# Annales PSI 2015

## Table des matières



# I – Algèbre

*ENSEA PSI 2015 (diagonalisabilité matrice 2x2 avec trigo)*

**Enoncé 1** Eléments propres de $\begin{pmatrix} 1+\theta\cos\frac{2}{\theta} & -\theta\sin\frac{2}{\theta} \\ -\theta\sin\frac{2}{\theta} & 1-\theta\cos\frac{2}{\theta}\end{pmatrix}$, avec $\theta \in \mathbb{R}^*$ ? Est-elle diagonalisable ?

***Méthode 1 :***

On calcule le polynôme caractéristique de $M$ :

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 - \theta\cos\frac{2}{\theta} & \theta\sin\frac{2}{\theta} \\ \theta\sin\frac{2}{\theta} & \lambda - 1 + \theta\cos\frac{2}{\theta}\end{vmatrix} = (\lambda - 1 - \theta\cos\frac{2}{\theta})(\lambda - 1 + \theta\cos\frac{2}{\theta}) - \theta^2\sin^2\frac{2}{\theta}$$

$$= (\lambda-1)^2 - \theta^2\cos^2\frac{2}{\theta} - \theta^2\sin^2\frac{2}{\theta} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - \theta^2$$

On retrouve pour une matrice $2\times 2$ la formule $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(M)\lambda + \det(M)$. Ici, $\Delta = 4\theta^2$ puis les deux valeurs propres sont $\lambda(\theta) = 1 \pm \theta$.

On calcule les vecteurs propres associés à $\lambda(\theta)$, cad l'espace propre $F(\lambda(\theta) = \operatorname{Ker}(\lambda(\theta)I - M)$ qui est une droite :

$$\lambda(\theta)I - M = \begin{vmatrix} \theta - \theta\cos\frac{2}{\theta} & \theta\sin\frac{2}{\theta} \\ \theta\sin\frac{2}{\theta} & \theta + \theta\cos\frac{2}{\theta} \end{vmatrix} = \theta \begin{vmatrix} 1 - \cos\frac{2}{\theta} & \sin\frac{2}{\theta} \\ \sin\frac{2}{\theta} & 1 + \cos\frac{2}{\theta} \end{vmatrix} = \theta \begin{vmatrix} 2\cos\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta} & 2\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta} \\ 2\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta} & 2\sin\frac{1}{\theta}\sin\frac{1}{\theta} \end{vmatrix}$$

Plutot que d'écrire le système, on remarque que les 2 colonnes s'écrivent :

$$C_1 = \cos\frac{1}{\theta}(\cos\frac{1}{\theta}, \sin\frac{1}{\theta}) \qquad C_2 = \sin\frac{1}{\theta}(\cos\frac{1}{\theta}, \sin\frac{1}{\theta}) \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\frac{1}{\theta}C_1 - \cos\frac{1}{\theta}C_2 = 0$$

Par suite, $\operatorname{Vect}(\sin\frac{1}{\theta}, -\cos\frac{1}{\theta}) \subset F(\lambda(\theta))$ et ppour des raisons de dimension, on a l'égalité $\operatorname{Vect}(\sin\frac{1}{\theta}, -\cos\frac{1}{\theta}) = F(\lambda(\theta))$.
La matrice étant ***symétrique réelle***, elle est ***diagonalisable*** et les espaces propres sont orthogonaux. On n 'a donc ***pas bseoin*** de calculer $F(\lambda(-\theta))$, car $F(\lambda(\theta)) \perp F(\lambda(-\theta))$ (et même, pour des raisons de dimension, $F(\lambda(-\theta)) = F(\lambda(\theta))^{\perp}$). Il suit donc $F(\lambda(-\theta)) = \operatorname{Vect}(\cos\frac{1}{\theta}, \sin\frac{1}{\theta})$

***Méthode 2 :***

Si on connait bien son cours, on se rappelle les 2 matrices-type des isométries (dans une BON) qui sont :
$R(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, rotation d'angle $t$ et $S(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$, symétrie orthogonale (par rapport à la droite d'angle $\frac{t}{2}$ dirigée par $(\cos t/2, \sin t/2)$, le savoir fait gagner du temps comme toujours). Il suffit de remarquer ***ici*** ensuite une petite « *ressemblance* » et d'analuser ***plus précisément*** : on a $M = I - \theta S\left(\frac{2}{\theta}\right)$.
On se rappelle aussi que pour une symétrie $S$ par rapport à $F$, parallèlement à $G$ ($F \oplus G = E$), 1 (rp. -1) est valeur propre associé à $F$ (rp. $G$). Comme $MX = IX - \theta SX = 1.X + \theta.SX$, que ***ici*** $\frac{t}{2} = \frac{1}{\theta}$, il suit que $1 + \theta \times 1 = 1 + \theta$ est valeur propre associée à la droite dirigée par $(\cos\frac{1}{\theta}, \sin\frac{1}{\theta})$ et $1 - \theta$ valeur propre associée à la droite orthogonale, cad la droite dirigée par $(-\sin\frac{1}{\theta}, \cos\frac{1}{\theta})$

---

*ENSAM PSI 2015 - Mines-Ponts PSI 2012 (endomorphisme de fonctions)* ✌

**Enoncé 2** Soient $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, ev des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. On définit $T$ qui à $f \in E$ associe $T(f) : x \in \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ tel que $T(f)(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ si $x > 0$, et tel que $T(f)(0) = f(0)$

**1 )** Montrez $T$ est un endomorphisme de $E$.

**2 )** Déterminez les éléments propres de $T$. $T$ est injectif? surjectif? (**Mines** : Déterminez $\operatorname{Ker} T$. Pas qu. surjective.)

---

**1 )** Pour tous scalaires réels $\alpha, \beta$ et toutes fonctions $f, g \in E$ :

$$T\Big(\alpha f + \beta g\Big)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x \big(\alpha f + \beta g\big)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t & \text{si} x > 0 \\ \big(\alpha f + \beta g\big)(0)\,\mathrm{d}t = \alpha f(0) + \beta g(0) & \text{si} x = 0 \end{cases}$$

$$= \left.\begin{cases} \alpha T(f)(x) + \beta T(g)(x) & \text{si} x > 0 \\ \alpha T(f)(0) + \beta T(g)(0) & \text{si} x = 0 \end{cases}\right\} = \Big(\alpha T(f) + \beta T(g)\Big)(x)$$

Voilà pour morphisme. Ne pas oublier ***endo***-morphisme, cad ici vérifier que $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Etant que l'on sait que $x \to \frac{1}{x}\int_0^x f$ est $C^1$ donc continu sur $\mathbb{R}^{+*}$, reste à montrer que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\int_0^x f = f(0)$. Il y a plusieurs façons de démontrer ceci : le plus simple est d'utiliser un dl en 0. La continuité de $f$ en 0 amène (équivaut en fait) l'existence du dl à l'ordre 0 : $f(x) = f(0) + o(1)$. Le ***théorème de primitivation d'un dl*** donne $\int_0^x f = 0 + xf(0) + o(x)$ puis $\frac{1}{x}\int_0^x f = f(0) + o(1)$ ce qui donne bien la limite recherchée

***Remarque*** : J'en profite pour rappeler que $f = o_a(1) \iff \lim_a f = 0$.

**2 )** On procède ici par Analyse-Réciproque :

***Analyse :*** Soit $\lambda$ une valeur propre de $T$, alors $T(f) = \lambda f$, d'où $f(0) = \lambda f(0)$. Pour $x > 0$, en rappelant que $x\int_0^x f$, primitive de$f$ qui s'annule en 0, a pour dérivée $f(x)$, il suit :

$$\lambda f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f \implies \lambda x f(x) = \int_0^x f \implies \lambda f(x) + \lambda x f'(x) = f(x) \implies \lambda x f'(x) + (\lambda - 1) f(x) = 0$$

Les solutions de cette équation différentielle sont, pour $\lambda \neq 0$, $y = C\exp(A(x))$ avec $A(x) = \int \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|^{1-\lambda/\lambda}$ , soit $f(x) = C|x|^{1-\lambda/\lambda}$. Pour $\lambda = 0$, on trouve la fonction nulle. Exclus. $f(0) = \lambda f(0)$ amène $\lambda = 1$ ou $f(0) = 0$.

Donc, si $\lambda \neq 1$, $f(0) = 0$ et la continuité amène que l'on ***doit avoir*** $\lim_{x\to 0} C|x|^{1-\lambda/\lambda} = 0$ d'où $\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$ ou encore $0 < \lambda < 1$.

***Réciproquement***, pour $\lambda \in \left]0, 1\right]$ , les seuls vecteurs propres possibles conviennent puisque, en posant $f_\lambda(x) = x^{1-\lambda/\lambda}$, on a bien des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$, vu la positivité de $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ (sinon ce serait $\mathbb{R}^{+*}$ !). on vérifie aussi pour $0 < \lambda < 1$ :

$$T\Big(f_\lambda\Big)(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x t^{1-\lambda/\lambda}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}x^{1-\lambda/\lambda+1}/\frac{1-\lambda}{\lambda} + 1 = \lambda x^{1-\lambda/\lambda}\lambda f_\lambda(x) & \text{si} x > 0 \\ 0 = \lambda 0 = \lambda f_\lambda(0) & \text{si} x = 0 \end{cases}$$

Donc une droite pour l'espace propre. Pour $\lambda = 1$, les $f_\lambda$ sont des constentes, le comportement est presque identique sauf en 0, où $T(f_\lambda)(0) = cste = 1 \times cste = 1 f_\lambda(0)$.

---

*CCP PSI 2015 (endomorphisme et produits scalaires)* ☜

**ENONCÉ 3**

Soit $E$ un espace euclidien, $a, b \in E$ non colinéaires et $u \in \mathscr{L}(E)$ défini pour tout $x \in E$ par $u(x) = (a|x)b + (b|x)a$

**1 )** Déterminez $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$.

**2 )** Polynôme caractéristique de $u$ ?

**3 )** Valeurs propres de $u$ ? Vecteurs propres associés ?

**4 )** $u$ symétrique ?

---

**1 )**

$$\boxed{x \in \operatorname{Ker} u} \iff u(x) = 0 \iff (a|x)b + (b|x)a = 0 \overbrace{\iff}^{(1)} (a|x) = 0 \text{ et } (b|x) = 0 \iff a \perp x \text{ et } b \perp x \iff \boxed{x \in \operatorname{Vect}(a,b)^\perp}$$

(1) provient de la liberté de la famille $(a, b)$ par hypothèse. On a donc $\boxed{\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(a,b)^\perp}$ qui est un ev de dimension $\dim E - \dim \operatorname{Vect}(a,b) = n-2$ ($\operatorname{Vect}(a,b)$ est un ***plan*** puisque $(a,b)$ libre) et par le théorème du rang, il vient $\dim \operatorname{Im} u = 2$. Comme $u(x)$ est une combinaison linéaire de $a$ et $b$, il vient immédiatement $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(a,b)$, et de l'égalité de dimension $\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Vect}(a,b)$, il suit l'égalité $\boxed{\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(a,b)}$.

***Remarque :*** Si $F$ est un sev engendré par une famille $(f_1, \ldots, f_n)$ (et à fortiori une base), on a $x \in F^\perp \iff \forall\, 1 \le i \le n,\ (x|f_i) = 0$. C'est du cours. Ceci nous donne aussi $\forall\, 1 \le i \le n,\ x \perp f_i \iff x \in \operatorname{Vect}(f_1, \ldots, f_n)^\perp$.

**2 )** De $\dim \operatorname{Ker} u = n-2$, il suit que 0 est valeur propre de $u$ de ***multiplicité au moins*** $n-2$ (rappel : si l'endomorphisme était ***diagonalisable***, on aurait pu dire tout de suite =). Donc il manque, dans $\mathbb{C}$, au plus deux valeurs propres. On va les trouver par « ***restriction*** » de l'endomorphisme $u$ à un plan stable bien choisi. Le plan $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(a,b)$ est ***stable*** par $u$ (cours : $\operatorname{Ker} P(u)$, $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par $u$). Il induit donc un ***endomorphisme*** $u'$ ***co-restreint*** à $P$ et comme $\chi_{u'} / \chi_u$, (cours), il nous donne 2 valeurs propres de $u$ ($P$ est de dimension 2) qui seront en fait les 2 valeurs propres manquantes. Pour écrire une matrice de $u'$, on prend la base la plus simple de $P$, la base $\mathscr{B} = (a,b)$. Le calcul immédiat par $u$ de l'image de ces 2 vecteurs et de leurs coordonnées amènent :

$$\operatorname{Mat}(u', \mathscr{B}) = B = \begin{pmatrix} (a|b) & \|b\|^2 \\ \|a\|^2 & (a|b) \end{pmatrix} \text{ puis } \chi_B(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - (a|b) & -\|b\|^2 \\ -\|a\|^2 & \lambda - (a|b) \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2(a|b)\lambda + (a|b)^2 - \|a\|^2\|b\|^2$$

On calcule $\Delta = 4(a|b)^2 - 4((a|b)^2 - \|a\|^2\|b\|^2) = 4\|a\|^2\|b\|^2$. les 2 valeurs propres de $B$ de $u'$ (donc de $u$) sont alors, après calcul usuel de racines d'un trinome les 2 nombres $(a|b) \pm \|a\|\|b\|$. Le polynôme caractéristique de $u$ est donc finalement :

$$\chi_u(\lambda) = \lambda^{n-2}\left(\lambda^2 - 2(a|b)\lambda + (a|b)^2 - \|a\|^2\|b\|^2\right) = \lambda^{n-2}\left(\lambda - (a|b) - \|a\|\|b\|\right)\left(\lambda - (a|b) + \|a\|\|b\|\right)$$

**3 )**

Les vecteurs propres associés à 0 sont tout l'espace propre déjà calculé $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(a, b)^{\perp}$. Pour calculer les vecteurs propres associés à $\lambda_\varepsilon = (a|b) + \varepsilon\|a\|\|b\|$, avec $\varepsilon \in \{-1, +1\}]$ (nécessairement une droite puisque de multiplicité 1), on reprend la matrice $B$. Rappelons $\varepsilon^2 = (\pm 1)^2 = 1$. On écrit le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varepsilon\|a\|\|b\|x - \|b\|^2 y & = & 0 \\ -\|a\|^2 x + \varepsilon\|a\|\|b\| y & = & 0 \end{array}\right. \overbrace{\iff}^{\textbf{(2)}} \varepsilon\|a\|\|b\|x - \|b\|^2 y = 0 \iff \operatorname{Ker}(B - \lambda_\varepsilon I_2) = \operatorname{Vect}\left(\|b\|, \varepsilon\|a\|\right)$$

(2) : les 2 lignes sont colinéaires (comme on pouvait s'en douter vu que l'espace propre est une droite), le facteur de colinéarité est $-\varepsilon\frac{\|a\|}{\|b\|}$ . ***Ne pas oublier*** de ***revenir*** à la base $(a, b)$ pour exprimer les vecteur propres : l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_\varepsilon$ (pour $\varepsilon = \pm 1$) est la ***droite*** dirigée par $\|b\|a + \varepsilon\|a\|b$.

***Remarque :*** On vient de démontrer $u$ diagonalisable aussi, puisque pour les 3 valeurs propres, la multiplicité correspond à la dimension.

**4 )** $u$ est un ***endomorphisme symétrique*** puisque pour tous $x, y \in E$, l'égalité $(u(x)|y) = (x|u(y))$ résulte de :

$$\left(u(x)\,\middle|\,y\right) = \left((a|x)b + (b|x)a\,\middle|\,y\right) \overbrace{=}^{\textbf{(3)}} (a|x)\left(b\,\middle|\,y\right) + (b|x)\left(a\,\middle|\,y\right) = (a|x)(b|y) + (b|x)(a|y)$$

$$\left(x\,\middle|\,u(y)\right) = \left(x\,\middle|\,(a|y)b + (b|y)a\right) \overbrace{=}^{\textbf{(4)}} (a|y)\left(x\,\middle|\,b\right) + (b|y)\left(x\,\middle|\,a\right) = (a|y)(b|x) + (b|y)(a|x)$$

(3) et (4) proviennent respectivement de la linéarité à gauche et à droite du produit scalaire, eux-mêmes découlant de la bilinéarité de l'application produit scalaire $(x, y) \longrightarrow (x|y)$.

***Rappel :*** Tout ***endomorphisme symétrique*** est diagonalisable dans une ***base orthonormée***.

*Telecom Sud Paris PSI 2015 (diagonalisabilité et rang 1)*

**Enoncé 20**

**1 )** Montrez que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1, il existe $U, V \in \mathbb{R}^n$ tels que $A = U\,{}^tV$.

**2 )** Montrez que $A$ est diagonalisable ssi sa trace est non nulle. Trouvez le polynôme minimal de $A$.

**1 )** Si $A$ est de rang 1, comme $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, \ldots, C_n)$, il suit que toutes les colonnes sont colinéaires entre elles ou, identiquement, colinéaires à un vecteur-colonne notée $U \in \mathbb{R}^n$. On a pour tout $1 \le j \le n$, $C_i = \alpha_j U$. Alors :

$$V = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \qquad U\,{}^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 u_1 & \ldots & \alpha_n u_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 u_n & \ldots & \alpha_n u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_n \end{pmatrix} = A$$

***Remarque :*** Notons que $U, V \neq 0$, sinon $A = 0$ et $\operatorname{rg} A = 0$

**2 )** $\Longrightarrow$ ***Hypothèse :*** $A$ est ***diagonalisable***, alors comme par le théorème du rang, $\dim\ \operatorname{Ker} A = n-1$, il vient que la ***multiplicité*** de 0 vaut $n-1$. Il manque une autre valeur propre $\lambda$ qui ne peut être 0 (sinon multiplicité $n$). La trace, sommme des $n$ valeurs propres, nous donne $\operatorname{tr} A = 0 + \cdots + 0 + \lambda = \lambda$ donc $\operatorname{tr} A \neq 0$.

$\Longleftarrow$ ***Hypothèse :*** $\operatorname{tr} A \neq 0$.

***Méthode 1 (usuelle) :*** On a toujours $\dim\ \operatorname{Ker} A = n-1$ sauf qu'ici, à priori, la multiplicité est supérieure ou égale à $n-1$. On a aussi $\operatorname{tr} A = 0+\cdots+0+\lambda = \lambda$, donc $\lambda \neq 0$. A priori, sa multiplicité vérifie $\mu(\lambda) \geq 1$. Comme la somme des multiplicités ne peut dépasser la dimension $n$, il vient $\mu(0) = 0 = \dim\ \operatorname{Ker} A$ et $\mu(\lambda) = 1$. $A$ est donc ***diagonalisable***, car la dimension de chaque espaces propres est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante (cours).

***Méthode 2 (avec Q1) :*** On calcule $A^2$ (on a $(U|V) = \sum_{i=1}^n u_i v_i = \operatorname{tr} A$) :

$$A^2 = U\,{}^tV U\,{}^tV = U({}^tVU)\,{}^tV = (U|V)\; U\,{}^tV = (U|V)A = \operatorname{tr}(A)A$$

$A$ annule le polynôme $X(X - \operatorname{tr}(A)$ ***scindé à racines simples*** (car $\operatorname{tr} A \neq 0$) donc est ***diagonalisable***.

***Remarques***

- Le ***polynôme minimal*** n'est pas au programme (c'est le polynôme annulateur unitaire de degré minimum). Vous pouvez quand même savoir que si $A$ est ***diagonalisable***, c'est le polynôme annulateur $X(X-\lambda) = X(X - \operatorname{tr} A)$, c'est presque du cours (sauf le côté minimum qui se devine). Sinon, c'est $X^2$
- On a démontré le résultat (où ?) que pour une matrice $A$ de rang 1, on a $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$. Donc une matrice de rang 1 est une (matrice de) ***projection*** ssi $\operatorname{tr} A = 1$. $A$ est ***nilpotente*** ssi $\operatorname{tr}(A) = 0$.

*TPE PSI 2015 (polynome annulateur)*

**Enoncé 32** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I$. Montrez $A$ inversible et $\det A > 0$.

$A$ annule le polynôme $P(X) = X^3 - X - 1$. Je rappelle qu'on regarde 2 choses sur un ***polynôme annulateur*** : ses racines ***réelles ou complexes*** (parce qu'elles donnent les ***seules*** valeurs propres ***possibles)*** et s'il est ***scindé à racines simples*** (parce que cela donne ***diagonalisable***), attention aussi dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. $P$ n'a pas de racine évidente, mais commme tout polynôme de ***degré impair***, il a (au moins) une ***racine réelle***. On regarde les variations : $P'(X) = 3X^2 - 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | | $1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | | |
| $P(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\simeq -0.62$ | $\searrow$ | $\simeq -1.38$ | $\nearrow$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |

Il y a donc 1 seule racine réelle vérifiant, ***par le tvi***, $1 < \alpha < 2$ et 2 racines complexes conjuguées $\omega$ et $\overline{\omega}$. $A$ est donc ***diagonalisable*** sur $\mathbb{C}$ et ***pas sur*** $\mathbb{R}$.

0 n'est ***pas*** valeur propre de $A$, donc $A$ est ***inversible***. le déterminant est le produit des valeurs propres $\det A = \alpha \times \omega \times \overline{\omega}$. On peut calculer ce produit ***sans calculer les racines*** : c'est ce qu'on appelle les relations ***coefficients-racines*** d'un polynôme (cours de Sup). Pour le polynôme $P = X^3 - X - 1$, le produit des 3 racines vaut $(-1)^{\deg P} \times$ le dernier coefficient, soit ici 1. $\det A = 1$.

*Mines-Ponts PSI 2015 (resolution $u \circ f = v$)*

**Enoncé 38** Si $u$ et $v$ sont 2 endomorphismes donnés d'un espace $E$ de dimension finie, résoudre l'équation $u \circ f = v$, d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$

Commençons par rappeler que pour ***définir*** une application ***linéaire*** $f$ sur un ev $E = F \oplus G$, ***il faut et il suffit*** de la ***définir sur chacun*** des sev ***supplémentaires*** $F$ et $G$, à cause de la linéarité. Rappelons aussi que tout endomorphisme $f$

induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ (par ex. $E = \operatorname{Ker} f \oplus F$) sur $\operatorname{Im} f$ cad $f' : x \in F \longrightarrow f(x)$ est un isomorphisme (cours de Sup). On écrit donc $E = \operatorname{Ker} u \oplus H = \operatorname{Ker} v \oplus G$. Je termine en rappelant un résultat très utile qui est $f \circ g = O \iff \operatorname{Im} g = g(E) \subset \operatorname{Ker} f$. C'est quasiment du cours ou un exercice élémentaire de Sup lorsqu'on aborde les images et les noyaux. Notons $g = \dim G$ et $h = \dim H$

Pour ce genre d'exercices, la méthode est l'***analyse-réciproque*** mais, exceptionnellement, je procéderais par équivalence :

► On a $(u \circ f)/ \operatorname{Ker} v = v/ \operatorname{Ker} v) = O \iff u \circ f_{/ \operatorname{Ker} v} = O \iff f(\operatorname{Ker} v) \subset \operatorname{Ker} u \quad (1)$.

► Occupons nous maintenant de la « *restriction* » à $G$. Notons $\pi_H$ la projection sur $H$ (parallèlement à $\operatorname{Ker} u$. On a clairement $u \circ \pi_H = u$ : si $x = y + h$ avec $h \in H$ et $u(y) = 0$, il suit $u(x) = u(y) + u(h) = u(h)$ et $(u \circ \pi_H)(x) = u(\pi_H(x)) = u(h)$. $u \circ \pi_H = u' \circ \pi_H$ où $u'$ est ***l'isomorphisme*** induit par $u$ de $H$ sur $\operatorname{Im} u$. Revenons à l'exo :

$$(u \circ f)_{/G} = (u \circ \pi_H \circ f)_{/G} = v_{/G} = u' \circ \pi_H \circ f_{/G} \iff \pi_H \circ f_{/G} = u'^{-1} \circ v_{/G} \quad (2)$$

Les applications $f' = f_{/G}$ répondant à (2) sont les applications $f' : G \longrightarrow H \oplus \operatorname{Ker} u$ qui associe à $g \in G$ n'importe quel vecteur du type $(u'^{-1} \circ v)(g) + y$ avec $y$ ***quelconque*** élément de $\operatorname{Ker} u$.

***Remarques***

- Ce n'était pas demandé mais le lecteur pourra réfléchir au fait que l'ensemble des endomorphismes de $E$ vérifiant (1) est un sev de $\mathscr{L}(E)$ de dimension $(\underbrace{n-g}_{\dim \operatorname{Ker} v}) \times (\underbrace{n-h}_{\dim \operatorname{Ker} u}) + \underbrace{g}_{\dim G} \times \underbrace{n}_{\dim E}$.
- l'ensemble des endomorphismes de $E$ vérifiant $u \circ f = v$ n'est pas un sev de $\mathscr{L}(E)$ (c'est un sous-espace affine de dimension $n \times (n-h)$

---

*Télécom SudParis PSI 2015 (inegalité endomorphisme symétrique)*

**ENONCÉ 53** Soit $u$ un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien $E$, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Montrez pour tout $x \in E$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leq (x|u(x)) \leq \lambda_n \|x\|^2$

---

Pour un ***endomorphisme symétrique*** ou ***une matrice symétrique réelle***, une bonne idée esrt souvent d'utiliser le ***théorème spectral***. On utilise une BON quelconque et on raisonner matriciellement avec la matrice symétrique $S$. Alors il existe une matrice orthogonale $P$ telle que $S = PD\,{}^tP = PDP^{-1}$ et le produit scalaire a son ***expression canonique matricielle*** $(x|y) = {}^tXY$

$$\Big(x\Big|u(x)\Big) = {}^tXSX \overset{(5)}{\widehat{=}} {}^tXP\,D\,\underbrace{{}^tPX}_{Y} \overset{(6)}{\widehat{=}} {}^tYDY \overset{(7)}{\widehat{=}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n y_i^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \overset{(8)}{\widehat{=}} \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \overset{(9)}{\widehat{=}} \lambda_n \|x\|^2$$

• **(1)** Utilisation du ***théorème spectral***

- **(2)** On a ${}^tY = {}^t({}^tPX) = {}^tX\,{}^t({}^tP) = {}^tXP$
- **(3)** Egalité déjà démontrée plusieurs fois en cours. Je rappelle juste que les n coefficients diagonaux de $D$ sont évidemment les $n$ valeurs propres $\lambda_i$ de $S$.
- **(4)** $P$, commme ${}^tP$, étant un matrice orthogonale, elle représente des automorphimes orthogonaux qui conservent la norme d'ou $\|Y\| = \|{}^tPX\| = \|X\|$
- **(5)** Comme on s'est placé dans une BON, l'expression de la norme euclidienne est ***l'expression canonique***, soit $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$

La minoration par $\lambda_1\|x\|^2$ se procède de manière similaire.

---

*ENSAM PSI 2015 (inégalités sur les matrices orthogonales)* ☜

**Enoncé 62** Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ de coefficients $m_{ij}$. Montrez que $\left|\sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}\right| \le n \le \sum_{1\le i,j\le n} \left|m_{ij}\right| \le n^{3/2}$

---

On va utiliser deux produits scalaires canoniques ici, celui sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et celui sur $\mathbb{R}^n \simeq \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ce sont :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \left(A\middle|B\right) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}b_{ij} = \operatorname{tr}({}^tAB) \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ \langle X\,|\,Y\rangle = \sum_{1\le i\le n} x_i y_i = {}^tXY$$

On peut noter que le 2e produit scalaire est aussi égal à $\operatorname{tr}({}^tXY)$ parce que c'est une matrice $1\times 1$ mais c'est sans intérêt. On va noter de la même façon, les 2 normes euclidiennes correspondantes, cad $\|.\|$. On va utiliser aussi deux fois l'inégalité de **Cauchy**[1]-**Schwarz**[2] : $(x|y) \le \|x\|\|y\|$ avec égalité ssi les 2 vecteurs $x$ et $y$ sont colinéaires positifs. On a aussi d'ailleurs $|(x|y)| \le \|x\|\|y\|$ avec égalité ssi les 2 vecteurs $x$ et $y$ sont colinéaires.

$M$ étant une matrice orthogonale, la norme (euclidienne canonique) de chaque vecteur colonne $C_j$ vaut 1 , soit pour tout $1 \le j \le n$, $\|C_j\|^2 = \sum_{i=1}^n m_{ij}^2 = 1$. Par suite :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n 1 = n = \sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}^2 = \|M\|^2$$

On peut écrire $|m_{ij}| = m_{ij} \times \varepsilon_{ij}$ avec $\varepsilon_{ij} = \pm 1$. Posons $J = \left(\varepsilon_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite :

$$\left(M\middle|J\right) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}\times\varepsilon_{ij} = \sum_{1\le i,j\le n} |m_{ij}| \overbrace{\le}^{\textbf{(1)}} \|M\|\times\|J\| \overbrace{=}^{\textbf{(2)}} \sqrt{n}\times n \qquad (E_1)$$

- **(1)** Inégalité de **Cauchy**[1]-**Schwarz**[2]

---

1. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable, plus de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe et en théorie des groupes.
2. **Hermann Schwarz** : mathématicien allemand (1843-1921).

1. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable, plus de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe et en théorie des groupes.
2. **Hermann Schwarz** : mathématicien allemand (1843-1921).

• **(2)** On calcule $\|J\|^2 = \sum_{1\le i,j\le n} (\varepsilon_{ij})^2 = \sum_{1\le i,j\le n} 1 = n^2$

Posons maintenant $U = (1,\dots,1)$, puis :

$$\left|\langle MU \mid U\rangle\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} [MU]_i U_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} [MU]_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik}\times 1\right| = \left|\sum_{1\le i,k\le n} M_{ik}\right| \overbrace{\le}^{(1)} \|MU\|\|U\| \overbrace{=}^{(2)} \|U\|^2 = n \qquad (E_2)$$

• **(1)** Inégalité de **Cauchy**[1]-**Schwarz**[2]

• **(2)** $M$ étant un matrice orthogonale représente (dans une bon) un endomorphisme orthogonal qui ***conserve la norme*** d'où $\|MU\| = \|U\|$.

La dernière inégalité s'obtient en remarquant que puisque la norme (euclidienne canonique) de chaque colonne $C_j$ vaut 1, cad $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}^2 = 1$, on en déduit $m_{ij}^2 \le 1$, puis $|m_i j| \le 1$. Il suit :

$$\sum_{1\le i,j\le n} |m_{ij}| \overbrace{\ge}^{(1)} \sum_{1\le i,j\le n} |m_{ij}|^2 = \|M\|^2 \overbrace{=}^{(2)} n \qquad (E_3)$$

• **(1)** Comme $|m_i j| \le 1$, il vient $m_{ij}^2 \le |m_{ij}|$

• **(2)** Egalité déjà calculée un peu plus haut.

***Remarques***

► Pour la première inégalité $(E_1)$, il y a égalité ssi il y a égalité avec Cauchy-SChwarz (sans valeur absolue) donc ssi $M$ et $J$ sont colinéaires positifs. Ceci nécessite que les coefficients soient ***tous*** des $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour que les colonnes soient de norme 1. Réciproquement, ce sont bien des matrices orthogonales à condition que les + ou - soient « *équilibrés* » pour que les colonnes soient orthogonales entre elles. Le lecteur vérifiera qu'il y en a 8 pour une matrice d'ordre 2 (coefficients $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$)).

► Pour la deuxième inégalité $(E_2)$ ; là encore, elle s'appuie sur **Cauchy**[1]-**Schwarz**[2] avec valeur absolue. L'égalité a lieu pour $MU$ et $U \ne 0$ colinéaires, ce qui se traduit ***exactement par $U$ vecteur propre*** de $M$, puis la somme des lignes égales, puique la $i$-oème coordonnée de $MU$ est la sommme de la $i$-ième ligne. On trouve par exemple toutes les matrices de permutations (un seul 1 par ligne et par colonne) et leurs opposées

a

*TPE PSI 2015 (endomorphisme $M \longrightarrow SM - MS$)*

**ENONCÉ 66** Soient $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi$ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM - MA$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel.

**1 )** Montrez il existe une famille $(X_1, \dots, X_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ propres pour $A$ tels que ${}^tX_iX_j = \delta_{ij}$.

**2 )** Pour $1 \leq i, j \leq n$, on pose $M_{ij} = X_i\,{}^tX_j$. Montrez que la famille $(M_{ij})$ est une base orthonormale de vecteurs propres pour $\varphi$. Quel est le rang de $\varphi$ ?

**1 )** D'après le ***théorème spectral***, $A$ étant ***symétrique réelle***, il exixte une BON $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs propres de $A$, base de $\mathbb{R}^n$, munis de sa structure euclidienne canonique comme il se doit : par conséquent $(X|Y) = {}^tXY$. IL vient donc immédiatement de l'orthonormalité ${}^tX_iX_j = \delta_{ij}$, pour tous $1 \leq i, j \leq n$. On a $AX_i = \lambda_i X_i$ les $\lambda_i$ pouvant être distincts ou confondus.

***Remarques : Rappelons que*** si $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, la matrice ${}^tXY$ est une matrice $(1,1)$ que l'on peut identifier à un réel alors que $X\,{}^tY$ est une matrice $(n,n)$ de rang 1 où toutes les colonnes sont colinéaires à $X$, en fait $C_i = y_i X$.

**2 )** Pour tous $1 \leq i, j \leq n$, on pose $M_{ij} = {}^tX_iX_j$. Rappelons qu'une famille ***orthogonale*** de vecteurs ***non nuls*** est ***libre*** (cours). Pour démontrer que la famille $\mathscr{E} = (M_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une BON de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il faut et il suffit de démontrer :

- $M_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ok.
- $\mathrm{Card}\,(\mathscr{E}) = n^2 = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ Ok.
- $\mathscr{E}$ est une famille orthonormale.

  Le produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est canonique selon l'énoncé d'où, pour tous $1 \leq i, j, k, l \leq n$ :

$$\left(M_{ij}\,\middle|\,M_{kl}\right) = \mathrm{tr}\left({}^tM_{ij}M_{kj}\right) = \mathrm{tr}\left({}^t(X_i\,{}^tX_j)\;X_k\,{}^tX_l\right) = \mathrm{tr}\Big(X_j\;\underbrace{{}^tX_i\;X_k}_{\delta_{ik}}\,{}^tX_l\Big)$$
$$= \delta_{ik}\,\mathrm{tr}\left(X_j\,{}^tX_l\right) \overbrace{=}^{\textbf{(1)}} \delta_{ik}\,\mathrm{tr}\left({}^tX_lX_j\right) = \delta_{ik}\,\mathrm{tr}\,(\delta_{jl}) \overbrace{=}^{\textbf{(2)}} \delta_{ik}\delta_{jl}$$

  - **(1)** Résulte de la propriété $\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$
  - **(2)** Résulte du fait que c'est une matrice (1,1), donc $\mathrm{tr}\Big((a)\Big) = a$

  Cette quantité $\delta_{ik}\delta_{jl}$ est nulle sauf si $i = k$ ***et*** $j = l$ ce qui amène $M_{ij} = M_{kl}$ et dans ce cas on trouve $1 \times 1 = 1$. Ceci corresponbd bien à base orthonormale.

Montrons maintenant que ce sont bien des vecteurs propres de $\varphi$. On utilise $A$ symétrique et $AX_i = \lambda_i X_i$ :

$$\begin{aligned}\varphi(M_{ij}) &= AM_{ij} - M_{ij}A = AX_i\,{}^tX_j - X_i\,{}^tX_j A = \lambda_i X_i\,{}^tX_j - X_i\,{}^tX_j\,{}^tA = \lambda_i X_i\,{}^tX_j - X_i\,{}^t(AX_j)\\ &= \lambda_i X_i\,{}^tX_j - X_i\,{}^t(\lambda_j X_j) = (\lambda_i - \lambda_j) X_i\,{}^tX_j = (\lambda_i - \lambda_j) M_{ij}\end{aligned}$$

**3 )** Remarquons que la question précédente a montré $\varphi$ diagonalisable puisque on a trouvé une base orthonormale de vecteurs propres de $\varphi$. D'autre part, toutes les valeurs propres de $\varphi$ sont les $\lambda_i - \lambda_j$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$, en nombre $n \times n = n^2$ (ce qui correspond bien car $\varphi$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2$) où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres de $A$. Puisque $\varphi$ est diagonalisable, on sait dim Ker$\varphi = \mu(0)$ désignant la mutiplicité de 0, comme valeur propre de $\varphi$. Par suite :

$$\operatorname{rg}\varphi = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Ker}\varphi = n^2 - \mu(0) \text{ avec } \mu(0) = \operatorname{Card}\left\{ (i,j) \in [[1 \dots n]]^2 \mid \lambda_i = \lambda_j \right\}$$

Pour raisonner proprement sur ce cardinal, raisonnons sur des (d'autres) $\lambda_i$ 2 à 2 distincts, donc en nombre $p \leq n$, chaque valeur propre étant de multiplicité $m_i$ (pour info, on a donc $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = n$). $\lambda_i = \lambda_1$ a donc $m_1$ chances d'être égal à un $\lambda_j$ égal et ceci se répète pour tous les $\lambda_i$ égaux à ce $\lambda_1$, en nombre $m_1$, par conséquent $m_1 \times m_1 = m_1^2$ possibilités. Ce raisonnement se répète pour chaque valeur propre distincte, soit finalement $\mu(0) = \sum_{i=1}^{p} m_i^2$. En particulier, si toutes les valeurs propres de $A$ sont distinctes ($p = n$), on a $\mu(0) = \sum_{i=1}^{p} 1^2 = p = n$

## II – Analyse

*CCP PSI 2015 (convergence d'une série alternée)* ✌

**Enoncé 73** Montre que la série de terme général $u_n = \ln\left(2n + (-1)^n\right) - \ln\left(2n\right)$ converge mais pas absolument.

Le critère de convergence à appliquer ***ici***, c'est faire un développement. On développe jusqu'à un $o\left(\frac{1}{n^a}\right)$, en général $a = 2$, ou $a = \frac{3}{2}$. Se rappeler que c'est le développement que l'on doir avoir ***à la fin*** donc on peut commencer plus loin. On peut aussi utiliser « *l'astuce* » du « *grand O* » qui fait gagner un cran de calcul, cad un terme à calculer en moins. ***Attention !*** à bien vérifier $\longrightarrow 0$ avant d'utiliser un DL usuel :

$$\ln\Big(2n+(-1)^n\Big)-\ln\Big(2n\Big)=\ln\Big(2n(1+\frac{(-1)^n}{2n})-\ln\Big(2n\Big)=\ln\Big(2n\Big)+\Big(\ln\Big(1+\underbrace{\frac{(-1)^n}{2n}}_{\longrightarrow 0}\Big)-\ln\Big(2n\Big)$$

$$=\frac{(-1)^n}{2n}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2n)^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)=\underbrace{\frac{(-1)^n}{2n}}_{v_n}+\underbrace{O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}_{w_n}$$

La série alternée de **Riemann** [3] $\sum v_n$ ***converge*** car $1>0$ (ou alors vérifie immédiatement le CSSA). LA série $\sum w_n$ ***converge***, en tant que « *grand O* » d'une série ***absolument convergente***. La série $\sum u_n$ converge donc comme somme de 2 séries convergentes.

On en tire l'équivalence $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$, pui par passage à la valeur absolue, possible pour une équivalence, il vient $|u_n| \sim \dfrac{1}{2n}$ ; Du critère d">'équivalence à la série ***positive*** harmonique, il vient que la série $\sum |u_n|$ diverge, cad que la série $\sum u_n$ ne ***converge pas absolument***

***Remarque :*** L'équivalence $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$ ne permet pas de conclure quant à la convergence de $\sum u_n$ car le ***critère d'équivalent*** ne s'applique pas quand les termes ne sont pas de ***signe constant***. Il faut donc effectuer un développement.

---

*ENSAM PSI 2015 (somme et rayon de série entière)*

**ENONCÉ 92**

**1 )** Rayon de convergence de $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}x^{2n+1}$ ?

**2 )** Prouvez que $f$ esrt solution de $(x^2-2)y'+xy+2=0$ et Exprimez $f$.

---

**1 )**

On pose $u_n=\dfrac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}x^{2n+1}$ et on rappelle la formule de **Stirling** [4] : $n!\sim\sqrt{2\pi n}\Big(\dfrac{n}{e}\Big)^n$ :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{(n+1)!\;1\times 3\times\cdots\times(2n+1)\;x^{2n+3}}{n!\;\;1\times 3\times\cdots\times(2n+3)\;x^{2n+1}}\right|=\frac{n+1}{2n+3}|x|^2\longrightarrow\frac{1}{2}[x|^2$$

Du critère d'**Alembert** [5] pour les séries numériques ; il vient :

- Si $\frac{1}{2}[x|^2<1 \iff |x|<\sqrt{2}$, la série $\sum u_n$ ***converge absolument*** , donc $R\geq\sqrt{2}$.
- Si $\frac{1}{2}[x|^2>1 \iff |x|>\sqrt{2}$, la série $\sum u_n$ ***diverge grossièrement*** , donc $R\leq\sqrt{2}$.

Finalement le rayon de convergence vaut $R=\sqrt{2}$.

3. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction $\zeta$ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.
4. **James Stirling** : mathématicien écossais (1692-1770). Connu pour la formule donnant l'équivalent de la factorielle.
5. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).

**2 )** On sait que $f$ est $C^1$ (et même $C^\infty$) sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$ et que l'on peut ***dériver terme à terme***, soit :

$$\begin{aligned}(x^2-2)y'+xy+2 &\overbrace{=}^{\textbf{(1)}} (x^2-2)\sum_{n=0}^{+\infty} na_nx^{n-1}+x\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n \overbrace{=}^{\textbf{(2)}} x^2\sum_{n=1}^{+\infty}(n-1)a_{n-1}x^{n-2}-2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+x\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n-1}x^{n-1}\\
&\overbrace{=}^{\textbf{(3)}} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\Big((n-1)a_{n-1}-2(n+1)a_{n+1}+a_{n-1}\Big)-2a_1+2\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\left(n\frac{(n-1)!}{1\times 3\times\cdots\times(2n-1)}-2(n+1)\frac{(n+1)!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+3)}\right)-2\frac{1!}{1}+2\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\frac{n!\big((2n+1)(2n+3)-2(n+1)^2\big)}{1\times 3\times\cdots\times(2n+3)}\end{aligned}$$

Cela ne fait pas 0. Il y a une erreur quelque part. De moi ? De report d'énoncé ?

- **(1)** On retarde le plus possible le remplacement de $a_n$ par la quantité originelle, d'autant plus qu'ici elle est complexe.
- **(2)** On sépare chaque quantité et on ***décale*** le $x^k$ pour avoir « *in fine* » un $x^n$. On regarde bien aussi où la somme commmence et on essaye, tant que possible, « *d'aligner* » sur 0 ou sur 1.
- **(3)** On regroupe ***tout*** suivant $x^n$ et on n'oublie pas , s'il y en a, les quelques coefficients extérieurs à la somme « *principale* ». On remplacera $a_n$ ensuite.

Résolvons l'équation différentielle comme demandé même si c'est sans doute pas celle qui convient :

***Solution de l'équation homogène :***

L'ensemble des solutions de $(x^2-2)y'+xy=0$ est la ***droite vectorielle*** dirigée par $\exp\left(\int a(x)\,\mathrm{d}x\right)=\dfrac{1}{\sqrt{|x^2-2|}}$ avec

$$\int a(x)\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\textbf{(1)}} \int \frac{-1/2}{x-\sqrt{2}}+\frac{-1/2}{x+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x \overbrace{=}^{\textbf{(2)}} -\frac{1}{2}\ln|x-\sqrt{2}|-\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{2}|=-\ln\sqrt{\left|x^2-2\right|}$$

- **(1)** On a effectué, comme il se doit, une ***décomposition en éléments simples***.
- **(2)** On n'oublie pas les valeurs absolues dans la primitivation en log même si ici, on pourrait se contenter de résoudre « *sur* » $\{2-x^2>0\}$, ***intervalle ouvert de convergence*** de $f$.

***Recherche d'une solution particulière :***

On utilise la méthode de ***la variation de la constante*** en la cherchant sous la forme $y(x) = \dfrac{C(x)}{\sqrt{|x^2-2|}}$ :

$$(x^2-2)\left(\frac{C'(x)}{\sqrt{\left|x^2-2\right|}} + C(x)\left(\frac{1}{\sqrt{\left|x^2-2\right|}}\right)'\right) + x\frac{C(x)}{\sqrt{\left|x^2-2\right|}} + 2 = 0$$

$$\overbrace{\iff}^{(1)} (x^2-2)\frac{C'(x)}{\sqrt{\left|x^2-2\right|}} + C(x)\times 0 = -2 \overbrace{\iff}^{(2)} C'(x) = \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-(x/\sqrt{2})^2}} \iff C(x) = 2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

- **(1)** Je rappelle qu'il est ***inutile de calculer*** le coefficient de $C(x)$ car le principe de cette méthode est que c'est toujours 0.

- **(2)** On décide de résoudre sur l'intervalle $\{2-x^2>0\}$. Sinon, il y aurait 2 cas à traiter. Sur l'autres intervalles $\{2-x^2<0\}$, on obtiendrait $C'(x) = \frac{-2}{\sqrt{x^2-2}}$ qui s'intègre plutôt en $\operatorname{argch}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\right)$

Finalement la ***solution générale*** sur $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$ est $y(x) = \boxed{\dfrac{C}{\sqrt{2-x^2}} + \dfrac{2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-x^2}}}$ La condition initiale $f(0)=0$ donne $C=0$ pour $f$.

---

*ENSEA PSI 2015 (développement d'une série de fonctions)*

**Enoncé 84**

**1 )** Montrez que la série de fonctions $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}}$ converge normalement sur tout segment de $[0,1[$. Que peut-on en déduire pour sa somme $f$ ?

**2 )** Quelle est la nature de la suite de terme général $v_n = \displaystyle\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrez que $\sum v_n$ converge.

---

**1 )** Je rappelle que pour étudier une ***convergence normale***, ***ou*** on étudie exactement le sup (par une étude de variations) ***ou*** on l'évalue en le majorant, méthode préférentielle si on se place sur un segment $\left[a,b\right]$ comme c'est le cas dans de nombreux théorèmes. N'oublions pas non plus que c'est le ***sup de la valeur absolue***, donc ce peut être l'inf si la fonction prend des valeurs négatives.

***Ici***, il est immédiat que pour $\left[a,b\right] \subset \left[0,1\right[$ :

$$\sup_{t\in[a,b]}\left|u_n(t)\right| = \sup_{t\in[a,b]}\frac{t^n}{\sqrt{1+n^2}} = \frac{b^n}{\sqrt{1+n^2}} = v_n$$

La convergence de la ***série numérique positive*** $\sum v_n$ se déduit, par exemple, du critère d'**Alembert**[5] puisque :

$$\left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \left|\frac{b^{n+1}\,\sqrt{1+n^2}}{b^n\,\sqrt{1+(n+1)^2}}\right| \sim \frac{b\,n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b<1$$

Comme les fonctions $u_n$ sont clairement continues sur $\left[0,1\right[$, et qu'on a la ***convergence uniforme*** (car normale) sur ***tout segment*** de $\left[0,1\right[$, le ***théorème de continuité*** nous amène la continuité de la fonction-somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{\sqrt{1+n^2}}$.

**2 )**

***Méthode 1 :***

Lorsqu'on « *rencontre* » une intégrale à ***bornes fixes*** avec « *du n* » et que l'énoncé demande une limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$, en général, on cherche à appliquer le ***théorème de convergence dominée de Lebesgue***[6] :

- ***Etude de la convergence simple***

  Il est immédiat que sur l'intervalle $\left]0;1\right[$, la ***suite de fonctions converge simplement*** vers la fonction nulle, car $0<|t|<1$.

- ***Hypothèse de Domination***

$$\forall\, t \in \left]0,1\right[,\ \left|u_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+0^2}} = 1$$

La fonction constante 1 est clairement continnue et **intégrable** sur $\left]0,1\right[$, le théorème s'applique : $\lim \int_0^1 u_n((t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 O = 0$

***Remarque :*** On peut toujours appliquer le théorème de Lebesgue sur l'intervalle ouvert. Ceci peu éviter quelques petits problèmes particuliers aux bornes qui alourdissent la démo, comme ici en 1.

Il doit y avoir une erreur (de rapport) d'énoncé, car cette intégrale ***se calcule***, ce qui n'arrive pas dans la pratique !

On a immédiatement le calcul :

$$v_n = \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{(n+1)\sqrt{1+n^2}}$$

La série $\sum v_n$ vérifie le CSSA de manière triviale donc converge.

5. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).
6. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

*Mines-Ponts 2015-2012 - CCP PSI 2011*

**ENONCÉ 93**

**1 )** Etudiez la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$. Calculez sa somme $S$. (

**2 ) CCP** : PAS DE CALCUL direct de $S$ mais Indication : DSE de $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^3}$ au voisinage de 0. Calculez de 2 façons $\displaystyle\int_0^1 f$. En déduire $S$.)

***Méthode 1*** **:**

La convergence de la série $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ résulte clairement du CSSA. On introduit la série entière $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$. Il est immédait que son rayon de convergence est $R = 1$ car la règle d'**Alembert**[5] amène

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{3n+4}\ (3n+1)}{(3n+4)\ x^{3n+1}}\right| \sim |x^3|\ \frac{3n}{3n} \longrightarrow |x|^3$$

Comme $|x|^3 < 1 \iff |x| < 1$ et $|x|^3 > 1 \iff |x| > 1$, il en résulte $R = 1$. Je ne mets pas les détails ici. On remarque $S = S(1)$.

$$\forall\, x \in\ ]-1,1[\ ,\ S'(x) \overbrace{=}^{(1)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left((-1)^n (\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^3)^n \overbrace{=}^{(2)} \frac{1}{1-(-x^3)} = \frac{1}{1+x^3}$$

$$\begin{aligned}
S(x) &\overbrace{=}^{(3)} S(0) + \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} \overbrace{=}^{(4)} \int_0^x \frac{1/3}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{-1/3t+2/3}{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t \\
&\overbrace{=}^{(5)} \frac{1}{3}\ \ln|1+x| + \int_0^x \frac{-1/3(t-1/2)+1/2}{(t-1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\ \ln|1+x| - \frac{1}{3}\int_0^x \frac{t-1/2}{(t-1/2)^2+3/4}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{(t-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&\overbrace{=}^{(6)} \frac{1}{3}\ \ln|1+x| + \left[-\frac{1}{6}\ \ln|(t-1/2)^2+3/4| + \frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2(t-1/2)}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x \\
&= \frac{1}{3}\ \ln|1+x| - \frac{1}{6}\ \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\ \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\ x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

- **(1)** Cette série entière est ***dérivable terme à terme*** sur $]-R,R[\ =\ ]-1,1[$ .
- **(2)** Cette série ***géométrique converge simplement*** ssi $|-x^3| < 1 \iff |x| < 1$.
- **(3)** On primitive en utilisant l'intégrale, c'est mieux. Ne pas oublier la constante. Ici, c'est $S(0) = 0$.
- **(4)** On a décomposé en ***éléments simples sur*** $\mathbb{R}$ : $\dfrac{1}{(1+t)(t^2-t+1)} = 0 + \dfrac{1/3}{1+t} + \dfrac{-1/3t+2/3}{t^2-t+1}$. (pas de détails ici).
- **(5)** Pour primitiver un élement simple de seconde espèce (second degré au dénominateur sans racines réelles), on utilise la réduction canonique du trinôme. Révisez votre poly.
- **(6)** Il peut être utile pour l'efficacité de se rappeler que $\dfrac{1}{t^2+a^2}$ se primitive en $\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{t}{a}\right)$ (sinon, on mettrait $a$ en facteur).

Malheureuseument, cette égalité, consécutivement aux (1) et (2) ne peut être considérée comme valide pour $x \in ]-1,1[$ et pas pour $x = 1$ ! Nous allons donc effectuer une limite lorsque $x \longrightarrow 1$, limite qui ***conserve l'égalité*** (si les limites

5. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).

existent !). Le membre de droite étant composé de fonctions usuelles sans problème visible en 1 est ***continue en*** 1. Par suite, il suffit de remplacer par $x = 1$ et on trouve, en se rappelant $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, la quantité .

POur le membre de gauche, il faut aussi étudier la continuité en 1. Or, c'est une ***série entirère*** : on sait seulement, ***à priori***, qu'elle est continue sur $\left]-R,R\right[ = \left]-1,1\right[$. On est donc amené à utiliser le ***théorème de continuité d'une série de fonctions*** sur [0,1] :

- $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est clairement continue sur $[0,1]$
- Il n'y a pas de convergence normale sur [0,1] car $\sup\limits_{x\in[0,1]} \left|\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}\right| = \dfrac{1}{3n+1}$ dont la série diverge trivialement. Nous allons donc montré la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ via les théorèmes du CSSA : pour tout $x \geq 0$, la suite $f_n(x)$ est clairement ***alternée*** et par produit de 2 quantités positives décroissant vers 0 : $\frac{1}{3n+1}$ et $x^{3n+1}$ puisque $x \in [0,1]$, il suit que la série $\sum f_n(x)$ vérifie le ***CSSA pour tout*** $x \in [0,1]$. On peut alors majorer :

$$\forall\, x \in \left[\,0,1\,\right],\ \left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{3k+1}}{3k+1}\right| \leq \left|\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\right| \implies \|R_n\|_\infty \leq \sup_{[0,1]}\left|\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\right| = \frac{1}{3n+4} \longrightarrow 0$$

  La convergence uniforme de la ***série de fonctions*** $\sum f_n(x)$ est ainsi établie par la convergence ***uniforme*** de la ***suite*** des restes $(R_n)$ vers 0, et ceci uniformément sur $[0,1]$.

De la continuité de $S$ en 1, il résulte : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1} S(x) = S(1) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{3n+1} = \dfrac{1}{3}\ln 2 + \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$

***Remarque :*** Je rappelle, pour info, un théorème utile mais ***hors programme PSI*** qui est que dès qu'une série entière de la variable réelle de rayon $R$ est ***définie*** en $R$, elle est ***nécessairement continue*** en $R$.

***Méthode 2 :***

On utilise la variante de méthode indiquée par CCP pour trouver la valeur de cette somme. De la ***décomposition en série entière usuelle*** de $\frac{1}{1+u}$ usuelle ppour $|u| < 1$, il en résulte immédiatement celle de $\frac{1}{1+x^3}$ pour $|x^3| < 1 \iff |x| < 1$ :

$$\forall\, x \in \left[\,-1,1\,\right],\ \frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n}$$

On demande de calculer de 2 façons l'intégrale $\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3}$. Un ***première façon*** est de la calculer par prmitivation qui provient d'une décomposition enéléments simples sur $\mathbb{R}$. Ce calcul étant déjà effectué dans la méthode 1, on le reprend quasi-entièrement :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} &= \left[\frac{1}{3}\ \ln|1+t| + -\frac{1}{6}\ \ln|(t-1/2)^2 + 3/4| + \frac{1}{2}\ \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2(t-1/2)}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\big(\ln 2 - 0\big) - \frac{1}{6}\big(0-0\big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} - \arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

La ***deuxième façon*** de calculer l'intégrale nous ramène à une ***intégration terme à terme*** :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n x^{3n}}_{f_n(x)} \mathrm{d}x$$

Malheureusement, les 2 théorèmes du cours ne s'appliquent pas ! On ne regarde que l'hypothèse principale :

• Pour le premier, il faut la série $\sum \int_I |f_n|$ convergente. Or ici, cette série-intégrale se calcule et vaut $\sum \int_0^1 x^{3n}\,\mathrm{d}x = \sum \frac{1}{3n+1}$, série visiblement divergente.

• Pour le second, il faut la convergence uniforme sur [0,1] de $\sum(-1)^n x^{3n}$ (je vous laisse réfléchir au fait asseez facile que la convergence normale y est fausse). On regarde le reste qui ne ***tend pas uniformément*** vers 0 :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^{3k} = (-1)^n x^{3n+3} \frac{1}{1-(-x^3)} \implies \|R_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|x|^{3n+3}}{1+x^3} \geq \frac{1}{2}$$

On va alors essayer d'appliquer le théorème de ***convergence dominée de*** **Lebesgue**[6] aux suites de sommes partielles $(S_N(x))$ de la série car s'il s'applique :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{3n}}_{S_N(x)} \overbrace{=}^{(1)} \lim_{N\to+\infty} \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{3n} \overbrace{=}^{(2)} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-1)^n x^{3n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

• **(1)** L'application du théorème de Lebesgue à la suite $(S_N)$ sur [0,1] résulte de :

  • $S_N$ est bien continue par morceaux sur [0,1].

  • ***Domination*** sur [0,1] :

$$\forall\, x \in [0,1] \left|S_N(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{3n}\right| = \left|\frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}\right| \leq \frac{1+1}{1+x^3}$$

  Cette dernière fonction étant clairement continue sur le ***segment*** [0,1] donc y est ***intégrable***.

• **(2)** L'interversion de la somme et de l'intégrale est licite car résulte de la ***finitude*** de la somme. Car si elle est infinie (dénombrable), il faut utiliser un des 2 théorèmes d'intégration terme à terme pour les séries (ou comme expliqué ici, lebesgue appliqué à la suite des sommes partielles de la série)

On en déduit donc

$$\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = S$$

*CCP 2015 PSI - Mines-Ponts 2014 PSI (limite série de fonctions)*

**ENONCÉ 98** Soit $f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-nx})$.

**1 )** Déterminez le domaine de définition $D$ de $f$ et la continuité sur $D$

**2 )** Déterminez la limite de $f$ en $+\infty$. (**Mines :** Donnez un équivalent)

**3 )** Déterminez la limite de $f$ en $O_+$. (**Mines :** Donnez un équivalent)

**1 )** On pose $f_n(x) = \ln(1+e^{-nx})$ et on distingue correctement suivant les cas de $x$ :

- Si $x<0$, par composition de fonctions, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \ln +\infty = +\infty \neq 0$, donc la série $\sum f_n(x)$ ***diverge grossièrement***
- Si $x=0$, même conclusion car $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \ln 2 \neq 0$,
- Si $x>0$, $\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = 0$ et par suite $f_n(x) \sim e^{-nx} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Les critères de convergence d'une ***série positive*** amènent la convergence de la série $\sum_n f_n(x)$

Conclusion : Def $f = \left]0,+\infty\right[ = D$

Le théorème de ***continuité d'une série de fonctions*** nous donne la continuité sur $D$ :

- $f_n$ est clairement continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, par compostion de fonctions usuelles.
- La série de fonctions $\sum f_n$ ***converge normalement*** donc ***uniformément*** sur tout segment $[a,b] \subset \left]0,+\infty\right[$ puisque, par croissance du logarithme et décroissance de $x \longrightarrow e^{-nx}$, il suit $\sup\limits_{x\in[a,b]} \left|f_n(x)\right| = \ln\left(1+e^{-na}\right) = f_n(a)$. La série $\sum f_n(a)$ converge puisque $a>0$.

***Remarque :*** Attention si la série de fonctions est une série entière de bien appliquer les théorèmes sur les séries entières qui sont plus rapides.

**2 )**

On en profite pour rappeler les quelques majorations usuelles à connaître (majorations de convexité) :

$$\ln(1+x) \leq x \qquad \forall x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq x+1$$

Par application du théorème de ***limite des séries de fonctions***, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$ car :

- Pour $n \neq 0$, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \ln(1+0) = 0$ et sinon $f_0(x) = \ln 2 \longrightarrow \ln 2$

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge ***normalement donc uniformément*** sur $\left[a,+\infty\right[$ ($a>0$ fixé) car :

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} \ln(1+e^{-nx}) \leq \sup_{x\in[a,+\infty[} e^{-nx} = e^{-na} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \ln 2 + 0 + \cdots + 0 + \cdots = \ln 2$

L'Oral des Mines-Ponts demandait ***à la place*** un équivalent de $f$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$. Dans les cas simples, cela peut être aussi une application du théorème de limite puisque $f \sim_a g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1$. Néanmoins, ici c'est encore plus simple, car si on sait bien son cours sur les équivalents, on tire de la limite plus haut $f(x) \sim_{+\infty} \ln 2$ !

**3 )** Dans cette question, il faut comprendre que le théorème de limite ne « *marchera* » pas facilement car il y a un problème de convergence normale « *en* » 0. Pour uniforme, il faudrait regarder ...mais je vous rappelle qu'en dehors des cas d'application du CSSA, cela reste une question difficile.

***Méthode 1 :*** On procède « *par les epsilon* ». Soit $A>0$ ***fixé***.

Pour $N$ assez grand $(N+1)\ln 2 \geq 2A$, puis comme $\lim\limits_{x\to 0_+} \sum\limits_{n=0}^{N} f_n(x) = (N+1)\ln 2 \geq 2A$, en utilisant les propriétés des limites, il existe $\eta>0$ tel que pour $0<x<\eta$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \geq \sum\limits_{n=0}^{N} f_n(x) \geq 2A - A = A$.

Ok. On vient de démontrer $\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty$

***Méthode 2 :*** Une autre méthode qui aura l'avantage de nous donner en plus l'équivalent simple demandé par l'Oral des Mines-Ponts. On utilise le théorème de ***comparaison d'aires***. La fonction $x \to f_n(x)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suit pour $n \geq 1$ :

$$\int_n^{n+1} \ln(1+e^{-tx})\,\mathrm{d}t \leq f_n(x) \leq \int_{n-1}^{n} \ln(1+e^{-tx})\,\mathrm{d}t$$

On peut ***sommer*** de $n=0$ à $+\infty$ puisque la série comme le sintégrales convergent et il y a conservation des 2 inégalités :

$$\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-tx})\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \leq \ln 2 + \int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-tx})\,\mathrm{d}t$$

On « *sort le x* » de l'intégrale à l'aide du changement de variables $u = e^{-tx}$ $\mathrm{d}u = -xu\,\mathrm{d}t$ :

$$\frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u \leq f(x) \leq \ln 2 + \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$$

On pose $\alpha = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du \geq 0$, on divise par $\frac{\alpha}{x} \geq 0$, puis on fait tendre $x \longrightarrow 0$ qui nous donne l'équivalent en 0 :

$$1 \leq \frac{f(x)}{\frac{\alpha}{x}} \leq \frac{\ln 2}{\alpha}\, x + 1 \longrightarrow 1 \quad\Longrightarrow\quad f(x) \sim_0 \frac{\alpha}{x} = \boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du \;\times \frac{1}{x}}$$

***Remarque :*** L'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$ peut se calculer par un ***développement en série entière*** de $\ln(1+u)$ et finalement on arrive à (ce n'était pas demandé) :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \simeq 0.82246$$

*CCP PSI 2015 - Mines-Ponts PSI 2012 (développement en série d'une intégrale)*

**ENONCÉ 107**

**1 )** Justifiez l'existence de $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$ et de $I = \int_0^1 x^x\,dx$.

**2 )** Montrez que $\int_0^1 t^n \ln^p t\,dt$ existe et la calculez. (**Mines :** PAS cette question).

**3 )** Montrez $I = S$.

**1 )** Le critère de ***majoration*** d'une série ***positive*** amène, pour $n \geq 2$, $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ d'où la convergence et donc l'existence de la somme $S$.

La convergence de l'intégrale résulte de la ***continuité*** de $x \to x^x = \exp(x \ln x)$ sur $]0,1]$. Quant à la borne 0, on a que $\lim_{x\to 0} x^x = e^0 = 1$, ce qui assure le ***prolongement*** en une fonction ***continue*** sur le ***segment*** $[0,1]$.

**2 )** Posons $I_{np} = \int_0^1 t^n \ln^p t\,dt$. On reconnait une intégrale de **Bertrand**[7]. L'existence résulte de la continuité et du critère ***d'équivalent*** en 0 comme en 1 (qui ramènent à une intégrale de **Riemann**[3] en 1) :

$$f(t) = \frac{1}{t^{-n}\,\ln^{-p} t} \qquad f(t) \sim_1 1 \times (t-1)^p = \frac{1}{(t-1)^{-p}}$$

On a bien $-n < 1$ et $-p < 1$. Mais on redémontre pour la fonction de Bertrand en $t = 0$ : on utilise le critère « $n^\alpha u_n$ » : $\lim_{t\to 0} t^{1/2}\, t^n\, \ln^p(t) = 0$ par ***croissances comparées***. Ok car $1/2 < 1$ (***Attention*** à ne pas prendre $> 1$ qui est pour l'infini).

7. **Joseph Bertrand** : mathématicien français (1822-1900).

3. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction $\zeta$ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

Calculons en effectuant une ipp :

$$u' = t^n \quad v = \ln^p(t) \quad u = \frac{t^{n+1}}{n+1} \quad v' = p\frac{\ln^{p-1}(t)}{t}$$

Rappelons qu'à cause du double problème en 0 et 1, il est ***conseillé*** de pratiquer l'ipp sur $[\varepsilon, A]$ puis de passer à la limite :

$$\int_\varepsilon^A t^n \ln^p t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^p(t)\right]_\varepsilon^A - \frac{p}{n+1}\int_\varepsilon^A t^{n+1}\frac{\ln^{p-1}(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln^p(t)\right]_\varepsilon^A - \frac{p}{n+1}\int_\varepsilon^A t^n \ln^{p-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $p \geq 1$, les limites lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ et $A \longrightarrow 1$ ne posent pas de problème et on « *tombe* » sur les intégrales $I$ ***convergentes*** d'où, en passant par une récurrence facile sur $p$ et le « *dernier* » $I_{n1} = -\frac{1}{n+1} I_{n0}$

$$I_{np} = -\frac{p}{n+1} I_{n,p-1} \Longrightarrow I_{np} = \frac{p(p-1)}{(n+1)^2} I_{n,p-2} = \cdots == \frac{(-1)^p\, p!}{(n+1)^p} I_{n0} = \frac{(-1)^p\, p!}{(n+1)^{p+1}}$$

**3 )**

$$I = \int_0^1 x^x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x\ln x} \overbrace{=}^{(1)} \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^n \ln^n x}{n!}}_{f_n(x)} \mathrm{d}x \overbrace{=}^{(2)} \int_0^1 \frac{x^n \ln^n x}{n!}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \ln^n x \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} I_{nn} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n\, n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n} = S$$

- **(1)** On a utilisé le ***développement en série entière*** de l'exponentielle de rayon $R = +\infty$, donc possible.
- **(2)** ***L'intégration terme à terme*** est possible car :
  - les $f_n$ sont continues sur $]0,1[$
  - La série ***numérique*** $\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ ***converge*** comme vu en Q1

*Centrale PSI 2015 (intégrale de Poisson)* ✷

**Enoncé 113** Soit $f : x \longrightarrow \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right)\mathrm{d}t$.

**1 )** Montrez $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et que $f$ est paire.

**2 )** Vérifiez, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = 2f(x)$.

**3 )** Calculez $f(x)$ en distinguant les 3 cas $|x| = 1, < 1, > 1$.

**1 )** On constate : $g(x,t) = 1-2x\cos t + x^2 = (1-x\cos t)^2 + (x\sin t)^2 \geq 0$. Cette quantité est nulle ssi $x\sin t = 0 \quad (1)$ ***et*** $x\cos t = 1 \quad (2)$. Comme $x \neq 0$, $t = 0$ ou $t = \pi$ est nécessaire dans (1) qui amènent $x = 1$ rp. $x = -1$ dans (2). ***Synthèse*** :

- ***pour tous*** $x \neq \pm 1, g(x,t) > 0$ et par composition la fonction $t \longrightarrow \ln g(x,t)$ est ***continue*** sur le ***segment*** $\left[0,\pi\right]$ donc y est ***intégrable***.
- ***pour*** $x = 1$, par composition $t \longrightarrow \ln g(1,t) = \ln\big(2(1-\cos t)\big)^2$ est continue sur $\left]0,\pi\right]$. Reste à étudier en $t = 0$. On va appliquer le résultat sur l'équivalent d'un log bien pratique : si $f \sim_a g$ ***et*** $\lim_a f \neq 1$, alors $\ln f \sim_a \ln g$. Ici :

$$2(1-\cos t) \sim_0 t^2 \implies g(1,t) \sim_0 \ln t^2 = 2\ln t$$

  $t \longrightarrow \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$, c'est du cours.
- ***pour*** $x = -1$, par composition $t \longrightarrow \ln g(-1,t) = \ln\big(2(1+\cos)\big)^2$ est continue sur $\left[0,\pi\right[$. Reste à étudier en $t = \pi$. On pose $u = t - \pi$ et je vous laisse terminer . . .

On a donc $f$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. La parité résulte de :

$$f(-x) = \int_0^\pi \ln\left(1+2x\cos t + x^2\right) \mathrm{d}t \overbrace{=}^{(1)} \int_\pi^0 \ln\left(1-2x\cos u + x^2\right) - \mathrm{d}u = \int_0^\pi \ln\left(1+2x\cos u + x^2\right) \mathrm{d}u = f(x)$$

- **(1)** On a effectué le changement de variables $u = \pi - t \quad \mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$.

**2 )**

$$f(x^2) = \int_0^\pi \ln\left(1-2x^2\cos t + x^4\right)\mathrm{d}t \overbrace{=}^{(1)} \int_0^\pi \ln\left(1-2x^2(2\cos^2\frac{t}{2}-1)+x^4\right)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \ln\left((1+x^2)^2 - 4x^2\cos^2\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$\overbrace{=}^{(2)} \int_0^\pi \ln\left(1-2x\cos\frac{t}{2}+x^2\right) + \int_0^\pi \ln\left(1+2x\cos\frac{t}{2}+x^2\right)$$

$$\overbrace{=}^{(3)} \int_0^{\pi/2} \ln\left(1-2x\cos u + x^2\right)(2\,\mathrm{d}u) + \int_\pi^{\pi/2} \ln\left(1-2x\cos v + x^2\right)(-2dv) = 2\int_0^\pi \ln\left(1-2x\cos t + x^2\right)\mathrm{d}t = 2f(x)$$

- **(1)** On a utilisé la formule trigonométrique $\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$ (ou $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$)
- **(2)** On a utilisé les 2 identités $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ et $\ln AB = \ln A + \ln B$ (si $A, B > 0$)
- **(3)** Dans la première intégrale, le changement de varaibles $u = \frac{t}{2}$ et dans la deuxième $v = \frac{\pi}{2} - t$

**3 )** De la question précédente, on tire par récurrence immédiate,

$$f(x) = \frac{1}{2} f(x^2) = \frac{1}{4} f(x^4) = \cdots = \frac{1}{2^n}\ f(x^{2^n})$$

Pour $x = 1$, on a $f(1) = \frac{1}{2} f(1)$, soit $f(1) = 0$. Ensuite $f$ est bornée sur $\left[0, a\right]$ , avec $a < 1$ parce que :

$$\left|f(x)\right| = \left|\int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right) \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\pi \left|\ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right)\right| \mathrm{d}t \leq \pi \max\left((\ln(1+x)^2, -\ln(1-x)^2\right) \leq 2\pi \ln\left|1 - a\right|$$

Comme $a < 1$, $a^{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et en particulier $a^{2^n} \leq a$. On en tire $\left|f(a)\right| \leq \dfrac{1}{2^n} 2\pi \ln\left|1-a\right| \longrightarrow 0$, soit $f(a) = 0$.

Pour $x > 1$, on écrit :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right) \mathrm{d}t = \int_0^\pi \ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}\cos t + 1\right)\right) \mathrm{d}t = \int_0^\pi \ln\left(x^2\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}\cos t + 1\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \ln\left(x^2\right) + \int_0^\pi \ln\left(\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x}\cos t + 1\right) \mathrm{d}t = \pi\ln(x^2) + f\Big(\underbrace{\frac{1}{x}}_{0<x<1}\Big) = 2\pi\ln(x) \end{aligned}$$

Par parité, pour $|x| > 1$, on a $f(x) = 2\pi \ln|x|$.

## III – Probabilités

*ENTPE-EIVP PSI 2015 (loi conjointe* $(\max, \min)$ *de vas indépendantes)* ✷

**Enoncé 144** Deux va indépendantes $X$ et $Y$ suivent la loi donnée par $P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^k$, $p \in [0, 1]$

**1 )** Donnez la loi conjointe de $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$, puis en déduireles lois de $U$ et $V$. sont-elles indépendantes ?

**2 )** Donnez la loi de $S = U + V$. Admet-elle une espérance ?

**1 )** On se place sur un espace probabilise $\left(\Omega, \mathscr{A}, P\right)$.L'ensemble de valeurs prises par la loi du couple de variables aléatoires $(U, V)$ est $U(\Omega) \times V(\Omega) = \mathbb{N}^2$. Pour tous $m < n \in \mathbb{N}$, $P\left((U = m, V = n)\right) = 0$ et pour tous $m > n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P\left((U = m, V = n)\right) &= P\Big(\underbrace{((X = m) \cap (Y = n))}_{U_1} \cup \underbrace{((Y = m) \cap (X = n))}_{U_2}\Big) \overbrace{=}^{(1)} P\left((X = m) \cap (Y = n)\right) + P\left((Y = m) \cap (X = n)\right) \\ &\overbrace{=}^{(2)} P\left((X = m)\right) \times P\left((Y = n)\right) + P\left((Y = m)\right) \times P\left((X = n)\right) = 2\left(p(1-p)^m \times p(1-p)^n\right) \\ &= \boxed{2p^2(1-p)^{m+n}} \end{aligned}$$

Pour $m = n \in \mathbb{N},\ P\big(((U=m, V=m)\big) = P\big(((X=m)\cap(Y=m))\big) = \cdots = p^2(1-p)^{2m}$

- **(1)** Les événements $U_1$ et $U_2$ sont ***incompatibles*** car comme $m \neq n$, $(X=m)$ et $(X=n)$ sont déjà incompatibles.

- **(2)** Les événements $(X=m)$ et $(Y=n)$ sont ***indépendants***, ***par définition*** des 2 variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes.

***Remarque :*** Pour « *vérifier* » un calcul de loi de va, on peut s'assurer que la somme fait bien 1, cad ici :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} p^2(1-p)^{2m} + \sum_{0\le n<m<+\infty} 2p^2(1-p)^{m+n} = 1$$

On en déduit la ***loi marginale*** de U à valeurs dans $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, la famille $\big((V=n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ étant un ***système complet d'événements*** d'infinité ***dénombrable*** :

$$\begin{aligned}
P\big((U=m)\big) &\overbrace{=}^{\textbf{(1)}} \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((U=m, V=n)\big) \overbrace{=}^{\textbf{(2)}} \sum_{n=0}^{m} P\big((U=m, V=n)\big)\\
&\overbrace{=}^{\textbf{(3)}} p^2(1-p)^{2m} + \sum_{n=0}^{m-1} 2p^2(1-p)^{m+n} = p^2(1-p)^{2m} + 2p^2(1-p)^m \sum_{n=0}^{m-1}(1-p)^n\\
&= p^2(1-p)^{2m} + 2p^2(1-p)^m \frac{1-(1-p)^m}{1-(1-p)} = \boxed{p(1-p)^m\big((p-2)(1-p)^m+2\big)}
\end{aligned}$$

- **(1)** La bonne notation « *serait* » $P\big(((U=m)\cap(V=n))\big)$ qui vient de la ***formule des probabilités totales*** mais écrit commme plus haut, c'est plus commode ! Attention quand même !

- **(2)** Un « *max* » ne pouvant être strictement plus petit à un « *min* », on a déjà vu que l'événement $(U=m)\cap(V=n)$ a une probabilité nulle pour $m<n$

- **(3)** L'événement $(U=m)\cap(V=m)$ a une « *formulation* » à part.

***Remarque :*** Là-encore, un excellent exercice de vérifier que $\displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} p(1-p)^m\big((p-2)(1-p)^m+2\big) = 1$

De manière similaire, la ***loi marginale*** de V est à valeurs dans $U(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
P\big((V=n)\big) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P\big((U=m, V=n)\big) \overbrace{=}^{\textbf{(1)}} \sum_{m=n}^{+\infty} P\big((U=m, V=n)\big)\\
&= p^2(1-p)^{2n} + 2p^2(1-p)^n \sum_{m=n+1}^{+\infty}(1-p)^m = p^2(1-p)^{2n} + 2p^2(1-p)^n(1-p)^{n+1}\,\frac{1}{1-(1-p)}\\
&= p(1-p)^{2n}\big(p+2(1-p)\big) = \boxed{p(1-p)^{2n}(2-p)}
\end{aligned}$$

Les varaibles aléatoires $U$ et $V$ ne sont ***pas indépendantes*** car, par exemple, $P\big((U=0,V=1)\big)=0$ et visiblement, $P\big((U=0)\big)\neq 0$ et $P\big((V=1)\big)\neq 0$ donc ***on a*** $P\big((U=0,V=1)\big)\neq P\big((U=0)\big)\times P\big((V=1)\big)$

**2 )** On a $S(\Omega)=\mathbb{N}+\mathbb{N}=\mathbb{N}$. Puis pour $n\in\mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
P\big((S=n)\big) &= P\big((U+V=n)\big)=P\Big(\bigcup_{k=0}^{n}((U=n-k)\cap(V=k))\Big)\overbrace{=}^{\textbf{(2)}}P\Big(\bigcup_{k=0}^{[n/2]}\underbrace{((U=n-k)\cap(V=k))}_{A_k}\Big)\\
&\overbrace{=}^{\textbf{(3)}}\sum_{k=0}^{[n/2]}P\big((U=n-k\cap(V=k)\big)\overbrace{=}^{\textbf{(4)}}\sum_{k=0}^{[n/2]}P\big((U=n-k)\big)\times P\big((V=k)\big)\\
&=\sum_{k=0}^{[n/2]}p(1-p)^{n-k}\big((p-2)(1-p)^{n-k}+2\big)p(1-p)^{k}(2-p)\\
&=p^2(2-p)(1-p)^n\sum_{k=0}^{[n/2]}\big((p-2)(1-p)^{n-k}+2\big)
\end{aligned}$$

$S$ admet une espérance (finie) ssi la série $\sum_n nP\big((S=n)\big)$ ***converge absolument***. Les termes étant de signe constant, rappelons que la convergence absolue équivaut à la convergence. Ecrivons, sans « *s'occuper* » des constantes :

$$np^2(2-p)(1-p)^n\sum_{k=0}^{[n/2]}\big((p-2)(1-p)^{n-k}+2\big)=-p^2(2-p)^2\underbrace{n(1-p)^{2n}\sum_{k=0}^{[n/2]}(1-p)^{-k}}_{v_n}+2p^2(2-p)\underbrace{n(1-p)^n\sum_{k=0}^{[n/2]}1}_{u_n}$$

• La série $\sum u_n$ converge puisque $0\leq u_n\leq(1-p)^n\dfrac{n(n+1)}{2}$ et que cette dernière série converge par exemple par le critère d'**Alembert**[5]et vu que $|1-p|<1$.

• On « *calcule presque* » $v_{2n}$, c'est plus simple à gérer :

$$\begin{aligned}
v_{2n} &= 2n(1-p)^{4n}\sum_{k=0}^{n}(1-p)^{-k}=2n(1-p)^{4n}\,\frac{1-(1-p)^{-n-1}}{1-\frac{1}{1-p}}\\
&=2n(1-p)^{4n}\,\frac{(1-p)-(1-p)^{-n}}{-p}=\frac{2}{p}\,n(1-p)^{3n}-\frac{2}{p}\,n(1-p)^{5n}
\end{aligned}$$

La série $\sum v_{2n}$ est donc convergente. Il en est de même pour la série $\sum v_{2n+1}$. Finalement, l'espérance de $S$ est bien finie.

5. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).

*CPP PSI 2015 (boules tirages avec et sans remises)*

**ENONCÉ 148** On considère une urne contenant $n-1$ boules noires et 1 boule blanche.

**1 )** On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne et on note $T$ la va donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donnez les valeurs prises par $T$, sa loi, son espérance et sa variance.

**2 )** On effectue maintenant des tirages sans remise. Soit $X$ la va donnant le rang du premier tirage amenant la boule blanche. Donnez les valeurs prises par $X$, sa loi, son espérance et sa variance.

**3 )** Soit $Y$ la va donnant le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche. Exprimez $Y$ en fonction de $X$ et $n$. Donnez espérance et variance de $Y$.

---

**1 )** On peut prendre l'univers $\Omega = \{B_1, N_1, \dots, N_{n-1}\}^{\mathbb{N}^*}$, univers d'infini dénombrable. Cette expérience aléatoire vérifie :

- Les tirages sont ***indépendants*** puique ***avec remise***.
- C'est une expérience de type ***succès-échec*** ou le succès (tirage boule blanche) est obtenu avec la probabilité $p = \frac{1}{n}$.
- La va $T$ mesure le temps d'attente (le rang) du premier succès.

Par conséquent, $T$ suit la loi géométrique de paramètre $p$, $T \hookrightarrow \mathscr{G}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Puis $E(T) = \dfrac{1}{p} = n$ et $V(T) = \dfrac{1-p}{p^2} = \dfrac{1-\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n^2 - n$

Les valeurs prises par $T$ sont « ***toutes*** », cad $T(\Omega) = N^*$. C'est logique, et cela fait partie de la loi géométrique ; Sinon, ce ne serait pas une loi géométrique...

**2 )**

***Modèle 1***

Ici, on peut prendre comme univers $\Omega$ l'***ensemble de toutes les permutations*** de $\{B_1, N_1, \dots, N_{n-1}\}$. On a $\operatorname{Card}\Omega = n!$. Les valeurs prises par $X$ sont de 1 à jusqu'à $n$, cad $X(\Omega) = [\![ 1 \dots n ]\!]$

Soit $1 \le k \le n$. Pour calculer $P\big((X=k)\big)$, l'***événement*** $(X=k)$ contient toutes les permutations du type :

$$\Big(\underbrace{N_{i_1}, \dots, N_{i_{k-1}}}_{k-1 \text{ noires}}, \overbrace{B}^{\text{pos. } k}, \underbrace{N_{i_k}, \dots, N_{i_{n-1}}}_{n-k \text{ noires restantes}}\Big)$$

$$\forall\, 1 \le k \le n, \quad P\big((X=k)\big) = \frac{\#(X=k)}{\#\Omega} = \frac{\binom{n-1}{k-1}\,(k-1)!\,(n-k)!}{n!} = \frac{(n-1)!\,(k-1)!\,(n-k)!}{(k-1)!\,(n-k)!\,n!} = \frac{1}{n}$$

On dénombre comme suit : les façons de choisir $k-1$ boules noires parmi $n-1$, soit $\binom{n-1}{k-1}$, $(k-1)!$ façons de permuter ces $(k-1)$ boules et les $m!$ façons de permuter les $m$ boules noires restantes, avec $m = (n-1)-(k-1) = n-k$.

***Modèle 2***

Ici, on peut prendre comme univers $\Omega$ l'***ensemble de tous les n-uplets*** avec un seul $B$ et que des $N$. Selon la position du $B$, on a donc $\operatorname{Card}\Omega = n$ Soit $1 \leq k \leq n$. L'***événement*** $(X = k)$ est représenté par un ***unique*** $n$-uplet avec le $B$ à la position $k$. Par conséquent :

$$P\big((X=k)\big) = \frac{\#(X=k)}{\#\Omega} = \frac{1}{n}$$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP\big((X=k)\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$
$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P\big((X=k)\big) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12}$$

**3 )** On a immédiatement $Y = n-1-(X-1) = n-X$, car si la boule blanche est à la position $k$, il en reste $(n-1)-(k-1) = n-k$ comme déjà vu. Par ***propriétés*** de l'espérance et de la variance :

$$E(Y) = E(n) - E(X) = n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} \qquad V(Y) = V(n-X) = V(-X) = (-1)^2 V(X) = \frac{n^2-1}{12}$$