# Quelques corrigés Annales PSI 2014

## 1 Algèbre

*CCP PSI 2014 (valeurs propres d'une matrice $n \times n$)*

**Enoncé 4** Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice réelle carrée d'ordre $n$ qui a $1, 2, \dots, n$ sur la dernière ligne et dernière colonne et des 0 ailleurs.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique réelle donc ***diagonalisable sur*** $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée ou de manière équivalente, les espaces propres sont orthogonaux. On en déduit qu'il y a $n$ ***valeurs propres réelles*** à trouver. On remarque immédiatement que les $n-1$ premières colonnes sont colinéaires. La dernière colonne n'étant clairement pas colinéaire à celles-łà, on en déduit $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_n) = \operatorname{rg}(C_1, C_n) = 2$. Par suite $\dim \operatorname{Ker} A = n-2 \neq 0$. Il suit que ***0 est valeur propre de*** $A$ et que sa multiplicité $\mu(0)$ dans le polynôme caractéristique vérifie $n-2 \leq \mu(0)$. En fait, la matrice étant diagonalisable, on a même $\mu(0) = n-2$. L'espace propre associé est $\operatorname{Ker} A$ dont un ***système d'équations*** $AX = 0$ équivaut à $x_1 + 2x_2 + \dots + (n-1)x_{n-1} + nx_n = 0$ et $x_n = 0$. On peut aussi, ***de manière équivalente*** en donner une base à $n-2$ éléments de $\mathbb{R}^n$ qui est :

$$\big((2,-1,0,0,\dots,0),(3,0,-1,0,\dots,0),\dots,(n-1,0,\dots,0,-1,0)\big)$$

Il reste donc 2 valeurs propres $\lambda, \mu$ à trouver qui sont non nulles et vérifient $\operatorname{tr} A = 0 + \dots + 0 + \lambda + \mu = 0$. Comment les trouver ?

***Méthode 1 :*** On calcule le polynôme caractéristique de $A$ :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 & -2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1-n \\ -1 & -2 & \dots & \dots & 1-n & \lambda - n \end{vmatrix} \overbrace{=}^{(*)} \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & -2 & \dots & \dots & 1-n & -\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \lambda(\lambda - n) \end{vmatrix}$$

En $(*)$, on a appliqué la transformation $C_n \longrightarrow C_1 + 2C_2 + \dots + (n-1)C_{n-1} + \lambda C_n$ qui multiplie le déterminant par $\lambda$ (ce n'est pas une transformation élémentaire), d'où le $\frac{1}{\lambda}$.Cette matrice est triangulaire inférieure, son déterminant est donc le produit des éléments diagonaux, soit, en appliquant la formule sur la somme des carrés $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ :

$$\chi_A(x) = \frac{1}{\lambda}\,\lambda^{n-1}\Big(-\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \lambda(\lambda-n)\Big) = \lambda^{n-2}\Big(\lambda^2 - n\lambda - \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)\Big)$$

Le discriminant du facteur de second degré vaut $\Delta = n^2 + \frac{2}{3}(n-1)n(2n-1) = \frac{1}{9}(12n^3 - 9n^2 + 6n) > 0$ puisque l'on sait la matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donc polynôme caractéristique scindé sur $\mathbb{R}$. Les 2 valeurs propres recherchées sont donc $\frac{1}{2}(n \pm \sqrt{\Delta})$ Comment trouver les vecteurs propres ? Il faut essayer de deviner …En fait, si on se rappelle que les espaces orthogonaux, ces deux droites sont dans la plan $(\operatorname{Ker} A)^{\perp}$. Comme d'après le cours, dans l'orthogonal, on trouve (on n'est pas obligé de justifier ici, on devine et on vérifie que cela marche ! de toute façon, il y a une démo dans la 2ème méthode) le vecteur $(1,2,3,\dots,n-1,n)$ et $(0,\dots,0,1) = e_n$, on peut avoir l'idée de regarder le vecteur $X(x) = (1,2,3,\dots,n-1,x)$ avec un paramètre $x$ à trouver :

$$AX = \Big(x, 2x, \dots, (n-1)x, \sum_{k=0}^{n-1} k^2 + nx\Big)$$

Comme $\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + n\lambda = \lambda^2$ , $x = \lambda$ amène $AX(\lambda) = (\lambda, 2\lambda, \dots, (n-1)\lambda, x\lambda) = \lambda X(\lambda)$. C'est trouvé !

***Méthode 2 :*** En considérant l'endomorphisme $a \in \mathscr{L}(R^n)$ canoniquement associé à $A$, et en munissant $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, comme la base canonique est orthonormée et la matrice $A$ est symétrique, l'endomorphisme $a$ est symétrique. Comme $F = \operatorname{Ker} a$ est un sous-espace propre de $a$ stable par $a$, alors $F^{\perp}$ l'est aussi. Cours. On peut donc considérer l'endomorphisme $a'$ induit par $a$ sur le plan $F^{\perp}$. Les 2 valeurs propres / vecteurs propres de $a'$ (qui n'est en fait que $a$) nous donneront ce que l'on cherche. On cherche une base du plan $F^{\perp}$. $F = H_1 \cap H_2$ avec $H_1$ l'hyperplan d'équation $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 0$. Le cours nous donne alors $H_1^{\perp} = D_1 = \operatorname{Vect}(1,2,\dots,n) = \operatorname{Vect}(u)$. De même l'hyperplan $H_2$ d'équation $x_n = 0$ a pour orthogonal la droite $D_2 = H_2^{\perp} = \operatorname{Vect}(e_n)$ où $e_n$ n'est rien d'autre que le $n$ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $F \subset H_i$, alors $H_i^{\perp} \subset F^{\perp}$ (cours). Ceci amène $u, e_n \in F^{\perp}$. POur des raisons de dimension, c'st une base du plan. Contrairement à ce matin, onva plutôt prendre une base orthogonale. Inutile de passer par Schmidt pour 2 vecteurs, on trouve $f_1 = (1,2,\dots,n-1,0)$ et $f_2 = e_n$. On calcule $a'(f_i) = a(f_i)$ par la matrice $A$, en n'oubliant de « *finaliser* » en exprimant les coordonnées dans cette base $(f_1, f_2)$.

$$Af_1 = \Big(0,\dots,0,\sum_{k=1}^{n-1} k^2\Big) = \big(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\big)\, f_2 \qquad Af_2 = \Big(1,2,\dots,n-1,n\Big) = f_1 + nf_2 \implies \operatorname{Mat}\Big(a',(f_1,f_2)\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} k^2 & n \end{pmatrix} = B$$

Le polynôme caractéristique de $B$ est $\chi_B(\lambda) = \lambda^2 - n\lambda - \sum_{k=1}^{n-1} k^2$, le même polynôme de second degré que plus haut, donc on retrouve les 2 valeurs propres qui sont $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(n \pm \sqrt{\Delta})$. Par exemple pour $\lambda_+$, on trouve la droite espace propre en résolvant le système $2 \times 2$ :

$$(\lambda_+ I_2 - A)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_+ x - y & = & 0 \\ -(\sum_{k=1}^{n-1} k^2)x + (\lambda_+ - n)y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & \lambda_+ x \end{array}\right.$$

« *Rapporté* » à la base $(f_1, f_2)$, ceci « *donne* » le vecteur $1f_1 + \lambda_+ f_2$. Je vous laisse vérifier que c'est bien le vecteur de la méthode 1 ! (à priori, on le retrouve à $\alpha$ près).

*Mines d'Alès 2014 (trace et polynôme caractéristique)*

**ENONCÉ 18**

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $P_A : x \longrightarrow \det(xI_n - A)$. Montrez, si $x$ n'est pas valeur propre de $A$, alors $\operatorname{tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right) = \dfrac{P'_A(x)}{P_A(x)}$.

Soit $P = \alpha \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$ scindé, alors sa ***dérivée logarithmique*** vaut

$$\frac{P'}{P} = \Big(\ln(P)\Big)' = \left(\ln \alpha + \sum_{i=1}^{n} \Big(\ln(X - a_i)\Big)\right)' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X - a_i}$$

Si le polynôme caractéristique d'une matrice $B$ est scindé, on sait que sa trace est la somme de ses valeurs propres $\lambda_i$ pour $1 \le i \le n$, comptées avec la multiplicité. Montrons, que si $B$ est inversible (cad $\lambda_i \ne 0$), alors $\operatorname{tr}(B^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\lambda_i}$
Le polynôme caractéristique $P_B$ étant scindé, ce qui est toujours le cas dans $\mathbb{C}$, la matrice $B$ ***est trigonalisable*** (cours !), cad il existe une matrice $P$ inversible et $T$ triangulaire supérieure telles que :

$$B = PTP^{-1} \text{ avec } T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \Longrightarrow B^{-1} = (P^{-1})^{-1} T^{-1} P^{-1} = PT^{-1}P^{-1} \text{ avec } T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}$$

Par « *matrices semblables* », il suit $\operatorname{tr}(B^{-1}) = \operatorname{tr}(T^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1}$

Revenons à notre exercice, comme $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, le polynôme caractéristique $P_A$ est scindé $P_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$ où les $\lambda_i$ sont les valeurs propres complexes de $A$, ***distinctes ou confondues*** (ou de manière équivalente ***comptées avec la multiplicité***). Soit $X_i \ne 0$ un vecteur propre associé à $\lambda_i$, alors :

$$\Big(xI_n - A\Big) X_i = xX_i - AX_i = (x - \lambda_i) X_i$$

Comme $X_i \ne 0$, on en déduit que les $x - \lambda_i$, pour $1 \le i \le n$, sont les $n$ valeurs propres complexes de $xI_n - A$ (en fait, il y a une petite erreur de raisonnement ici, où est-elle ?). Si $x$ n'est pas valeur propre de $A$, il suit $xI_n - A$ inversible, puis :

$$\operatorname{tr}\left((xI_n - A)^{-1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - \lambda_i} = \frac{P'_A(x)}{P_A(x)}$$

*CCP PSI 2014 - ENTPE-EIVP PSI 2009 (equation matricielle avec transposée)* ☜

**Enoncé 20** Soit $M \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + {}^tM = I_n$.

**1 )** **CCP :** Trouvez un polynôme annulateur de $M$. $M$ est-elle diagonalisable ?

**2 )** Montrez $M - I$ inversible. Trouvez tous les $M$.

**Q1 )** De l'équation on tire $({}^tM)^2 = (I_n - M^2)^2 = M^4 - 2M^2 + I_n$, formule du binôme de **Newton** [1] ***valide*** puisque les deux matrices $M^2$ et $I_n$ commutent. En passant à la transposée dans l'équation on obtient aussi : ${}^t(M^2) = {}^t(I_n - {}^tM) = I_n - M$. L'égalité amène $M^4 - 2M^2 + I_n = I_n - M$, soit $M^4 - 2M^2 + M = 0$.

Le polynôme $X^4 - 2X^2 + X = X(X^3 - 2X + 1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\alpha')$ est donc ***annulateur*** de $M$ avec $\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. On en déduit $\operatorname{Sp} M \subset \{0, 1, \alpha, \alpha'\}$. Le polynôme étant ***scindé à racines simples dans*** $\mathbb{R}$, la matrice $M$ est donc ***diagonalisable sur*** $\mathbb{R}$. L'hypothèse d'inversibilté ajoute que 0 n'est pas valeur propre de $M$, soit $\operatorname{Sp} M \subset \{1, \alpha, \alpha'\}$

**Q2 )** L'équation de l'énoncé s'écrit aussi :

$$M^2 - I_n = (M - I_n) \times (M + I_n) = {}^tM \Longrightarrow M - I_n = {}^tM \times (M + I_n)^{-1}$$

La matrice $M + I_n$ est inversible, car $-1$ n'est pas valeur propre. D'autre part $M$ étant inversible, on sait ${}^tM$ inversible. Il suit que le produit $M - I_n$ est aussi inversible. Rappelons la propriété importante du cours $M - \lambda I_n$ inversible ssi $\lambda$ n'est pas valeur propre de $M$. On en déduit 1 n'est pas valeur propre de $M$, puis $\operatorname{Sp} M \subset \{\alpha, \alpha'\}$.

$M$ est ***diagonalisable***, et ses seules ***valeurs propres possibles*** sont $\alpha$ et $\alpha'$. Par conséquent, le cours nous apprend qu'un polynôme annulateur est alors $(X-\alpha)(X-\alpha') = X^2 + X - 1$, cad $M^2 + M = I_n$. La « *comparaison* » avec l'équation de l'énoncé amène ${}^tM = M$, $M$ est donc ***symétrique réelle*** (on retrouve diagonalisable sur $\mathbb{R}$). Toutes les matrices réelles solutions de $M^2 + {}^tM = I_n$ sont donc ***des*** matrices symétriques réelles admettant pour seules valeurs propres $\alpha$ et (ou) $\alpha'$.

***Réciproquement***, vérifions que ***toutes*** ces matrices conviennent. Elles sont bien inversibles puisque 0 n'est pas valeur propre. Ensuite le ***théorème spectral*** nous donne qu'il existe une matrice orthogonale $P$ et $D = \operatorname{Diag}(\alpha, \dots, \alpha, \alpha', \dots, \alpha')$ telles que $M = PD\,{}^tP$. Il est possible qu'il n'y ait « *que des* » $\alpha$ ou que des $\alpha'$ (dans ces 2 cas, ce sont ***nécessairement*** les 2 matrices $\alpha I_n$ et $\alpha' I_n$). Vérifions pour terminer que $M$ est solution de l'équation de l'énoncé :

$$\begin{aligned} M^2 + {}^tM &= (PD\,{}^tP)^2 + {}^t(PD\,{}^tP) = PD^2\,{}^tP + {}^t({}^tP)\,{}^tD\,{}^tP = P(D^2 + D)\,{}^tP \\ &= P\operatorname{Diag}(\alpha^2 + \alpha, \dots, \alpha^2 + \alpha, \alpha'^2 + \alpha', \dots, \alpha'^2 + \alpha')\,{}^tP = P\operatorname{Diag}(1, \dots, 1)\,{}^tP = PI\,{}^tP = I_n \end{aligned}$$

***Rappelons*** que si une matrice $M$ est ***diagonalisable*** et a ***une seule valeur propre*** $\alpha$, ce ne peut être que $\alpha I_n$, puisque $M = P\operatorname{Diag}(\alpha, \dots, \alpha)P^{-1} = P\alpha I_n P^{-1} = \alpha I_n$.

***Rappelons aussi*** que si $D = \operatorname{Diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, alors $D^p = \operatorname{Diag}(\alpha_1^p, \dots, \alpha_n^p)$ et même, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(D) = \operatorname{Diag}(P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n))$.

1. **Isaac Newton** : anglais (1643-1727). Partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Connu pour la formule du binôme et la méthode éponyme d'approximation des zéros d'une fonction.

*Centrale PSI 2014 (polynome annulateur et signe du déterminant)* ✌

**ENONCÉ 23** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A + 4I = 0$. Quel est le signe de $\det A$ ?

$A$ annule le polynôme $P(X) = X^3 - 3X + 4$. Aucune racine évidente. On passe donc à une étude des variations : $P'(X) = 3X^2 - 3$ amène le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $-1$ | | $+1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P'(x)$ | | $+$ | | | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Le théorème des valeurs intermédiaires nous amène l'existence d'une racine $\alpha$ dans $\left]-\infty, -1\right[$. $P(-2) = 2$ et $P(-3) = -14$ amènent le meilleur encadrement $-3 < \alpha < -2$. Les 2 autres racines sont donc nécessairement (vraies) complexes conjuguées $\omega, \overline{\omega}$ car le polynôme est réel. Les 3 racines complexes de $P$ sont distinctes, $P$ est ***scindé à racines simples dans*** $\mathbb{C}$, donc $A$ est ***diagonalisable sur*** $\mathbb{C}$, avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} \subset \{\alpha, \omega, \overline{\omega}\}$. $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} \subset \{\alpha\}$, mais comme la ***dimension est impaire***, on sait que $A$ a nécessairement une valeur propre réelle, par conséquent $\alpha$ est bien valeur propre de $A$. Par suite deux possibilités, car si $\omega$ est valeur propre d $A$ réelle, nécessiarement $\overline{\omega}$ l'est aussi :

- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{\alpha, \omega, \overline{\omega}\}$. $\det A = \alpha\omega\overline{\omega} = \alpha|\omega|^2 < 0$. Rappelons que le produit des racines s'obtient aussi par $\alpha\omega\overline{\omega} = -4$. En fait, dans ce cas, $\det A = -4$.
- $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}} = \{\alpha\}$ et $A$ diagonalisable, donc $A = \alpha I$. Par suite $\det A = \alpha^3 < -8 < 0$.

***Remarques :***

• Si une matrice $M$ est ***diagonalisable*** et a une ***seule*** valeur propre $\lambda$ (qui donc est de multiplicité $n$), alors $A = \lambda I_n$. En effet, on écrit successivement $A = PDP^{-1} = P\lambda IP^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n$. ***Par contre***, si elle n'est pas diagonalisable, ce résultat est évidement faux : il suffit de prendre une matrice triangulaire non diagonale avec que des $\lambda$ sur la diagonale ($\lambda$ est donc sa seule valeur propre). Et si voous suivez bien, ceci permet de prouver qu'une telle matrice n'est pas diagonalisable...

• Rappelons que si un polynôme $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ de degré $n$ ($a_n \neq 0$), et si on note les $n$ racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ comptées avec la multiplicité, alors leur somme et produit vérifient :

$$S = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{-a_{n-1}}{a_n} \qquad P = \prod_{k=1}^{n} \alpha_k = \frac{(-1)^n a_0}{a_n}$$

• Si $P$ est de degré 2 $P = aX^2 + bX + c$, on a même l'***équivalence*** : $\alpha$ et $\beta$ sont ***les racines ssi*** $S = \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ et $P = \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$. Cela peut permettre d'être un peu plus efficace pour des trinômes simples ou l'on peut deviner les racines sans calculer le discriminant. Par exemple $P = X^2 - 5X + 6$ : on dit $2 + 3 = 5$ et $2 \times 3 = 6$ ***donc*** 2 et 3 sont ***les*** racines de $P$

*Mines-Ponts PSI 2014 (produit scalaire « intégrale »)*

**Enoncé 49** Soit $E = C^2\Big(\left[0,1\right],\mathbb{R}\Big)$. Pour $f,g\in E$, on pose $\varphi(f,g)=\int_0^1 fg+f'g'$.

**1 )** Montrez $\varphi$ produit scalaire sur $E$.

**2 )** Soient $V=\Big\{f\in E,\ f(0)=f(1)=0\Big\}$ et $W=\Big\{f\in E,\ f=f''\Big\}$.

Montrez qu'ils sont supplémentaires orthogonaux. Déterminez la projection orthogonale sur $V$ de $f\in E$.

**1 )** Commençons par remarquer que l'***intégrale existe*** puisque $t\longrightarrow f(t)g(t)+f'(t)g'(t)$ est bien continue sur le segment $\left[0,1\right]$, par hypothèse. La ***bilinéarité*** et la ***symétrie*** de $(f,g)\longrightarrow\varphi(f,g)$ est immédiate et résulte de la linéarité de l'intégration. La ***positivité*** également puisque les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, où un ***carré est positif*** : $\varphi(f,f)=\int_0^1 f^2+f'^2\geq 0$. Quant à ***définie***, puisque la fonction dans l'intégral nulle $\varphi(f,f)=0$, est continue et de signe constant sur [0,1], un théorème permet de conclure que $f^2(t)+f'^2(t)=0$. Comme on est dans $\mathbb{R}$, il vient $f$ nulle sur [0,1].

***On peut remarquer*** que $\mathscr{C}^1$ suffit pour démontrer produit scalaire.

**2 )** Notons que l'on sait grâce au cours, que $W$ est un ev de dimension 2, cad un ***plan***. Par résolution immédiate, on a $W=\text{Vect}\,(x\to e^x, x\to e^{-x})=\text{Vect}\,(x\to\cosh x, x\to\sinh x)$.

Rappelons que l'on sait que le noyau d'une forme linéaire (cad à valeurs dans $\mathbb{R}$) non nulle est un hyperplan (même en dimension infinie, mais alors on ne peut pas dire de dimension $n-1$, mais de codimension 1). L'application $f\in E\to f(a)\in\mathbb{R}$ étant clairement une ***forme linéaire non nulle*** sur $E$, son noyau $H_a$ est un hyperplan de $E$. On a $V=H_0\cap H_1$ (en fait, c'est un sev de codimension 2, mais ce n'est pas au programme). On vient de ***démontrer*** que $V$ et $W$ sont bien ***des sev*** de $E$.

Comme $E$ est de dimension infinie, on ne peut utiliser d'égalité sur les dimensions, par conséquent pour démontrer $V$ et $W$ ***supplémentaires orthogonaux***, il ***faut et il suffit*** de démontrer $V+W=E$ et $V\perp W$ et :

- $\boxed{V\perp W}$ Soient $f\in V$ et $g\in W$, cad $f(0)=f(1)=0$ et $g''=g$. Utilisons une IPP :

$$\int_0^1 f'g' \underset{\substack{u=f\\ v'=g''}}{\overset{\substack{u'=f'\\ v=g'}}{=}} \Big[f(t)g'(t)\Big]_0^1-\int_0^1 f(t)g''(t)\,\mathrm{d}t=-\int_0^1 fg$$

  On a donc immédiatement $\varphi(f,g)=0$ cad $f\perp g$.

- $\boxed{V+W=E}$

  ***Analyse :*** Soit $h$ $\mathscr{C}^2$ sur [0,1] tel que $h=f+g$ avec $f(0)=f(1)=0$ et $g''=g$. Il vient $h(0)=g(0)$ $h(1)=g(1)$ et par double dérivation, il suit $h''=f''+g$ soit $f''-f=h''-h$ ou autrement dit $f$ solution de $y''-y=h''-h$ aux conditions initiales $f(0)=f(1)=0$. La résolution de l'équation homogène est $y=\alpha\cosh x+\beta\sinh x$. Une solution particulière est $h$ !, d'où la solution générale est $f(x)=\alpha\cosh x+\beta\sinh x+h(x)$. On trouve les 2 constantes par les conditions initiales :

$$\begin{cases} \alpha + h(0) & = 0 \\ \alpha \cosh 1 + \beta \sinh 1 + h(1) & = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha & = -h(0) \\ \beta & = \frac{1}{\sinh 1}\Big(-h(1) + h(0)\cosh 1\Big) \end{cases}$$

L'analyse est terminée puisque nécessairement $g(x) = h(x) - f(x)$.

***Synthèse :*** Soit $h$ $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. Posons $f(x) = \alpha \cosh x + \beta \sinh x + h(x)$ avec $\alpha$ et $\beta$ comme plus haut et $g(x) = h(x) - f(x)$. On a bien

- $h(x) = f(x) + g(x)$
- $g \in W$, puisque $g \in \operatorname{Vect}(\cosh x, \sinh x)$.
- $f \in V$ car $f(0) = \alpha + h(0) = 0$ et $f(1) = \alpha \cosh 1 + \beta \sinh 1 + h(1) = 0$.

***Rappelons*** que si deux sev $V$ et $W$ sont orthogonaux, alors $V \cap W = \{0\}$, cad ils sont ***nécessairement en somme directe***. La démo est immédiate : si $x \in V \cap W$, alors $x \perp x$, d'où $(x|x) = \|x\|^2 = 0 \implies x = 0$.

*CCC PSI 2014 (inégalité sur trace d'une matrice symétrique)*

**Enoncé 52** Soit $A$ une matrice symétrique réelle non nulle. Montrez $\dfrac{(\operatorname{tr} A)^2}{\operatorname{tr}(A^2)} \leq \operatorname{rg} A$.

$A$ étant ***symétrique réelle***, on lui applique le théorème spectral : il existe une matrice $P$ orthogonale et une matrice $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PD\,{}^tP$. On a $(\operatorname{tr} A)^2 = (\sum_{k=1}^n \lambda_k)^2 = (\operatorname{tr} D)^2$. On sait aussi $\operatorname{rg} A = n - \dim \operatorname{Ker} A$. Comme $A$ est ***diagonalisable***, on a $\dim \operatorname{Ker} A$ est la ***multiplicité*** de 0 dans le polynôme caractéristique. ***Par conséquent***, $\operatorname{rg} A$ est le ***nombre de valeurs propres non nulles***. Notons $J \subset [\![ 1 \dots n ]\!]$ le sous-ensemble constitué des indices de ces valeurs propres non nulles. Autrement dit : $\lambda_k = 0 \iff k \in J$. Ensuite :

$$\Big(\operatorname{tr} A\Big)^2 = \Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k\Big)^2 = \Big(\sum_{k \in J} \lambda_k\Big)^2 = \Big(\sum_{k \in J} 1 \times \lambda_k\Big)^2 \overbrace{\leq}^{(*)} \Big(\sum_{k \in J} \lambda_k^2\Big)\Big(\sum_{k \in J} 1^2\Big) = \Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2\Big) \operatorname{rg} A = \operatorname{tr}\big(A^2\big) \operatorname{rg} A$$

En (*), on a appliqué l'inégalité de **Cauchy**[2]-**Schwarz**[3] au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, cad :

$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k b_k\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^n a_k\Big)^2 \Big(\sum_{k=1}^n b_k\Big)^2$$

***Remarques :***

• L'inégalité demandée provenant uniquement de l'inégalité dez Cauchy-Schwarz, on a même la condition d'égalité qui est le « *vecteur* » des $\lambda_k$ colinéaire au « *vecteur* » des 1. En se rappelant qu'une matrice diagonalisable de valeurs propres 0 et 1 ne peut être qu'une projection $P$, on en déduit que l'égalité est ***réalisée uniquement*** pour les $\alpha P$, avec $P$ matrice de projection. En fait pour une projection $p$, $\operatorname{tr} p^2 = \operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

2. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable, plus de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe et en théorie des groupes.
3. **Hermann Schwarz** : mathématicien allemand (1843-1921).

• Remarquons que $\operatorname{tr}(A^2) = 0$ ssi toutes les valeurs propres sont nulles, ce qui par la ***diagonalisabilité***, amène $A$ nulle, d'où l'hypothèse de l'énoncé qui permet de diviser ensuite par $\operatorname{tr}(A^2)$.

• Pour une matrice quelconque, le rang ***n'est pas en général*** le nombre de valeurs propres non nulles. Il suffit de prendre une matrice triangulaire « *stricte* », cad avec des 0 sur la diagonale. Le nombre de valeurs propres non nulles est 0, par contre, le rang peut prendre toutes les valeurs entre 0 et $n-1$ selon le choix des autres coefficients (mais pas $n$, pourquoi ?)

# 2 Analyse

*CCP PSI 2014 (intégrale à paramètre)*

**Enoncé 94**

**1 )** Donnez l'ensemble de définition de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

**2 )** Calculez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

**3 )** Calculez $f(x-1) - f(x)$ et en déduire une expression de $f(x)$ sous la forme d'une somme. Peut-on obtenir ce résultat par une autre méthode ?

On pose $f(x,t) = \dfrac{te^{-tx}}{e^t - 1}$.

**Q1 )**

- L'application $t \longrightarrow f(x,t)$ est clairement continue sur $\left]0,+\infty\right[$, et ce ***pour tout*** $x$ ***réel***.
- On a $\left|f(x,t)\right| \sim_{t\to0} \left|\dfrac{t\times 1}{t}\right| = 1$. La fonction de $t$ peut donc se prolonger en une fonction continue sur $\left[0,+\infty\right[$ et ce, ***pour tout*** $x$ ***réel***. $t \longrightarrow f(x,t)$ est donc intégrable sur $\left]0,1\right]$ ***pour tout*** $x$ ***réel***.
- On rappelle ici, sans le démontrer, une inégalité « *bien connue* » et fort utile $\forall\, t \in \mathbb{R},\ e^t \geq 1+t$. (C'est une inégalité de convexité). Il suit :
$$\left|f(x,t)\right| \leq \frac{t}{t}e^{-tx} = e^{-tx}$$
Le cours nous apprend que $t \longrightarrow e^{-tx}$ est intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$ ssi $x>0$. ***Attention !*** à ne pas faire l'erreur de raisonnement et d'en déduire le ***ssi*** pour $t \longrightarrow f(x,t)$, seulement ***si*** $x>0$ (car « $\leq$ *non intégrable* » ne donne pas non intégrable !). On essaye une autre méthode, on effectue d'abord un équivalent :
$$\left|f(x,t)\right| \sim_{t\to+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t} = t\,e^{-(x+1)t}$$
Pour $x > -1$, par croissances comparées, on a $t\,e^{-(x+1)t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Par contre, pour $x \leq -1$, $\lim_{t\to+\infty} t\,e^{-(x+1)t} = +\infty$. En se rappelant le cours, qu'en $t = +\infty$, ***si*** la fonction est intégrable et admet une limite, cette limite est ***nécessairement 0*** (çà se comprend, non ?), alors on en déduit que $t \longrightarrow f(x,t)$ est intégrable sur $\left]1,+\infty\right]$ ***ssi*** $x > -1$.

***Conclusion :*** par intersection des différentes conditions sur $x$, il suit $\boxed{\mathrm{Def}\,F = \left]-1,+\infty\right[}$

**Q2 )**

***Méthode 1 par encadrement :***

Cette méthode ne s'applique bien, en général, que si la limite est 0 ou $\infty$ et surtout, si on peut encadrer par des fonctions dont l'intégrale se calcule :

$$\forall\, x>0,\ 0 \leq \left|F(x)\right| = \left|\int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{te^{-tx}}{e^t-1}\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{t}{t}\right| e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-tx}}{-x}\right]_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

Cet encadrement amène l'existence de la limite et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

***Méthode 2 Utilisation du théorème de Lebesgue*[4]*, via la caractérisation séquentielle*** :

Rappelons le ***théorème de caractérisation séquentielle d'une limite*** qui s'applique à des limites finies comme infinies (ainsi qu'à des fonctions dans des espaces vectoriels normés). On se contente ici d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{x\to a} F(x) = \ell \quad\Longleftrightarrow\quad \forall\,(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ tq } x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a,\ \text{ alors } F(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Prenons donc ici une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que $x_n \longrightarrow +\infty$ et considérons $F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{te^{-tx_n}}{e^t-1}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$

- La suite de fonctions $(f_n)$ ***converge simplement*** sur $]0,+\infty[$ vers la fonction nulle qui est bien ***continue***, car $e^{-x_n t} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et les autres termes sont des « *constantes* ».
- ***Domination :***

  Comme $x_n \longrightarrow +\infty$, à partir d'un certain rang $N_0$, on a $x_n \geq 1$.

  $$\forall\, n\geq N_0,\ \left|f_n(t)\right| \leq \left|\frac{t}{t}\right|\ e^{-x_n t} \leq\ e^{-t}$$

  La fonction $t\to e^{-t}$ est clairement ***intégrable*** sur $\mathbb{R}^+$.

Le ***Théorème de Convergence Dominée*** de Lebesgue peut s'appliquer et $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = 0$. Par la caractérisation séquentielle, on a la même conclusion que plus haut, cad $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

**Q3 )**

$$F(x-1)-F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t(x-1)}}{e^t-1} - \frac{te^{-tx}}{e^t-1} = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}(e^t-1)}{e^t-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} te^{-tx}\,\mathrm{d}t$$
$$\underset{\substack{u=t\\ v'=-e^{-tx}/x}}{\overset{\substack{u'=1\\ v=e^{-tx}}}{=}} \left[\frac{-te^{-tx}}{x}\right]_{t=0}^{t\longrightarrow+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}$$

L'ipp est possible directement en $t=+\infty$ car la deuxième intégrale converge visiblement (cela évite de faire $A\longrightarrow+\infty$, c'est une méthode au programme).

$$\begin{aligned}\forall\, x>0,\ F(x-1) &= \Big(F(x-1)-F(x)\Big)+\Big(F(x)-F(x+1)\Big)+\cdots+\Big(F(x+n-1)-F(x+n)\Big)+F(x+n)\\ &= \sum_{k=0}^{n} F(x+k-1)-F(x+k)+F(x+n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}+F(x+n)\end{aligned}$$

lorsque $n\longrightarrow+\infty$, $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+k)^2}+F(x+n)\longrightarrow\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$ puisque cette série converge et que, démontré à la question précédente, $\lim_{n\to+\infty}F(x+n)=0$. Par suite, en faisant tendre $n\to+\infty$, comme $F(x-1)$ est une « *constante* » par

4. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

rapport à $n$, il vient : $F(x-1)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+k)^2}$. En adaptant un peu les indices, $\boxed{F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(x+n)^2}}$

On peut obtenir ce résulat par un ***développement en série*** suivi d'une ***intégration terme à terme*** :

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{te^{-tx}}{e^t-1}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{te^{-t}e^{-tx}}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}t=\int_{]0,+\infty[}te^{-t(x+1)}\frac{1}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}t\overbrace{=}^{(1)}\int_{]0,+\infty[}te^{-t(x+1)}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nt}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{te^{-t(n+x+1)}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t\overbrace{=}^{(2)}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}te^{-t(n+x+1)}\,\mathrm{d}t\overbrace{=}^{(3)}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+x+1)^2}\end{aligned}$$

Le (1) vient du développement en série entière $\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$ licite ici puisque $u=e^{-t}<1$ pour $t\in\,]0,+\infty[$. C'est pour cela qu'on a « *changé* » le $e^t-1$ au dénominateur en multipliant en haut et en bas par $e^{-t}$. Le (2) est une intégration terme à terme possible puisque :

- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction ***continue*** $t\longrightarrow\frac{te^{-tx}}{e^t-1}$.
- On a $\sum_n\int_{]0,+\infty[}|f_n|=\sum_n\frac{1}{(n+x+1)^2}\sim\frac{1}{n^2}$ converge. Le calcul a déjà été fait plus haut, que l'on retrouve en (3).

---

*CCP PSI 2014 (série à terme intégral)*

**Enoncé 71** Nature de la série de terme général $\int_0^1\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}\,\mathrm{d}x$ ?

Voilà une démo qui n'est pas très simple, mais elle fonctionne. La fonction $f_n:x\longrightarrow\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}$ croit sur $[0,1]$ :

$$f_n'(x)=\frac{nx^{n-1}(1+x+\cdots+x^n)-x^n(1+2x+nx^{n-1})}{(1+x+\cdots+x^n)^2}=\frac{\sum_{k=n-1}^{2n-1}nx^k-\sum_{k=n}^{2n-1}(k-n+1)x^k}{(1+x+\cdots+x^n)^2}=\frac{nx^{n-1}+\sum_{k=n}^{2n-1}(2n-1-k)x^k}{(1+x+\cdots+x^n)^2}\geq 0$$

On va couper l'intégrale en 2 par **Chasles**[5] en $1-a_n$ tel que $0<1-a_n<1$ avec $a_n$ que l'on déterminera ensuite :

$$\begin{aligned}0\leq u_n=\int_0^{1-a_n}f_n+\int_{1-a_n}^1f_n&\leq\int_0^{1-a_n}\frac{x^n}{1+x+\cdots+x^n}\,\mathrm{d}x+\int_{1-a_n}^1f_n(1)\,\mathrm{d}x\\&\leq\int_0^{1-a_n}\frac{x^n}{1}\,\mathrm{d}x+\frac{a_n}{n+1}\quad\leq\quad(1-a_n)^n+\frac{a_n}{n+1}\end{aligned}$$

Il ***suffit*** que les deux séries convergent. Pour simplifier, on va chercher $a_n$ sous la forme $a_n=\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha>0$. La convergence de la série du deuxième terme est assurée par le critère de **Riemann**[6], puisqu'équivalent à $\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ avec $1+\alpha>1$. Pour le 1er terme, on écrit :

$$\left(1-a_n\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)=\exp\left(-\frac{1}{n^{\alpha-1}}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2\alpha-1}}+o\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)\right)\overbrace{=}^{(1)}=\exp\left(-\frac{1}{n^{\alpha-1}}+o(1)\right)\overbrace{\sim}^{(2)}\exp\left(-\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right)$$

Le (1) sera assuré par le choix de $\alpha$ tel que $2\alpha-1>0$, soit $\alpha>\frac{1}{2}$ et l'équivalence du (2) par le fait que $\exp(o(1))\xrightarrow[n\to+\infty]{}$

5. **Michel Chasles** : mathématicien français (1793-1880). A introduit en géométrie les grandeurs orientées. Auteur d'un *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.*

6. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction $\zeta$ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

$e^0 = 1$. Par croissances comparées, le dernier terme est un $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ à condition de prendre $\alpha - 1 < 0$. Toutes ces conditions ***suffisantes sont possibles*** par le choix d'un $\alpha$ tel que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

*CCP PSI 2014-2013 (équivalent d'une série de fonctions)*

**ENONCÉ 80** Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$.

**1 )** Déterminez le domaine de définition $D$ de $f$. Y a-t-il convergence normale sur $D$ ? Etudiez la continuité sur $D$.

**2013 :** pas de question sur convergence normale

**2 )** Montrez que $f$ admet une limite en $+\infty$ et déterminez cette limite.

**3 )** Donnez un encadrement de $f(x)$ à l'aide d'une intégrale puis montrez $f(x) \sim_0 \dfrac{2}{x^2}$. **2013 :**équivalent non donné.

**Q1 )** On pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$. Lorsque $x > 0$, par croissances comparées, on a $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc la convergence de la série $\sum f_n(x)$. Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \neq 0$, d'où la divergence. Il suit $D = \text{Def} f = \mathbb{R}^{+*}$.

On a immédiatement que $x \longrightarrow f_n(x)$ est décroissante et positive (même $n = 0$, puisque constante). Il vient $\|f_n\|_{\infty\ \mathbb{R}^{+*}} = \lim_{x\to 0} f_n(x) = +\infty$. Il n'y a donc pas de convergence normale de la série de fonctions sur $D = \mathbb{R}^{+*}$. Il y a par contre, convergence normale sur tout segment $[a, b] \subset ]0, +\infty[$, car

$$\|f_n\|_{\infty\ [a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} \left|f_n(x)\right| = e^{-n\sqrt{a}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

De la continuité de $f_n$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et du ***théorème de continuité*** d'une série de fonctions, on a $f$ continue sur $D = \mathbb{R}^{+*}$.

**Q2 )** On essaye d'appliquer ***le théorème de la double-limite*** :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite de $f_n$ lorsque $x \to +\infty$ existe et vaut à pour $n \neq 0$ et 1 pour $n = 0$, car $f_0(x) = 1$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge ***uniformément car normalement sur*** $[1, +\infty[$

Par suite, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1$.

**Q3 )** La fonction $t \longrightarrow e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc successivement :

$$\forall\, n \geq 1,\ \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq \quad e^{-x\sqrt{n}} \quad \leq \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{N+1} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \leq 1 + \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^{N} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge pour $x > 0$, on peut passer à la limite lorsque $N \to +\infty$, soit :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

On effectue le changement de variables $u = x\sqrt{t}$, qui est bijectif de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ (pour $x > 0$, avec $t = \frac{1}{x^2}u^2$, soit $\mathrm{d}t = \frac{1}{x^2}2u\,\mathrm{d}u$ :

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}\int_0^{+\infty} ue^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{x^2}\lim_{A\to+\infty}\left[(-u-1)e^{-u}\right]_0^A = \frac{2}{x^2}$$

D'où

$$\forall x>0,\ \frac{2}{x^2}\le f(x)\le 1+\frac{2}{x^2}\quad\text{puis}\quad 1\ \le\ \frac{f(x)}{2/x^2}\ \le\ \frac{x^2}{2}+1$$

Par théorème d'encadrement de limites, on en tire $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2/x^2}=1$, soit $f(x)\sim_0 \dfrac{2}{x^2}$

*CCP PSI 2014 (limites d'intégrale avec bornes en x)*

**ENONCÉ 90** Trouvez $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \left|\sin t\right|\mathrm{d}t$.

**1 )** L'intégrale se calculant facilement, il est plus simple de la calculer :

$$\frac{1}{x}\int_0^x \sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^x=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\,\frac{\sin(2x)}{x}\xrightarrow{x\to+\infty}\frac{1}{2}$$

car l'encadrement $0\le\left|\dfrac{\sin(2x)}{x}\right|\le\dfrac{1}{x}$ amène la limite nulle.

**2 )** La deuxième intégrale est un peu plus difficile à calculer. En général, quand il y a une valeur absolue, on essaye de « *couper* » par **Chasles**[5] l'intégrale en tous les changements de signe, ce qui permet « *d'enlever* » la valeur absolue. Ici $\sin t$ change de signe en tous les $k\pi$. On considère l'entier $n_x\in\mathbb{N}$ vérifiant $n_x\pi\le x<(n_x+1)\pi$ (en fait $n_x=E[\frac{x}{\pi}]$, partie entière de $x/\pi$). On procède ensuite comme ci :

$$\begin{aligned}\int_0^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t&=\sum_{k=0}^{n_x-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\sin t\right|\mathrm{d}t+\int_{n_x}^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n_x-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}(-1)^k\sin t\,\mathrm{d}t+\int_{n_x}^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n_x-1}(-1)^k\Big[-\cos t\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{d}t+\int_{n_x}^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n_x-1}(-1)^k(\cos(k\pi)-\cos((k+1)\pi)+\int_{n_x}^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=0}^{n_x-1}(-1)^k((-1)^k-(-1)k+1)+\int_{n_x}^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{n_x-1}2+\int_{n_x}^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=2n_x+\int_{n_x}^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Remarquons que l'encadrement décrit plus haut amène $|x-n_x|\le\pi$ et aussi $\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{n_x}{x}\le\dfrac{1}{\pi}$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n_x}{x}=\dfrac{1}{\pi}$

$$\frac{1}{x}\int_0^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t=\frac{2n_x}{x}+\frac{1}{x}\int_{n_x}^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t\xrightarrow{x\to+\infty}\frac{2}{\pi}\quad\text{car } 0\le\frac{1}{x}\int_{n_x}^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t\le\frac{\pi\times 1}{x}\longrightarrow 0$$

***Remarques :***

• Comme $|\sin t|\le 1$, on a $\sin^2 t\le|\sin t|$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, donc pour $t\in[0,x]$. Par suite

$$\forall x\ge 0,\quad\frac{1}{x}\int_0^x\left|\sin t\right|\mathrm{d}t\ge\frac{1}{x}\int_0^x\sin^2 t\,\mathrm{d}t\quad\text{d'où par passage à la limite}\quad\frac{2}{\pi}\ge\frac{1}{2}\ \text{Ouf!}$$

• Si $x\longrightarrow 0$ la limite est plus facile car c'est un taux d'accroissement en 0 ! Je vous laisse y réfléchir...

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\sin^2 0=0\qquad\qquad\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t=|\sin 0|=0$$

5. **Michel Chasles** : mathématicien français (1793-1880). A introduit en géométrie les grandeurs orientées. Auteur d'un *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.*

# 3 Probabilités

*CCP MP 2015 (tirage de boules sans remise)*

**Enoncé 123** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $n$ boules blanches numérotées de 1 à $n$ et 2 boules noires numérotées de 1 à 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On note $X$ (rp. $Y$) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche (rp. première boule numérotée 1).

**1 )** Déterminez la loi de $X$.

**2 )** Déterminez la loi de $Y$.

**Q1 )** Comme il y a ***tirage sans remise***, une fois les 2 boules noires tirées, on ne peut que tirer, au troisième tirage, une boule blanche. Par conséquent, $X(\Omega)$ est majoré par 3. Les valeurs 1 ou 2 étant clairement possibles, on a $X(\Omega) = \{1,2,3\}$. Il faut donc maintenant déterminer les 3 valeurs $p_1 = P\big((X=1)\big)$, $p_2 = P\big((X=2)\big)$, $p = 3P\big((X=3)\big)$. Rappelons que $P_X$ étant une loi de probabilité sur $X(\Omega)$, alors $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. ***Il suffit*** donc de déterminer 2 de ces valeurs.

***Méthode événementiste :***

Notons $B_i$ ***l'événement*** « *Au $i^e$ tirage, la boule obtenue est blanche* ». Rappelons que la notation $\overline{B_i}$ désigne l'événement contraire qui, ***ici***, est « *Au $i^e$ tirage la boule obtenue est noire* » et que $P(\overline{B_i}) = 1 - P(B_i)$. On a immédiatement, en rappelant aussi que le $\bigcap$ « *correspond* » à un ***et*** tandis que le $\bigcup$ « *correspond* » à un ***ou*** :

$$\begin{aligned}
(X=1) &= B_1 \\
(X=2) &= \overline{B_1} \cap B_2 \\
(X=3) &= \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3 = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}
\end{aligned}$$

En utilisant la ***formule des probabilités composées***, il vient :

$$\begin{aligned}
P\big((X=1)\big) &= P(B_1) = \frac{n}{n+2} \\
P\big((X=2)\big) &= P(\overline{B_1})\ P(B_2 \mid \overline{B_1}) = \frac{2}{n+2}\ \frac{n}{n+1} \\
P\big((X=3)\big) &= 1 - P\big((X=1)\big) - P\big((X=2)\big) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

La probabilité $P(B_2 \mid \overline{B_1})$ se calcule en remarquant que ***sachant*** « *le premier tirage est une boule noire* », il reste $n$ boules blanches dans l'urne et 1 boule noire, soit un total de $n+1$. On pouvait ***aussi*** calculer $P\big((X=3)\big)$ par
$P\big((X=3)\big) = P(\overline{B_1})\ P(\overline{B_2} \mid \overline{B_1}) = \frac{2}{n+2}\ \frac{1}{n+1}$

***Méthode par dénombrement :***

Chaque « *expérience aléatoire $\omega$* » peut se « *modéliser* » par une ***permutation*** de $E = \{B_1, \ldots, B_n, N_1, N_2\}$ (notations évidentes) ou aussi par un $n+2$***-uplet d'éléments distincts*** de ce même ensemble $E$ à $n+2$ éléments (Attention à bien prendre ***distincts*** qui correspond au ***sans remise***). L'univers $\Omega$ est alors de cardinal $\text{Card}\,\Omega = (n+2)!$

L'événement $(X=1) = B_1$ est alors l'ensemble de tous les $n+2$-uplets d'éléments distincts de $E$ où le premier élément est l'une des $n$ boules $B_1, B_2, \dots, B_n$. Les $n+1$ autres éléments étant à prendre distincts (ou comme permutation) des $n+1$ ***éléments restants*** de $E$. Il vient donc, par équiprobabilité :

$$P\big((X=1)\big) = \frac{\text{Card}\,(X=1)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{n \times (n+1)!}{(n+2)!} = \frac{n}{n+2}$$

L'événement $(X=2)$ est alors l'ensemble de tous les $n+2$-uplets d'éléments distincts de $E$ où le premier élément est l'une des 2 boules $N_1$ ou $N_2$, le deuxième l'une des $n$ boules blanches. les $n$ autres éléments sont à prendre distincts (ou comme permutation) des $n$ ***éléments restants*** de $E$. Il vient donc :

$$P\big((X=2)\big) = \frac{\text{Card}\,(X=2)}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{2 \times n \times n!}{(n+2)!} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)}$$

***Remarque :***

Si le tirage s'effectuait ***avec remise***, chaque tirage de boule serait une expérience de type ***succès - échec*** (succès boule blanche $p = \frac{n}{n+2}$). La remise donne ***l'indépendance*** des tirages et $X$ « *mesure* » le premier rang d'apparition d'une boule blanche. $X$ ***suivrait*** donc une ***loi géométrique*** de paramètre $p$, soit $X \hookrightarrow \mathscr{G}\big(\frac{n}{n+2}\big)$. On ***aurait*** donc

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ P\big((X=k)\big) = \frac{n}{n+2}\left(\frac{2}{n+2}\right)^{k-1}$$

***Mais ce n'est pas le cas ici*** , puisqu'il y a ***remise***, donc ***dépendance*** des expériences successives. On le voit bien dans la formule des probabilités composées ! et dans $X(\Omega)$ qui ne vaut pas $\mathbb{N}^*$ !

**Q2 )** C'est à peu près la même question. Le maximum de $Y$ est obtenu lorsque l'on tire d'abord toutes les boules non numérotées 1, qui sont en nombre $n$. Par conséquent le maximum est $n+1$. Il est clair que toutes les valeurs intermédiaires sont atteintes, soit $Y(\Omega) = \{1, 2, \dots, n+1\}$.

Notons $C_i$ ***l'événement*** « *Au i^e^ tirage, la boule obtenue est numérotée 1* ». On a :

$$(X=1) = C_1 \qquad \forall\, 2 \le k \le n+1,\ (X=k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{C_i}\right) \cap C_k$$

A noter, « *l'astuce* » de convenir $C_0 = \emptyset$, soit $\overline{C_0} = \Omega$ qui permet ***d'unifier l'écriture symbolique*** par :

$$\forall\, 1 \le k \le n+1,\ (X=k) = \left(\bigcap_{i=0}^{k-1} \overline{C_i}\right) \cap C_k$$

En utilisant la ***formule des probabilités composées***, il vient :

$$\begin{aligned}P\big((X=k)\big) &= P(\overline{C_0})\times\left(\prod_{i=1}^{k-1} P(\overline{C_i})\mid \overline{C_0}\cap\overline{C_1}\cdots\cap\overline{C_{i-1}})\right)\times P(C_k\mid \overline{C_0}\cap\overline{C_1}\cdots\cap\overline{C_{k-1}})\\ &= 1\times\prod_{i=1}^{k-1}\frac{n+1-i}{n+3-i}\times\frac{2}{n+3-k}\\ &= \frac{n}{n+2}\,\frac{n-1}{n+1}\,\frac{n-2}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+2}{n-k+4}\,\frac{2}{n-k+3}=\frac{2(n-k+2)}{(n+2)(n+1)}\end{aligned}$$

La probabilité $P(\overline{C_i})\mid \overline{C_0}\cap\overline{C_1}\cdots\cap\overline{C_{i-1}})$ se calcule en remarquant que ***sachant*** « *les* $i-1$ *premiers tirages sont des boules non numérotées 1* », il reste alors $n-(i-1)$ boules non numérotées 1 dans l'urne et toujours 2 numérotées, soit un total de $n+2-(i-1)$.

***Remarque :***

***Si*** le tirage s'effectuait ***avec remise***, par un raisonnement similaire à plus haut, chaque tirage de boule ***serait*** une expérience de type ***succès - échec*** (succès boule numérotée 1 $p=\frac{2}{n+2}$). La remise donne ***l'indépendance*** des tirages et $Y$ « *mesure* » le premier rang d'apparition d'une boule numérotée 1. $Y$ ***suivrait*** donc une ***loi géométrique*** de paramètre $p$, soit $Y\hookrightarrow\mathscr{G}\big(\frac{2}{n+2}\big)$.

---

*CCP MP 2015 (couple de variables aléatoires)* ✌

**ENONCÉ 124** Soient $X$ et $Y$ 2 variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $\big(\Omega,\mathscr{A},P\big)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple $(X,Y)$ est donnée par : $\forall\, i,j\in\mathbb{N},\ P\big((X=i)\cap(X=j)\big)=\dfrac{1}{e\,2^{i+1}\,j!}$.

**1 )** Déterminez les lois de $X$ et $Y$.

**2 )** Prouvez que $X+1$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de $X$.
Déterminez l'espérance et la variance de $Y$.

**3 )** Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**4 )** Calculez $P(X=Y)$.

**1 )** On a $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. Comme $Y(\Omega)=\mathbb{N}$, $\Big((Y=n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$ étant un ***système complet d'événements***, on peut appliquer la ***formule des probabilités totales*** :

$$\forall\, i\in\mathbb{N},\ P\big((X=i)\big)=\sum_{j=0}^{+\infty}P\big((X=i)\cap(X=j)\big)=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{e\,2^{i+1}\,j!}=\frac{1}{e\,2^{i+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\frac{e}{e\,2^{i+1}}=\frac{1}{2^{i+1}}$$

De même :

$$\forall\, j\in\mathbb{N},\ P\big((Y=j)\big)=\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{e\,2^{i+1}\,j!}=\frac{1}{e\,j!}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{i+1}}=\frac{1}{e\,j!}\left(\frac{1}{1-1/2}-1\right)=\frac{1}{e\,j!}$$

**2 )** Comme $X(\Omega)=\mathbb{N}$, $(X+1)(\Omega)=\mathbb{N}^*$. D'autre part $\forall\, n\in\mathbb{N}^*, P\big((X+1=n)\big)=P\big((X=n-1)\big)=\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{1}{2}\right)$.

$X+1$ suit bien une ***loi géométrique*** de paramètre $p=\frac{1}{2}$. On en déduit :

$$E(X+1)=\frac{1}{p}=2=E(X)+E(1)=E(X)+1 \text{ d'où } E(X)=1 \text{ et } V(X+1)=V(X)=\frac{1-p}{p^2}=2$$

***Remarques :***

• L'Espérance est linéaire, soit $E(\alpha X+\beta Y)=\alpha E(X)+\beta E(Y)$.

• Par contre la variance ne l'est pas et vérifie :

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}\big(X,Y\big) \qquad V(\alpha X)=\alpha^2 V(X) \quad V(X+b)=V(X)$$

• Par contre, si $X$ et $Y$ sont ***indépendantes***, on a $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$ et d'ailleurs aussi $E(XY)=E(X)E(Y)$

**3 )** Les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes puisque :

$$\forall\, i,\in\mathbb{N},\quad P\big((X=i)\cap(X=j)\big)=\frac{1}{e\,2^{i+1}\,j!}=\frac{1}{2^{i+1}}\times\frac{1}{e\,j!}=P\big((X=i)\big)\times P\big((Y=j)\big)$$

**4 )** L'événement $(X=Y)$ s'écrit comme réunion des événements ***incompatibles*** $\Big((X=Y=n)\Big)_{n\in\mathbb{N}}$. Par suite :

$$\begin{aligned} P\big((X=Y)\big)&=P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X=Y=n)\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\big((X=Y=n)\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}P\big((X=n)\cap(Y=n)\big)\\ &\overbrace{=}^{(*)}\sum_{n=0}^{+\infty}P\big((X=n)\big)\times P\big((Y=n)\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{1}{e\,n!}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(1/2)^n}{n!}=\frac{e^{1/2}}{2e}=\frac{1}{2\sqrt{e}}\end{aligned}$$

(*) se justifie par l'indépendance linéaire de $X$ et $Y$ établie à la question 3.

***Rappelons*** que si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors pour toutes fonctions $f$ et $g$ (correctement définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$), alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes, et que pour tous $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$, les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants.