}\,\mathrm{d}x$ résulte de :

- La fonction f est continue sur $]0,1[$.
- ***Etude en 0 :***
  $f(x) \sim_0 -x\ln x$. Ici il y a 2 façons de s'y prendre : ***ou*** on applique le critère $x^a f(x)$ en 0 avec $a = \frac{1}{2} < 1$ et donc $\lim_0 \sqrt{x} f(x) = \lim_0 -x^{3/2}\ln x = 0$ par croissances comparées, ***ou*** après avoir remarqué que $\lim_0 -x\ln x = 0$, on dit que f se prolonge en une fonction continue en 0. Dans les 2 cas, on a f intégrable sur $]0,\frac{1}{2}]$.
- ***Etude en 1 :***
  Ici, même si ce n'est pas obligatoire, le plus simple est de faire un changement de variables qui ramène en 0 : $u = x-1$. On écrit ensuite : $f(x) = \ln(1+u)\ln(-u) \sim_0 u\ln(-u)$. Par une méthode analogue à la précédente, on en tire f intégrable sur $[\frac{1}{2},1[$.

2)

$$\int_0^1 \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_{]0,1[} \ln(x)\ln(1-x)\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{(1)} \int_0^1 \ln(x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-x^n}{n}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n(-\ln x)}{n}}_{f_n(x)}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{(2)} \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 \frac{x^n(-\ln x)}{n}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{(3)} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}$$

- **(1)** On a utilisé le développement en série entière $\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-x^n}{n}$ qui est licite pour $x \in [0,1[$ (mais pas $x = 1$!)
- **(2)** L'interversion des symboles résulte de l'application du théorème d'intégration terme à terme licirte car :
  - Les f_n sont bien continues par morceaux et intégrables sur $[0,1[$ (comme plus haut, l'intégrabilité en 0 peut résulter du critère $x^a f(x)$.
  - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers $\ln(x)\ln(1-x)$ qui est bien continue par morceaux sur $]0,1[$
  - La série numérique $\sum \displaystyle\int_0^1 |f_n|$ est convergente : en anticipant sur la suite de la question, on voit qu'on aura besoin de calculer l'intégrale, alors autant la calculer avant de montrer la convergence, ce sera plus facile!. On utilise une intégration par parties : $v' = x^n$ $u = \ln x$ $v = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ $u' = \dfrac{1}{x}$:

  $$\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

  Par conséquent la série $\sum \int_0^1 |f_n|$ vaut $\sum \frac{1}{n(n+1)^2}$ ce qui assure clairement la convergence.
- **(3)** On a utilisé le calcul de l'intégrale fait au (2).

3) On décompose en éléments simples. On trouve :

$$\frac{1}{n(n+1)^2}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n+1}+\frac{c}{(n+1)^2}=\frac{1}{n}+\frac{-1}{n+1}+\frac{-1}{(n+1)^2}$$

On calcule a et c par les méthodes usuelles : cad pour a, on multiplie par n et on prend ensuite la valeur $n=0$. Par compte pour b, cette méthode ne marche plus. Le plus simple est de prendre une valeur simple pour n, par exemple $n=1$, et de remplacer dans l'égalité.

Ensuite, on ***ne peut pas*** couper la somme en 3 et écrire $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{n+1}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{(n+1)^2}$ car les 2 sommes en $\frac{1}{n}$ divergent! Il faut procéder comme ceci en téléscopant les termes :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)^2}&=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)^2}=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{-1}{n+1}+\sum_{n=1}^{N}\frac{-1}{(n+1)^2}\right)\\&=\lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+\sum_{n=2}^{N+1}\frac{-1}{n}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{(n)^2}\right)=\lim_{N\to+\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{-1}{N+1}-\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n^2}\right)\\&=1-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=1-\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{1^2}\right)=2-\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

CCP PSI 2017 2012 (calcul d'intégrale avec partie entière)

Enoncé 102 On admet $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

1) Décomposez en éléments simples $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2}$. (2012 : pas cette question)

2) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 xE\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\mathrm{d}x$.

---

1) Sans besoin de donner le détail, on trouve : $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$

2) On utilise une propriété de la partie entière :

$$k\leq\frac{1}{x}<k+1\iff E\left(\frac{1}{x}\right)=k\iff\frac{1}{k+1}<x\leq\frac{1}{k}$$

Ensuite, on utilise la propriété de **Chasles**[3] : $[0,1]=[\frac{1}{2},1]\cup[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{4},\frac{1}{3}]\cup\ldots$

$$\begin{aligned}\int_0^1 xE\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{1/k+1}^{1/k}xE\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}\int_{1/k+1}^{1/k}xk\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{+\infty}k\int_{1/k+1}^{1/k}x\,\mathrm{d}x\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}k\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/k+1}^{1/k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k}{2(k+1)^2}-\frac{1}{2k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2k+1}{2k(k+1)^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{1}{(k+1)^2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{1^2}\right)+\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k+1}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{1^2}\right)+\frac{1}{2}\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{1}-\frac{1}{N+1}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

3. **Michel Chasles** : mathématicien français (1793-1880). A introduit en géométrie les grandeurs orientées. Auteur d'un *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.*

IMT PSI 2017 - CCEM PSI 2015 - CCP PSI 2012 (intégrale et développement en série)

ENONCÉ 106

1) Montrez l'existence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sinh x}\,\mathrm{d}x$.

2) Montrez $I = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$ en utilisant le développement en série de $\dfrac{1}{1-u}$. (Indication que en 2017).

3) Calculez I (on donne $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$). (Question que en 2017).

---

1) L'existence de I résulte de l'intégrabilité de $f : x \to \dfrac{x}{\sinh x}$ sur $]0,+\infty[$ car :

- f ext continue sur $]0,+\infty[$.
- $f(x) \sim_0 \dfrac{x}{x} = 1$. La fonction f se prolonge donc en une fonction continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur $]0,1]$.
- $f(x) = \dfrac{2x}{e^x - e^{-x}} \sim_{+\infty} \dfrac{2x}{e^x} = 2xe^{-x}$.
  L'intégrabilité de f sur $[1,+\infty[$ vient de l'application du critère $x^a f(x)$: $\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \lim_{+\infty} 2x^3 e^{-x} = 0$

2)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{e^x - e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} \frac{2xe^{-x}}{1-e^{-2x}}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\textbf{(1)}} \int_{]0,+\infty[} 2xe^{-x} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nx}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{2xe^{-(2n+1)x}}_{f_n(x)}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\textbf{(2)}} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\textbf{(3)}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}$$

- **(1)** Cette égalité résulte du développement en série usuel $\dfrac{1}{1-u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ car on a bien $|u| = |e^{-2x}| < 1$ pour $x \in]0,+\infty[$.
- **(2)** L'interversion des 2 symboles résulte de l'application du théorème d'intégration terme à terme :
  - Les f_n sont continues et intégrables sur $]0,+\infty[$ (critère $x^a f(x)$ en $+\infty$ comme plus haut).
  - La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction continue par morceaux $\frac{2x}{e^x - e^{-x}}$
  - La série $\sum \int_I |f_n| = \sum \int_0^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}$ converge bien : on peut d'ailleurs la calculer par une ipp. Je rappelle que sans justification (par exemple de la 2ième intégrale si on a bien compris), on se doit de calculer d'abord sur $[0,A]$. On pose $u = 2x$ $v' = e^{-(2n+1)x}$ $u' = 2$ $v = -\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}$:

  $$\int_0^A 2xe^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x = \left[-2x\frac{e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\right]_0^A + \frac{2}{2n+1}\int_0^A e^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x$$

  La limite lorsque $A \longrightarrow +\infty$ existe bien et on a donc pour finaliser :

  $$\int_0^{+\infty} 2xe^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\left[-\frac{\int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)x}}{2n+1}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{(2n+1)^2}$$

  On a bien la convergence de cette série comme dit plus haut.
- **(3)** Calcul des intégrales fait en (2)

3) L'énoncé semble présupposer que le candidat connait la fonction ζ, fonction « *dzeta* » de **Riemann**[4]. Ce n'est pas au programme. C'est la fonction $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ qui existe ssi $x > 1$, puisque justement c'est la série de Riemann.

4. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

L'énoncé vous rappelle donc $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. En coupant les parties paires et impaires on peut écrire :

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\Longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

On en déduit la valeur de l'intégrale I et je vous laisse remarquer que cette intégrale n'a pas été caclulé par une primitivation, donc $I=2\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{4}$

Ensam PSI 2017 (max de 2 vas géométriques)

Enoncé 127 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1) Pour $k\in\mathbb{N}$, trouvez une relation entre $P(X>k-1)$, $P(X>k)$ et $P(X=k)$.

2) En déduire l'égalité $\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)-nP(X>n)$.

3) On suppose que X admet une espérance. Montrez que la série de terme général $P(X>k)$ converge et que $nP(X>n)$ tend vers 0.

4) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $P(X>k)$ converge. Montrez que X admet une espérance.

5) Application : soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2 respectivement. On pose $Z=\max(X,Y)$. Montrez que Z admet une espérance et la calculer.

---

1) On a immédiatement la relation entre les événements $(X>k-1)-(X>k)=(X=k)$. On rappelle que $P(A-B)=P(A)-P(B)$ est faux en général, sauf si $B\subset A$. C'est le cas ici, $(X>k)\subset(X>k-1)$. Par conséquent, on peut passer aux probabilités :

$$P\big((X>k-1)-(X>k)\big)=P(X>k-1)-P(X>k)=P(X=k)$$

2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)&=\sum_{k=1}^{n}k(P(X>k-1)-P(X>k))=\sum_{k=1}^{n}kP(X>k-1)-\sum_{k=1}^{n}kP(X>k)\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)P(X>k)-\sum_{k=1}^{n}kP(X>k)=\sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)-nP(X>n)\end{aligned}$$

3) X (à valeurs dans $\mathbb{N}$) admet une espérance donc la série $\sum kP(X=k)$ converge. On écrit :

$$0\le nP(X>n)=n\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(X=k)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}nP(X=k)\le\sum_{k=n+1}^{+\infty}kP(X=k)$$

On reconnaît dans cette expression le reste de la série convergente $\sum kP(X=k)$. On en déduit qu'il tend vers 0 et par encadrement, la suite $nP(X>n)$ tend donc vers 0.

Ensuite, en reprenant la formule du 2, on écrit par différence $\sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)=\sum_{k=1}^{n}kP(X=k)+nP(X>n)$. Le membre de droite a une limite lorsque $n\longrightarrow+\infty$ qui est $\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X=k)+0=E(X)$. Il vient que les sommes partielles $\sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)$ ont une limite finie ce qui prouve que la série inhérente $\sum P(X>k)$ converge.

Remarque : En fait, si vous regardez bien, on a même démontré $E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X>k)$. ***Attention*** ceci n'est valable que pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

4) Je rappelle que pour prouver qu'une série converge, on utilise engénéral les critères. Mais si l'exo est plus délicat, il arrive que l'on soit obligé de revenir aux sommes partielles et de prouver qu'elles ont une limite finie. Il y a un cas particulier à bien connaître lorsque les séries sont positives, qui est qu'il suffit de prouver que les sommes partielles sont majorées (par une constante).

On reprend la formule du 2. Comme $nP(X>n)\geq 0$, on en déduit l'inégalité :

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} P(X>k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} P(X>k)$$

La deuxième inégalité provient aussi de la positivité (de $P(X>k)$). Les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)$ de la série ***positive*** $\sum kP(X=k)$ étant majorées, on en déduit que cette série est convergente, cad que X admet une espérance.

5) D'abord, comme cette question est une application, et que Z est bien une va à valeurs dans $\mathbb{N}$, on va plutôt utiliser $E(Z)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(Z>k)$. Il faut se rappeler que $\max(X,Y)>k \iff X>k$ ou $Y>k$ ce qui d'un point de vue événementiel s'écrit $(\max(X,Y)>k)=(X>k)\bigcup(Y>k)$. Profitons-en pour rappeler aussi que, à contrario, $\max(X,Y)\leq k \iff X\leq k$ et $Y\leq k$ ce qui s'écrit événementiellement s'écrit $(\max(X,Y)\leq k)=(X\leq k)\bigcap(Y\leq k)$. Un dernier rappel : pour une va géométrique X de paramètre p, l'événement $(X>k)$ est très intéressant : c'est l'événement (on a eu k échecs aux k premiers essais) et donc on en déduit immédiatement $P(X>k)=(1-p)^k$. A noter que l'on pourrait calculer $P(X>k)$ par $\sum_{i=k+1}^{+\infty} P(X=i)$ mais c'est plus maladroit.

$$\begin{aligned}\sum P(Z>k) &= \sum P(\max(X,Y)>k) = \sum P((X>k)\cup(Y>k))\\ &= \sum P(X>k)+P(Y>k)-P((X>k)\cap(Y>k))\\ &= \sum (1-p_1)^k+(1-p_2)^k-(1-p_1)^k(1-p_2)^k\end{aligned}$$

On vient d'utiliser l'indépendance de X et Y. Cette série est ***absolument convergente*** puisque la somme de 3 séries géométriques absolument convergentes car $|1-p_1|,|1-p_2|,|(1-p_1)(1-p_2)|<1$. On en déduit que Z admet une espérance puis :

$$E(Z)=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p_1)^k+(1-p_2)^k-(1-p_1)^k(1-p_2)^k=\frac{1}{1-(1-p_1)}+\frac{1}{1-(1-p_2)}-\frac{1}{1-(1-p_1)(1-p_2)}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1+p_2-p_1p_2}$$

CCP IMT 2017 PSI 2015 (loi conjointe X de Poisson et Y Binomiale)

Enoncé 131 Deux va réelles X et Y suivent respectivement une lois de Poisson de paramètre λ et une loi binomiale de paramètres n et p à condition que $X=n$.

1) Déterminez la loi conjointe de (X,Y). En déduire la loi de Y.

2) Déterminez $Z=X-Y$. Les va X et Y sont-elles indépendantes ? (seulement CCP).

---

1) Par définition des lois de **Poisson** [5] et binomiale :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ P(X=n)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \qquad \forall\, 0\leq k\leq n,\ P\big((Y=k)|(X=n)\big)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

On peut considérer que pour $k>n, P((Y=k)|(X=n))=0$. On a $(X,Y)(\Omega)=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ et par utilisation des probabilités

5. **Siméon Poisson** : mathématicien et physicien français (1781-1840)

conditionnelles :

$$\forall\, n,k \in \mathbb{N},\ P(X=n,Y=k) = P((X=n)\cap(Y=k)) = P((Y=k)|(X=n))\times P(X=n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \quad \textbf{\textit{pour}}\ k \le n$$

Si $k > n, P(X=n, Y=k) = 0$. Par application de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\big((X=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((Y=k)\cap(X=n)) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}p^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{n!}{k!(n-k)!}(1-p)^{n-k}\frac{\lambda^n}{n!}\\
&= e^{-\lambda}\frac{p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\lambda^n = e^{-\lambda}\frac{p^k\lambda^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}(1-p)^{n-k}\lambda^{n-k}\\
&= e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{(n-k)!}\big((1-p)\lambda\big)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{(1-p)\lambda} = e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}
\end{aligned}$$

On reconnaît la loi de Poisson de paramètre $p\lambda$, $Y \hookrightarrow \mathscr{P}\big(p\lambda\big)$

2) Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on obtient $Z(\Omega) = (X-Y)(\Omega) = \mathbb{Z}$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a « *événementiellement* » l'égalité : $(Z = X - Y = n) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(X = n+k)\cap(Y=k)$. En regardant de plus près, des lois de Poisson, il résulte $n+k \ge 0$ et $k \ge 0$, ce qui amène à $k \ge \max(-n,0)$ en n'oubliant pas que $n \in \mathbb{Z}$. Finalement :

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\quad (Z=n) = \bigcup_{k=\max(-n,0)}^{+\infty}\underbrace{(X=n+k)\cap(Y=k)}_{O_k}$$

Les événements O_k étant clairement incompatibles (car si $Y = k$, on n'a pas $Y = k'$!), on peut écrire pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P(Z=n) &= \sum_{k=\max(-n,0)}^{+\infty} P((X=n+k)\cap(Y=k)) \overbrace{=}^{(1)} \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=n+k)\cap(Y=k))\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k}{k}p^k(1-p)^n e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n+k}}{(n+k)!} = e^{-\lambda}(1-p)^n\lambda^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(n+k)!}{n!k!}p^k\frac{\lambda^k}{(n+k)!}\\
&e^{-\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^n}{n!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}p^k\lambda^k = e^{-\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^n}{n!}e^{p\lambda} = e^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^n}{n!}
\end{aligned}$$

- **(1)** Si $n < 0$, on a $k > n+k$ donc d'après les remarques précédentes $P((X=n+k)\cap(Y=k)) = 0$ et par sommation $P(Z=n) = 0$. Par contre, si $n \ge 0$, on a bien $k \le n+k$ mais on a d'autre part $\max(-n,0) = 0$.

On reconnaît une loi de Poisson de paramètre $(1-p)\lambda$. Rappelons que 2 va X et Y sont indépendantes ssi pour tous $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, alors $P((X=x)\cap(Y=y)) = P(X=x)\times P(Y=y)$. Ici, on constate que si l'on prend $k > n$, on a $P((Y=k)\cap(X=n)) = 0$ alors que $P(Y=k) \neq 0$ et $P(X=n) \neq 0$ (puisque ce sont des lois de Poisson) et donc X et Y ne sont pas indépendantes.