Quelques corrigés Annales PSI 2013 – Benoit Caritey

mise à jour du 3 mai 2014

Table des matières

1 Algèbre

Mines-Ponts PSI 2013 (endomorphisme de suites) ☜ ✷

Enoncé 14 Soient $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $T \in \mathscr{L}(E)$ qui à $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.
Déterminez les éléments propres de T

1) Sur cet exemple, il semble plus facile de chercher les valeurs propres / vecteurs propres de l'automorphisme inverse $T^{-1} = \zeta$ défini par $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = w_0$ et $u_n = -nw_{n-1} + (n+1)w_n$, pour $n \geq 1$. En effet :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \forall\, u = (u_n) \in E, \quad \Big(\zeta(T(u)\Big)_n = -n(T(u))_{n-1} + (n+1)T(u)_n = -n\,\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k + (n+1)\,\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = u_n$$

et $\Big(\zeta(T(u)\Big)_0 = (T(u))_0 = \frac{1}{1}\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$. On procède par analyse / réciproque :

Analyse :
Soit (w_n) telle que $T^{-1}(w_n) = \lambda(w_n)$. Alors $w_0 = \lambda w_0$ et $(\lambda - n - 1)w_n = -nw_{n-1}$. Il vient ou $\lambda = 1$ ou $w_0 = 0$.
Si $\lambda = 1$, on arrive à $nw_n = nw_{n-1}$ pour $n \geq 1$, soit w_n est une suite constante.
Si $w_0 = 0$, alors la relation $(\lambda - n - 1)w_n = -nw_{n-1}$ amène $w_n = 0$, tant que la quantité $\lambda - n - 1$ ne s'annule pas. Deux sous-cas :

- Si $\lambda \notin \mathbb{N} - \{0, 1\}$, la quantité $\lambda - n - 1$ ne s'annule jamais pour $n \geq 1$. Par suite, $w_n = 0$ pour tout n. Ce ne peut donc être un vecteur propre ou autrement dit $\lambda \notin \mathbb{N} - \{0, 1\}$ ne peut être valeur propre de T^{-1}.
- Considérons le cas $\lambda = n + 1$, avec $n \geq 1$, cad λ entier naturel ≥ 2, que l'on note N ($N = n + 1\ldots$) Alors en « *poursuivant* » la relation de récurrence, on obtient : $\forall\, 0 \leq n < N - 1,\ w_n = 0$ et pour $n > N - 1$:

$$w_n = \prod_{k=N}^{n}\left(\frac{-k}{N-k-1}\right) w_{N-1} = \frac{\prod_{k=N}^{n} k}{(n+1-N)!}\, w_{N-1} = \frac{n!}{(N-1)!(n+1-N)!}\, w_{N-1} = \binom{n}{N-1} w_{N-1}$$

  On s'aperçoit que cette formule « *marche* » pour $n = N - 1$, et même pour $\lambda = 1$ (qui correspond à $N = 1$). En adoptant la définition des coefficients binomiaux étendus (cad vaut 0 dès que le coefficient n'a pas de sens dénombratoire, $\binom{n}{p} = 0$ si $p > n$), elle vaut aussi pour n quelconque. On adopte par commodité cette convention (cela évite de rédiger avec 2 cas)

On a donc démontré que les seules valeurs propres « *possibles* » de T^{-1} sont les $N \in \mathbb{N}^*$ (et donc $\frac{1}{N}$ pour T) d'espace propre associé la droite dirigée par $w^N = (\binom{n}{N-1})_{n\in\mathbb{N}}$.

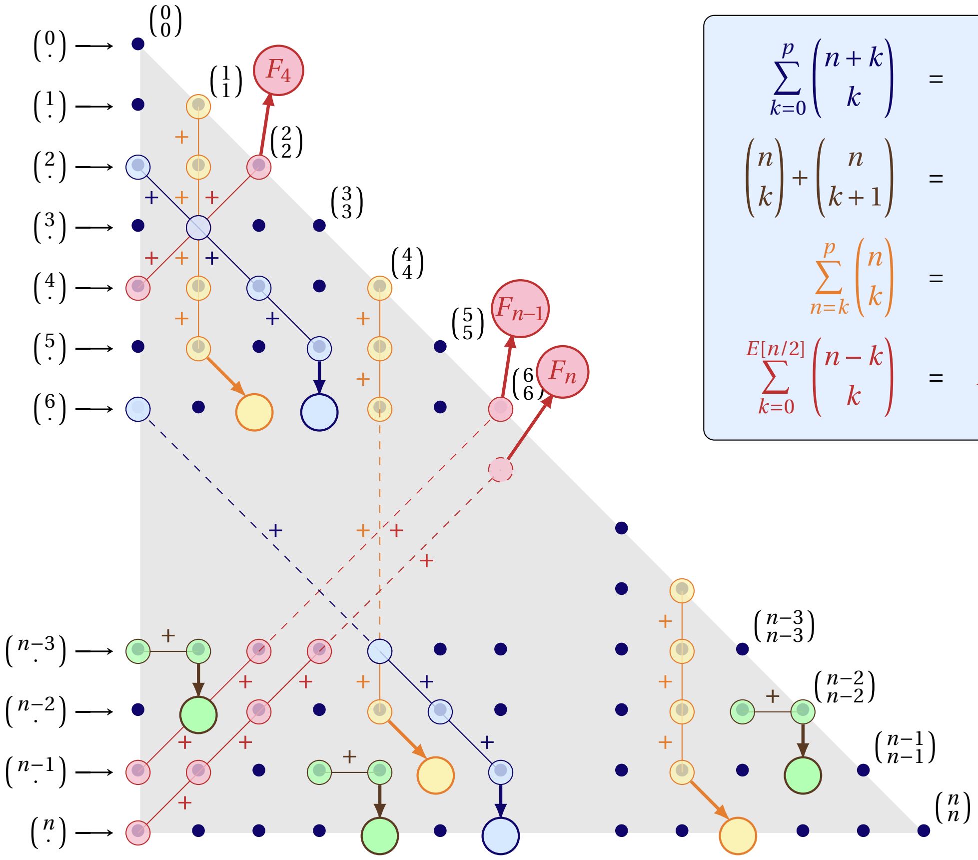
Réciproque :
Là-encore, il est sans doute plus simple de procéder avec T^{-1}, mais on va vérifier sur T :

$$\Big(T(w^N)\Big)_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{N-1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=N-1}^{n}\binom{k}{N-1} \overbrace{=}^{(1)} \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{N} \overbrace{=}^{(2)} \frac{1}{N}\binom{n}{N-1} = \frac{1}{N}(w^N)_n$$

On a utilisé deux formules du triangle de **Pascal** [1], la première est un peu moins connue et se démontre par récurrence sur n :

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \qquad\qquad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

1. **Blaise Pascal** : mathématicien philosophe français (1623-1662). A écrit un traité du triangle arithmétique.



$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{k} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\sum_{n=k}^{p} \binom{n}{k} = \binom{p+1}{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{E[n/2]} \binom{n-k}{k} = F_n$$

Enoncé 19 On considère $f : M \to M + 2^t M$ où M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec n supérieur ou égal à 2.

1) Montrez f endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Donnez les valeurs propres de f.

3) f est-elle diagonalisable ?

4) Calculez $\operatorname{tr} f$ et $\det f$.

1) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(\alpha M + \beta N) = (\alpha M + \beta N) + 2^t(\alpha M + \beta N) = \alpha(M + 2^t M) + \beta(N + 2^t N) = \alpha f(M) + \beta f(N)$ donc f linéaire. Endomorphisme est immédiat.
On aurait aussi pu dire, un peu plus élégant, que $f = Id + 2t$ où t est l'application transposée qui est linéaire (cours). La linéarité de f résulte de la stabilité par + et . de l'ev $(\mathcal{L}(E), +, .)$, où $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ici.

2) ***Méthode 1 :***
Analyse :

$$M + 2^t M = \lambda M \ (M \neq 0) \implies \frac{1-\lambda}{2} M = {}^t M \implies \frac{1-\lambda}{2} {}^t M = M \overbrace{\implies}^{\lambda \neq 1} {}^t M = \frac{2}{1-\lambda} M$$

$\lambda = 1$ est impossible car alors $M = 0$ et si $\lambda \neq 1$, on obtient $\frac{1-\lambda}{2} = \frac{2}{1-\lambda} \implies (1-\lambda)^2 = 4 \implies \lambda = -1, 3$.
Réciproquement :
On vérifie l'existence d'un $M \neq 0$

$$M + 2^t M = 3M \iff {}^t M = M \qquad et \qquad M + 2^t M = -M \iff {}^t M = -M$$

d'où immédiatement $\operatorname{Ker}(f - 3Id) = A_n(\mathbb{R}) \neq \{0\}$ et $\operatorname{Ker}(f + Id) = S_n(\mathbb{R}) \neq \{0\}$, soit $\operatorname{Sp} f = \{-1, 3\}$

Méthode 2 :
Un polynôme annulateur semble facile à trouver, on calcule d'abord :

$$f^2(M) = f(f(M)) = (M + 2^t M) + 2^t(M + 2^t M) = 5M + 4^t M = 2(M + 2^t M) + 3M = (2f + 3Id)(M)$$

$P = X^2 - 2X - 3$ est annulateur, d'où $\operatorname{Sp} f \subset \{-1, 3\}$. Réciproquement, en raisonnant dans $\mathbb{C}$, il y a au moins une valeur propre. S'il n'y avait qu'une valeur propre, f étant ***diagonalisable*** (P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$), selon un raisonnement habituel, f ne pourait être que une homothétie, ($f = -Id$, $f = 3Id$) ce que n'est visiblement pas f. il ne reste donc que $\operatorname{Sp} f = \{-1, 3\}$. (à noter que ce raisonnement ne donne pas les vecteurs propres)

3) ***Méthode 1 :*** f est diagonalisable car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker}(f - 3Id) \oplus \operatorname{Ker}(f + Id)$.
Méthode 2 : Le polynôme annulateur P est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$.

4) Pour la méthode 2, on est obligé de calculer les vecteurs propres, mais c'est immédiat ! (réciproque méthode 1). Comme $\dim S_n(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Ker}(f + 3Id) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n(\mathbb{R}) = \dim \operatorname{Ker}(f - 3Id) = \frac{n(n-1)}{2}$, (c'est du cours, il serait sage de réviser la démonstration de ces dimensions qui correspond au nombre de coefficients du triange supérieur, strict ou pas, d'une matrice carrée d'ordre n) :

$$\operatorname{tr} f = 3 \times \mu(3) - 1 \times \mu(-1) = 3 \dim A_n + (-1) \dim S_n = 3\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = n^2 - 2n$$

$$\det f = (-1)^{\mu(-1)} \times 3^{\mu(3)} = (-1)^{\dim A_n} 3^{\dim S_n} = (-1)^{n(n+1)/2} 3^{n(n-1)/2}$$

CCP PSI 2013 (matrice symétrique complexe)

Enoncé 25

1) Montrez que deux endomorphismes f et g d'un ev de dimension finie diagonalisables et vérifiant $f \circ g = g \circ f$ admettent une base de vecteurs propres commune.

2) Soit M une matrice complexe symétrique de partie réelle $R(M)$ et imaginaire $I(M)$. MOntrez que si $I(M)$ et $R(M)$ commutent, M est diagonalisable.

1) f est diagonalisable. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p (p \le n)$ ses valeurs propres et E_i les espaces propres associés. La diagonalisabilité amène $E_1 \oplus \dots \oplus E_p = E$. Comme g commute avec f, on sait (cours) que les espaces propres E_i de f sont stables par g. On peut alors considérer les endomorphismes g_i induits par g sur E_i, cad $g_i : E_i \to E_i,\ x \to g(x)$. Le cours nous apprend que g_i est aussi diagonalisable, il existe donc une base $\mathscr{B}_i$ de vecteurs propres de g_i, base de E_i. Ces sont donc des vecteurs propres de g mais aussi de f puisqu'ils sont pris dans E_i. Par somme directe égale à E, la base réunion de $\mathscr{B}_i$ est une base de E de vecteurs propres communs à f et g.

2) $M = R(M) + i\ I(M)$ est symétrique donc par linéarité de la transposition, ${}^tM = {}^tR + i\,{}^tI = R + iI$. Par unicité de cette décomposition en matrices réelles, il suit ${}^tR = R$ et ${}^tI = I$, cad $R(M)$ et $I(M)$ sont symétriques ***réelles***, donc diagonalisables. Si $I(M)$ et $R(M)$ commutent, la question précédente nous apprend qu'elles sont ***co-diagonalisables***, cad qu'il existe une ***même*** matrice de passage inversible $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}R(M)P$ et $P^{-1}I(M)P$ soient diagonales. Il vient alors : $P^{-1}MP = P^{-1}(R(M) + iI(M))P = P^{-1}R(M)P + i\ P^{-1}I(M)P$, M est semblable à une matrice diagonale, cad M diagonalisable.

(on notera que la matrice de passage est réelle, cad qu'il existe alors des vecteurs propres « *réels* » pour cette matrice symétrique complexe, dont les « *parties réelles et imaginaires* » commutent)

Enoncé 31 Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AC = CB$. On note r le rang de C.

1) Montrez qu'il existe deux matrices $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversibles telles que $C = PJ_rQ$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Montrez que A et B possèdent au moins r valeurs propres en commun (comptées avec la multiplicité).

1) Raisonnons sur l'endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à C et soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Notons F un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ de dimension $n - r$. Prenons une base de F, $(e_1, \dots, e_r)$ complétée par une base de $\operatorname{Ker} f$ en une base $\mathscr{E}$ de $\mathbb{R}^n$. On sait que f restreint à F réalise un isomorphisme sur $\operatorname{Im} f$. par conséquent, $(f(e_1), \dots, f(e_r))$ est une base de $\operatorname{Im} f$ que l'on complète en une base $\mathscr{F}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors la matrice de f dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ vaut J_r. La formule de changement de base donne alors :

$$J_r = \operatorname{Mat}(f, \mathscr{E}, \mathscr{F}) = \left(P_\varepsilon^{\mathscr{F}}\right)^{-1} \operatorname{Mat}(f, \varepsilon, \varepsilon)\, P_\varepsilon^{\mathscr{E}} = P^{-1}\, C\, Q$$

On a posé $P = P_\varepsilon^{\mathscr{F}}$ et $Q = P_{\mathscr{E}}^{\varepsilon} = \left(P_\varepsilon^{\mathscr{E}}\right)^{-1}$ qui sont bien inversibles.

2) Comme $AC = CB \implies APJ_rQ = PJ_rQB \implies (P^{-1}AP)J_r = J_r(QBQ^{-1})$, et que des matrices semblables ont mêmes valeurs propres (et même polynôme caractéristique, mais pas les mêmes vecteurs propres), il suffit de démontrer le résultat pour $C = J_r$. On suppose donc $AJ_r = J_rB$.

En notant C_i les colonnes de A et L_i les lignes de B :

$$AJ_r = \begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_r & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = J_rB = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $AJ_r = J_rB = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec D_r une matrice carrée d'ordre r. Il suit $A = \begin{pmatrix} D_r & A' \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ B' & B'' \end{pmatrix}$. A et B ont donc en commun (au moins) les r valeurs propres complexes (comptées avec la multiplicité) de la matrice D_r.

Centrale PSI 2013 (réciproque de u diagonalisable $\Longrightarrow$ u^n diagonalisable)☜

Enoncé 32 Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on note $\alpha_i(\lambda)(1 \leq i \leq n)$ les n racines nièmes de λ. Soient $L_i(X)(1 \leq i \leq n)$ les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux $\alpha_i(\lambda)$.

1) Montrez que u diagonalisable implique u^n diagonalisable. Réciproque ?

2) Montrez $\sum_{i=1}^{n} Li = 1$. En déduire $\operatorname{Ker}(u^n - \lambda Id_E) = \oplus_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(u - \alpha_i(\lambda) Id_E)$.

3) Montrez que si u est inversible, alors u^n diagonalisable implique u diagonalisable.

1) ***Méthode 1 :***

Puisque u est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{E}$ de E constituée de vecteurs propres de u. Or si $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, on sait (cours) $u^n(x) = \lambda^n x$ avec $x \neq 0$, donc x vecteur propre de u^n. Il vient que $\mathscr{E}$ est aussi une base de E constituée de vecteurs propres de u^n, donc u^n diagonalisable.

Méthode 2 : En prenant une matrice M de u dans une base quelconque de E, l'hypothèse de diagonalisabilité de u, donc de M, amène l'existence d'une matrice P inversible et D diagonale, telle que $M = PDP^{-1}$. Il vient alors :

$$M^n = (PDP^{-1})^n = P\ D\ \underbrace{P^{-1}P}_{I}\ D\ \underbrace{P^{-1}P}_{I}\ D\ P^{-1} \dots P\ D\ P^{-1} = PD^nP^{-1}$$

D^n étant diagonale, M^n, donc u^n est diagonalisable.

La réciproque est fausse (pour $n \neq 1$!). Pour la dimension 2, il suffit de prendre la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$, de puissance nième égale à l'identité. On donne un contre-exemple matriciel et pour une dimension p supérieure ou égale à 3, il suffit de « *raisonner par blocs* » :

$$J = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} J & O_{2,p-2} \\ O_{p-2,2} & I_{p-2} \end{pmatrix}$$

On a immédiatement $K^n = I_p$ donc est diagonalisable, tandis que K, diagonale par blocs, n'est pas diagonalisable puisque l'un des blocs daigonaux J ne l'est pas, puisque J n'a évidemment aucune valeur propre réelle (ses 2 valeurs propres complexes sont $e^{\pm 2i\pi/n}$).

2)

On sait que les polynomes interpolateurs de **Lagrange**[2] de degré n en $n+1$ valeurs réelles distinctes $a_0, a_1, \dots, a_n$, forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. On sait même (cours) que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$, ses coordonnées (λ_i) vérifient $\alpha_i = P(a_i)$:

$$P(X) = \lambda_0 L_0(X) + \dots + \lambda_n L_n(X) = P(a_0)L_0(X) + \dots + P(a_n)L_n(X)$$

C'est immédiat car, comme les polynômes de Lagrange vérifient par définition $P(a_i) = \delta_{ij}$, il suffit de prendre la valeur de P en a_i pour obtenir $\lambda_i = P(a_i)$.

En revenant à cet exo, on constate d'abord que les racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont toutes distinctes (cad en supposant $\alpha \neq 0$), le polynôme constant 1 s'écrit dans la base des $(L_i(X))$ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (attention $n-1$) et sa ième coordonnée vaut $\alpha_i = 1(a_i(\lambda)) = 1$. Il suit $1 = L_0(X) + L_1(X) + \dots + L_n(X)$. Cette égalité, on « *l'applique* » à u, pour obtenir une égalité entre polynômes d'endomorphisme (en u) : $Id = L_1(u) + \dots + L_n(u)$. Pour montrer la somme directe

2. **Joseph-Louis Lagrange** : français (1736-1813). Fondateur du calcul des variations. Importants travaux en algèbre, théorie des nombres et géométrie. Connu pour les théorèmes éponymes en théorie des groupes et fractions continues.

demandée, il suffit de démontrer l'égalité (par la double inclusion), car les espaces propres sont toujours en somme directe (cours), et si $\alpha_i(\lambda)$ n'est pas une valeur propre de u, $\operatorname{Ker}(u-\alpha_i(\lambda)Id_E) = \{0\}$ et alors la somme directe est encore vraie.

- Soit $x \in \operatorname{Ker}(u-\alpha_1(\lambda)Id_E)+\cdots+\operatorname{Ker}(u-\alpha_n(\lambda)Id_E)$, alors $x = x_1+\cdots+x_n$, avec $u(x_i) = \alpha_i(\lambda)x_i$, puis $u^n(x_i) = (\alpha_i(\lambda))^n x_i = \lambda x_i$ et par linéarité on arrive à $u^n(x) = \lambda x$, cad $x \in \operatorname{Ker}(u^n - \lambda Id_E)$
- Soit $x \in \operatorname{Ker}(u^n-\lambda Id_E)$, alors $u^n(x) = \lambda x$. D'autre part, en reprenant la remarque plus haut, $x = Id(x) = (L_1(u)+\cdots+L_n(u))(x) = L_1(u)(x)+\cdots+L_n(u)(x)$. En posant $x_i = L_i(u)(x)$, on obtient :

$$\Big(u-\alpha_i(\lambda)Id_E\Big)(x_i) = \Big(u-\alpha_i(\lambda)Id_E\Big)\circ\Big(L_i(u)\Big)(x) = \Big((X-\alpha_i(\lambda))L_i(X)\Big)(u)(x)$$
$$\overbrace{=}^{(1)}\gamma\Big(\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i(\lambda))\Big)(u)(x) = \gamma\Big(X^n-\lambda\Big)(u)(x) = \gamma\Big(u^n-\lambda Id_E\Big)(x) = 0$$

  La propriété (1) vient du fait que le polynôme $L_i(X)$ a pour racines tous les α_j racines nièmes de λ, sauf α_i justement …. Le coefficient dominant, noté γ, sans intérêt ici, est en fait le coefficient « *qui fait* » 1 en α_i, soit $\gamma = 1/\prod_{j\neq i}(\alpha_i-\alpha_j)$.

  On vient donc de montrer $x_i \in \operatorname{Ker}(u-\alpha_i(\lambda)Id_E)$, puis finalement $x \in \operatorname{Ker}(u-\alpha_1(\lambda)Id_E)+\cdots+\operatorname{Ker}(u-\alpha_n(\lambda)Id_E)$

3) Supposons u^n diagonalisable. Notons $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ ses valeurs propres distinctes. On sait $E = \operatorname{Ker}(u^n-\lambda_1 Id_E)\oplus\dots\oplus\operatorname{Ker}(u^n-\lambda_p Id_E)$. Comme u est inversible, $\lambda_i \neq 0$, on peut donc appliquer la question précédente :

$$E = \Big(\bigoplus_{i_1=1}^{n}\operatorname{Ker}(u-\alpha_{i_1}(\lambda_1)Id_E)\Big)\oplus\dots\oplus\Big(\bigoplus_{i_p=1}^{n}\operatorname{Ker}(u-\alpha_{i_p}(\lambda_p)Id_E)\Big) = \bigoplus_{j=1}^{p}\bigoplus_{i_j=1}^{n}\operatorname{Ker}\Big(u-\alpha_{i_j}(\lambda_j)Id_E\Big)$$

Notons que parmi ces ev-noyaux, certains ne sont pas des espaces propres, cad ceux pour lesquels $\operatorname{Ker}\Big(u-\alpha_{i_j}(\lambda_j)Id_E\Big) = \{0\}$, mais alors ils sont « *inutiles* » dans la somme , on peut donc les « *enlever* » et alors E est bien la somme directe d'espaces propres de u, soit u diagonalisable.

Enoncé 34 Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

1) Montrez $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}\varphi^2 \oplus \operatorname{Ker}(\varphi - 2Id)$.

2) Déterminez une base dans laquelle la matrice de φ est $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $g^2 = \varphi$. Montrez que $\operatorname{Ker}\varphi^2$ est stable par g. En déduire qu'un tel g n'existe pas.

1)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Le premier système élementaire donne $\operatorname{Ker} M^2 = \{(x,y,z) | x+y-z=0\}$ Une base est $((1,-1,0),(1,0,1))$. Pour le deuxième :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -x+y-z & = & 0 \\ -x+y-3z & = & 0 \\ -x+y+-2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & y \\ y & = & y \\ z & = & 0 \end{array}\right.$$

Une base est $(1,1,0)$. Comme $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, la réunion est une base de $\mathbb{R}^3$, et donc (cours) $\operatorname{Ker}(M^2) \oplus \operatorname{Ker}(M-2I) = \mathbb{R}^3$.

Remarque : En regardant la question d'après, on voit que les valeurs propres sont 0 et 2. 0 est double et on n'a pas φ diagonalisable. Sinon l'énoncé aurait demandé plutôt $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Ker}(\varphi - 2Id)$. En fait $\dim(\operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Ker}(\varphi - 2Id)) = 1+1 = 2 < 3$. On rappelle la suite itérée des noyaux, en particulier $\operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\varphi^2$. Ici, l'inclusion ests stricte, et on a $\dim(\operatorname{Ker}\varphi^2 \oplus \operatorname{Ker}(\varphi - 2Id)) = 2+1 = 3$. Par un raisonnement analogue, laissé au lecteur, $X(X-2)$ ne peut être annulateur, mais par contre $X^2(X-2)$ l'est. C'est d'ailleurs le polynôme caractéristique (à $-$ près), et le plus petit polynôme annulateur (du point de vue du degré).

2)

Analyse : Si une telle base (e_1, e_2, e_3) existe, alors $\varphi(e_1) = 0.e_1$ $\varphi(e_2) = e_1$ $\varphi(e_3) = 2e_3$. d'ou e_3 vecteur propre associé à 2. Puis $\varphi^2(e_2) = \varphi(e_1) = 0$. On a donc $e_2 \in \operatorname{Ker}(\varphi^2) - \operatorname{Ker}(\varphi)$ et $e_1 = \varphi(e_2)$

Réciproque : Avec le calcul de Q1, on prend $e_3 = (1,1,0)$, $e_2 = (1,0,1)$. On calcule, via la matrice M, $\varphi(e_2) = (0,-4,-4)$. Si $\varphi(e_2)$ était nul, on aurait pris l'autre, cad $(1,-1,0)$. on pose alors $e_1 = (0,-4,-4)$. C'est bien une base de $\mathbb{R}^3$, puisque :

$$\det_{\varepsilon}(e_1, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Par construction, la matrice de φ dans cette base $\mathscr{B}$ a la forme voulue.

Remarque : Comme $(e_1, e_2) \in \operatorname{Ker}\varphi^2$, $\mathscr{B}$ est en fait une base adaptée à la décomposition en somme directe de Q1.

3)

Par l'absurde, s'il existe g tel que $g^2 = \varphi$, comme $\varphi^2 = g^4$, cad est un polynôme en g, alors φ^2 et g commutent (φ et g aussi) et d'après le cours, $\operatorname{Ker}\varphi^2$ est stable par g (et d'ailleurs $\operatorname{Ker}(\varphi - 2Id)$ aussi).

Méthode 1 :

En considérant sa matrice G dans une base adaptée à la décomposition en somme directe de Q1, par exemple la base $\mathscr{B}$, la matrice G de g est nécessairement diagonale par blocs (cours sur les sev stables) d'où :

$$G^2 = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}^2 = T \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + bc & = & 0 \\ ac + cd & = & 0 \\ bc + d^2 & = & 0 \\ ab + bd & = & 1 \end{cases}$$

En considérant L_2 et L_4, on obtient $c = 0$ et en réinjectant dans L_1 et L_3, $a = d = 0$ qui amène l'absurdité dans L_4

Méthode 2 :

En considérant g' l'endomorphime induit par g sur $\operatorname{Ker}\varphi^2$, la matrice de g'^2 (dans la base (e_1, e_2)) est $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, matrice visiblement nilpotente telle que son carré vaut 0. D'où $(g'^2)^2 = 0$. D'où g' est nilpotente et comme on est en dimension 2, $g'^2 = 0$. Absurde.

Remarque : On a utilisé le résultat déjà démontré en exercice, que je ne redémontre pas ici, si f est nilpotent en dimension n, on a nécessairement $f^n = 0$. Notez bien que ce n'est pas évident à priori ! Il provient du fait, que si on prend $x \notin \operatorname{Ker} f^{p-1}$, où p est l'indice de nilpotence, alors $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre, d'où $p \leq n$.

Mines-Ponts PSI 2013 ☜ ✷ (dimension de commutant)

ENONCÉ 41 Déterminer la dimension du commutant de $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice diagonalisable M, dont les valeurs propres sont λ_i $1 \leq i \leq p \leq n$ de multiplicité m_i, la dimension du commutant est $\sum_{i=1}^p m_i^2$. En effet, comme $MN = NM \implies PDP^{-1}N = NPDP^{-1} \implies D(P^{-1}NP) = (P^{-1}NP)D$, cela revient à chercher la dimension de l'ev des matrices commutant avec D. On raisonne par blocs, en nommant $D_i = \lambda_i I_{m_i}$ le bloc d'ordre m_i et possédant des λ_i sur la diagonale. Malgré les apparences, les blocs n'ont pas tous la même taille, et les blocs qui ne sont pas sur la diagonale peuvent ne pas être carrés :

$$\begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & \dots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & \dots & \dots & & C_{pp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & \dots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ C_{p1} & \dots & \dots & & C_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D_p \end{pmatrix}$$

$\iff \forall\, 1 \leq i,j \leq p, \quad D_i C_{ij} = C_{ij} D_j \iff \lambda_i I_{m_i} C_{ij} = \lambda_j C_{ij} I_{m_j} \iff (\lambda_i - \lambda_j) C_{ij} = 0 \iff \forall\, i \neq j,\ C_{ij} = 0$

Les matrices qui commutent sont donc des matrices diagonales par blocs dont les blocs diagonaux C_{ii} sont de taille m_i, à m_i^2 coefficients indéterminés.

En revenant à l'exo, la matrice étant diagonalisable puisque symétrique réelle, les multiplicités possibles des valeurs propres sont, ***à priori***, $(1,1,1)$, $(1,2)$ ou 3 qui « *donnent* » respectivement comme multiplicité du commutant 3, 5 ou 9. Notons que le dernier cas correspond à une matrice à une seule valeur propre (notée λ) diagonalisable, qui ne peut-être que λI. Onsait alors que tout $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec I et on retrouve bien la dimension 9. Dans cet exo, ce cas arrive pour $b = c = 0$. Donc on suppose désormais $b \neq 0$ ou $c \neq 0$. On a alors que $\dim \operatorname{com}(A) = 3$ ssi toutes les valeurs propres sont distinctes (sinon c'est 5). On calcule d'abord le polynôme caractéristique (calcul laissé au lecteur) :

$$\chi_A = -X^3 + 3aX^2 + (c^2 + 2b^2 - 3a^2)X - (c^2 a - a^3 + 2ab^2 + c^3 - 2cb^2)$$

Méthode 1 :

On remarque que $a - c$ est valeur propre, puisque, en posant $X = (1,0,-1) \neq 0$, $AX = (a-c)X$. On divise alors χ_A par le polynôme $X - a + c$ et on arrive (au signe près) : $Q(X) = X^2 - (2a+c)X + a^2 + ca - 2b^2$. On calcule $\Delta = c^2 + 8b^2 \neq 0$. Ces deux racines sont donc distinctes. Il y a une valeur propre double ssi :

$$Q(a-c) = 0 \iff (a-c)^2 - (2a+c)(a-c) + a^2 + ca - 2b^2 = 0 \iff 2c^2 - 2b^2 = 0 \iff b = \pm c$$

Conclusion : $b = c = 0$: $\dim \operatorname{com} A = 9$ $\quad b = \pm c \neq 0$: $\dim \operatorname{com} A = 5$ sinon $\dim \operatorname{com} A = 3$

Méthode 2 : (si on n'a pas remarqué de valeur propre)

Les valeurs propres de A sont distinctes ssi le polynôme caractéristique $P = \chi_A$ n'a aucune valeur propre (au moins) double, cad ssi P et P' n'ont aucune valeur propre en commun ssi le pgcd $P \wedge P' = 1$. On rappelle, pour les calculs suivants, que si $A = BQ + R$, alors $A \wedge B = B \wedge R$ et que $A \wedge B = \alpha A \wedge \beta B$ $(\alpha, \beta \neq 0)$. On calcule, en diminuant successivement les degrés, comme une division euclidienne, sauf qu'on « *adapte* » les coefficients dominants au fur et à mesure :

$$P = -\chi_A = X^3 - 3aX^2 + (-c^2 - 2b^2 + 3a^2)X + (c^2a - a^3 + 2ab^2 + c^3 - 2cb^2) \qquad P' = 3X^2 - 6aX + (-c^2 - 2b^2 + 3a^2)$$

$$Q = 3P - XP' = -3aX^2 + 2(-c^2 - 2b^2 + 3a^2)X + 3(c^2a - a^3 + 2ab^2 - 2cb^2)$$
$$R = -\frac{1}{2}\left(aP' + Q\right) = (c^2 + 2b^2)X + (3cb^2 - 2ab^2 - ac^2)$$

$P \wedge P' = 3P \wedge P' = P' \wedge Q \overbrace{=}^{a\neq 0} aP' \wedge Q = Q \wedge R$. Comme on est arrivé à un polynôme du premier degré (R), le pgcd vaut 1 (ou ils n'ont pas de racine complexe en commun) ssi sa racine n'est pas racine de « *l'autre* ».
En résumé P a une racine (au moins) double ssi $Q(\alpha) = Q\left(\frac{-3cb^2+2ab^2+ac^2}{c^2+2b^2}\right) \neq 0$ On note $\omega = c^2 + 2b^2$

$$\begin{aligned}
Q(\alpha) &= -3a\left(\frac{-3cb^2 + 2ab^2 + ac^2}{c^2 + 2b^2}\right)^2 + 2\left(-c^2 - 2b^2 + 3a^2\right)\left(\frac{-3cb^2 + 2ab^2 + ac^2}{c^2 + 2b^2}\right) + 3\left(c^2a - a^3 + 2ab^2 - 2cb^2\right)\\
&= \frac{1}{\omega^2}\left(-3a(-3cb^2 + a\omega)^2 + 2\omega(3a^2 - \omega)(-3cb^2 + a\omega) + 3\omega^2(-a^3 + a\omega - 2cb^2)\right)\\
&= \frac{1}{\omega^2}\left(a(\omega^3 - 27c^2b^4)\right) = \frac{a}{\omega^2}\left((c^2 + 8b^2)(b + c)^2(b - c)^2\right)
\end{aligned}$$

On retrouve bien le cas $b = \pm c$.

Remarques :

- Il y a un « *outil* » pratique pour les polynômes, mais qui n'est pas au programme qui est le résultant noté R. On a $R(P,Q) = 0 \iff P,Q$ ont une racine complexe en commun. Maple donne immédiatement par la commande `factor(resultant(P,diff(P,X),X));` $-4(c^2 + 8b^2)(-c + b)^2(b + c)^2$
- Pour une matrice diagonalisable, le cas dim com $A = n$ (ici 3) correspond au cas où toutes les valeurs propres sont simples mais aussi au cas où ***toutes*** les matrices qui commutent avec A peuvent s'écrire comme des polynômes en A. Par le théorème de **Cayley**[3]-**Hamilton**[4], dès que la dimension du commutant dépasse strictement n, il existe des matrices commutant avec A qui ne peuvent pas s'écrire comme un polynôme en A.

3. **Arthur Cayley** : mathématicien anglais (1821-1895). Un des inventeurs du calcul matriciel.
4. **William Rowan Hamilton** : mathématicien irlandais (1805-1865). Connu pour la découverte des quaternions.

ENONCÉ 48 Soient $n \geq 2$ et pour $0 \leq k \leq n$, $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

1) Montrez que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Exprimez $(1, X, \dots, X^n)$ dans la base prédédente.

1) $(P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car :

- Ses éléments sont bien dans $R_n[X]$ puisque $\deg P_i = n \leq n$.
- Le cardinal de la famille est bien égal à $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$
- La famille est libre :

  Méthode 1 : Prenons une famille de scalaires $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ telle que $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_n P_n = 0$. Après avoir constaté que $P_k(0) = 0$, sauf pour $k = 0$, on prend la valeur en $X = 0$, il vient $\alpha_0 = 0$. On arrive à :
  $\alpha_1 P_1 + \dots \lambda_n P_n = X(\alpha_1(1-X)^{n-1} + \alpha_2 X(1-X)^{n-2} + \dots + \alpha_n X^{n-1}(1-X)^0) = 0$
  On « *divise* » par X et on prend à nouveau $X = 0$ qui amène à $\alpha_1 = 0$. On réitère ce processus et à la $n-1$ étape, on arrive à $X(\alpha_{n-1}(1-X) + \alpha_n X) = 0$ qui amène $\alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$.

  Méthode 2 : Par le binôme de **Newton**[5] $P_k = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} X^{k+i}$. Il suit que la matrice de passage Q de la base $(1, X, \dots, X^n)$ à la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est triangulaire inférieure (la $k$ième colonne « *commence* » à X^k) et que les éléments sur la diagonale sont $(-1)^0\binom{n-k}{0} = 1$. Donc $\det Q = 1 \neq 0$.

2)

Méthode 1 : En appelant $\mathscr{B} = (P_1, \dots, P_n)$ et ε la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, on a déjà vu $Q = P_\varepsilon^\mathscr{B}$. Les coordonnées de la base canonique dans la base $\mathscr{B}$ sont obtenues par les colonnes de $P_\mathscr{B}^\varepsilon = Q^{-1}$. On inverse donc la matrice triangulaire inférieure Q. On remarque que la matrice Q correspond ***aussi*** à la matrice de l'endomorphisme $\varphi : P(X) \to (1-X)^n P(\frac{X}{1-X})$: en effet, la $k+1$-ième colonne correspond $\varphi(X^k) = (1-X)^n (\frac{X}{1-X})^k = P_k$! On vérifie immédiatement que φ^{-1} est l'endomorphisme $\zeta : P(X) \to (1+X)^n P(\frac{X}{1+X})$, puisque

$$\zeta(P_k) = (1+X)^n \left(\left(\frac{X}{1+X}\right)^k \left(1 - \left(\frac{X}{1+X}\right)\right)^{n-k} \right) = (1+X)^n \frac{X^k}{(1+X)^k} \frac{1^{n-k}}{(1+X)^{n-k}} = X^k$$

Les colonnes de la matrice inverse s'obtiennent donc, de manière similaire, par le développement de $X^k(1+X)^{n-k} = \sum_{i=1}^{n-k} \binom{n-k}{i} X^{k+i}$. Les coordonnées de X_k dans la base $\mathscr{B}$ sont donc, par le même raisonnement à l'envers, ces coefficients, soit :

$$X^k = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} P_{k+i} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} P_i$$

5. **Isaac Newton** : anglais (1643-1727). Partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Connu pour la formule du binôme et la méthode éponyme d'approximation des zéros d'une fonction.

ENONCÉ 57 Soit H une matrice carrée complexe de rang 1.

1) Montrez qu'il existe une matrice colonne A et une matrice ligne B telles que $H = AB$.

2) Montrez $H^2 = \operatorname{tr}(H)H$.

3) Donnez le polynôme caractéristique de H.

4) Donnez une condition nécessaire ou suffisante pour que $H + I_n$ soit inversible. Donnez alors son inverse.

1) On rappelle d'abord que si X, Y sont des matrices colonnes, alors ${}^tXY$ désigne le réel (matrice 1×1) produit scalaire $\sum_{k=1}^n x_k y_k$, alors que, au contraire, X^tY désigne une matrice $n \times n$ dont le coefficient d'indice (i, j) est $x_i y_j$ (c'est une simple application de la formule-produit déjà fait en cours et que je ne refais pas ici, il est dans un de mes corriges). C'est d'ailleurs même une matrice de rang ≤ 1, puisque toutes les colonnes sont colinéaires à X (en fait le rang est 0 ssi $X = 0$ ou $Y = 0$)
Revenons à notre exo. Si H est de rang 1, toutes les colonnes sont colinéaires à un vecteur $A \in \mathbb{R}^n$, cad $C_j = b_j A$. Le coefficient (i, j) de H est égal à $a_i b_j$, cad correspond au coefficient de la matrice A^tB', où B' est la matrice colonne de coefficients (b_i). En posant $B = {}^tB'$, on a bien une matrice-ligne et le résultat est acquis.

2)
Méthode 1 (plus élégante) :

$$H^2 = ABAB = A\underbrace{{}^tB'\,A}_{(A|B')_{can}}{}^tB' = (A|B')A\,{}^tB' = \sum_{k=1}^n a_i b_i\, H = \operatorname{tr}(H)H$$

Méthode 2 (plus calculatoire) :

$$H = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_2b_1 & \dots & \dots & a_nb_1 \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \dots & \dots & a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \dots & \dots & a_nb_n \end{pmatrix} \Longrightarrow H^2 = \begin{pmatrix} va_1b_1 & va_2b_1 & \dots & \dots & va_nb_1 \\ va_1b_2 & va_2b_2 & \dots & \dots & va_nb_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ va_1b_n & va_2b_n & \dots & \dots & va_nb_n \end{pmatrix} = vH = \operatorname{tr}(H)H$$

où on a utilisé la formule-produit : $\left[H^2\right]_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^n a_i b_k a_k b_j = \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right) a_i b_j$ et posé $v = \sum_{k=1}^n a_k b_k = \operatorname{tr}(H)$.

3) Comme $\operatorname{rg} H = 1$, par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} H = n - 1$ et donc 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. La valeur propre « *manquante* » (qui peut être 0) est obtenue par la trace : $\operatorname{tr}(H) = (n-1)\times 0 + \lambda \implies \lambda = \operatorname{tr}(H)$ Le polynôme caractéristique est donc $\chi_H(x) = (-1)^n X^{n-1}(X - \operatorname{tr}(H))$.

4) Selon le cours, $H + I_n = H - (-1)I_n$ est inversible ssi -1 n'est pas valeur propre de H ssi $\operatorname{tr}(H) \neq -1$ (puisque c'est la seule valeur propre (éventuellement) non nulle).

On cherche alors, usuellement, son inverse sous la forme $I_n + \lambda H$. Il vient :

$$I_n = (H + I_n)(\lambda H + I_n) = \lambda H^2 + (1+\lambda)H + I_n = (1 + \lambda + \lambda \operatorname{tr}(H))H + I_n \iff \lambda = \frac{-1}{1 + \operatorname{tr}(H)}$$

CCP PSI 2013 (minimum lié à un endomorphisme symétrique positif)

ENONCÉ 75 Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ euclidien de valeurs propres strictement positives.

1) Prouvez qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ dans la quelle la matrice est diagonale.

2) Prouvez que $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $< f(x), x >$ est strictement positif.

3) Soit u un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$. Montrez que g définie par $g(x) = \frac{1}{2} < f(x), x > - < u, x >$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimez les dérivées partielles de g en fonction des vecteurs de la base B. Montrez que g admet un unique point critique en c et qui est un minimum global.

1) Endomorphisme symétrique réel, cours...

2) f étant un endomorphisme symétrique, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de vecteurs propres de E. $f(e_i) = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \geq 0$ par hypothèse. Tout vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ s'écrit $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Par suite :

$$\begin{aligned}\left(f(x) \,\middle|\, x\right) &= \left(f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) \,\middle|\, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j\right) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i) \,\middle|\, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i e_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_i \left(e_i \,\middle|\, e_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j \lambda_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \geq 0\end{aligned}$$

3) L'application f linéaire est C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, et le produit scalaire $(x, y) \to \left(x \,\middle|\, y\right)$ est aussi C^∞ en tant qu'application bilinéaire. Par suite l'application g est C^∞, donc $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.

Méthode 1 : On se place dans la BON vue plus haut et on raisonne analytiquement, cad par les coordonnées. On va appeler, par abus de langage, g cette application. u est de coordonnées (u_i). On a alors

$$g(x) = g^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 - \sum_{k=1}^n u_k x_k \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \lambda_i x_i - u_i = \left(e_i \,\middle|\, f(x) - u\right)$$

On rappelle que la ième coordonnée de z dans une BON est donnée par $(e_i|z)$. Les points critiques sont définis par les dérivées partielles nulles. D'autre part, toutes les valeurs propres de f étant non nulles, f est un isomorphisme. Il vient, pour tout $1 \leq i \leq n$, $(e_i|f(x) - u) = 0$, soit, comme toutes ses coordonnées sont nulles, $f(x) - u = 0$, soit $c = x = f^{-1}(u)$. Notons que c a pour coordonnées $\frac{1}{\lambda_i} u_i$. Pour vérifier que c est un minimum global, on vérifie $g(x) - g(c) \geq 0$:

$$\begin{aligned}g(x) - g(c) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 - \sum_{k=1}^n u_k x_k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{u_k^2}{\lambda_k^2} + \sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{\lambda_k} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n u_k x_k + \sum_{k=1}^n \frac{u_k^2}{\lambda_k}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k \left(x_k - \frac{1}{\lambda_k} u_k\right)^2 \geq 0\end{aligned}$$

Méthode 2 : f étant linéaire, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) = f$ et, pour toute application bilinéaire B, et applications différentiables k, h $d[B(k(.), h(.)](x) : y \to B(dk(x)(y), h(x)) + B(k(x), dh(x)(y))$. Par suite :

$$dg(x)(y) = \frac{1}{2}\left(df(x)(y) \,\middle|\, x\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) \,\middle|\, dId(x)(y)\right) - \left(u \,\middle|\, y\right) = \frac{1}{2}\left(f(y) \,\middle|\, x\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) \,\middle|\, y\right) - \left(u \,\middle|\, y\right) = \left(f(x) - u \,\middle|\, y\right)$$

On a utilisé f endomorphisme symétrique. Les points critiques c sont obtenus par $dg(c)$ application nulle, ce qui amène $f(c) - u = 0$, soit $c = f^{-1}(u)$ car f isomorphisme comme déjà vu plus haut.

$$
\begin{aligned}
g(x) - g(f^{-1}(u)) &= \frac{1}{2}\left(f(x)\,\middle|\,x\right) - \frac{1}{2}\left(f(f^{-1}(u))\,\middle|\,f^{-1}(u)\right) - \left(u\,\middle|\,x\right) + \left(u\,\middle|\,f^{-1}(u)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(f(x)\,\middle|\,x\right) + \frac{1}{2}\left(f(f^{-1}(u))\,\middle|\,f^{-1}(u)\right) - \left(u\,\middle|\,x\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(f(x-f^{-1}(u))\,\middle|\,x-f^{-1}(u)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x)\,\middle|\,f^{-1}(u)\right) + \frac{1}{2}\left(f(f^{-1}(u))\,\middle|\,x\right) - \left(u\,\middle|\,x\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(f(x-f^{-1}(u))\,\middle|\,x-f^{-1}(u)\right) + \underbrace{\frac{1}{2}\left(x\,\middle|\,f(f^{-1}(u))\right) + \frac{1}{2}\left(f(f^{-1}(u))\,\middle|\,x\right) - \left(u\,\middle|\,x\right)}_{0}\\
&= \frac{1}{2}\left(f(x-f^{-1}(u))\,\middle|\,x-f^{-1}(u)\right) \geq 0
\end{aligned}
$$

ENONCÉ 78 Soit $a, b \in \mathbb{R}^3$. On note $f_a : x \in \mathbb{R}^3 \to a \wedge x$.

1) Trouvez l'adjoint de f_a et $f_a \circ f_b$.

2) Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que $f_a \circ f_b$ soit auto-adjoint.

3) Calculez $f_a \circ f_b(a)$ et $f_a \circ f_b(a \wedge b)$.

4) L'endomorphisme $f_a \circ f_b$ est-il diagonalisable ?

1) On rappelle (cours) une des propriétés du produit vectoriel, où det définit le produit mixte (cad le déterminant dans une base orthonormée directe) : $(x \wedge y|z) = \det(x, y, z)$. Il vient

$$\forall\, x, y \in E, \quad \Big(f_a(x) \Big| y\Big) = \det\Big(a, x, y\Big) = -\det\Big(x, a, y\Big) = \Big(x \Big| -a \wedge y\Big) = \Big(x \Big| -f_a(y)\Big)$$

On a donc $f_a^* = -f_a$, cad f_a endomorphisme antisymétrique. Des propriétés sur l'adjoint : $(f_a \circ f_b)^* = f_b^* \circ f_a^* = f_b \circ f_a$.

2)
$$\begin{aligned}(f_a \circ f_b)^* = f_b \circ f_a = f_a \circ f_b &\iff \forall\, x \in E,\ a \wedge (b \wedge x) = b \wedge (a \wedge x) \\ &\iff (a|x)b - (a|b)x = (b|x)a - (b|a)x \iff \forall\, x \in E, (a|x)b = (b|x)a\end{aligned}$$

En prenant $x \notin \mathbb{R}a^{\perp}$, on arrive à (a, b) lié. Réciproquement si (a, b) lié, par exemple a colinéaire à b (cad $a = \lambda b$), alors $f_a \circ f_b = \lambda f_a^2$ est bien un endomorphisme symétrique.

Remarques :

- On a utilisé la formule du double-produit vectoriel : $x \wedge (y \wedge z) = (x|z)y - (x|y)z$.
- En posant $a' = \frac{a}{\|a\|}$, comme $a \wedge (a \wedge x) = (a|x)a - \|a\|^2 x = -\|a\|^2\Big(x - (a'|x)a'\Big) = -\|a\|^2\Big(Id - p_{\mathbb{R}a'}\Big)(x)$, on reconnaît en λf_a^2, une application colinéaire (cad la composée d'une homothétie) à la projection orthogonale sur $(\mathbb{R}a)^{\perp}$

3)

$$\Big(f_a \circ f_b\Big)(a) = a \wedge (b \wedge a) = \|a\|^2 b - (a|b)a$$

$$\Big(f_a \circ f_b\Big)(a \wedge b) = a \wedge \Big(b \wedge (a \wedge b)\Big) = a \wedge \Big(\|b\|^2 a - (b|a)b\Big) = -(b|a)a \wedge b$$

4) Si (a, b) lié, comme vu plus haut, c'est un endomorphisme symétrique réel, donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Si (a, b) est libre, en utilisant la base directe $(a, b, a \wedge b)$ et les calculs de la question précédente, la matrice de $f_a \circ f_b$ est

$$M = \begin{pmatrix} -(a|b) & 0 & 0 \\ \|a\|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(a|b) \end{pmatrix}$$

On constate une valeur propre double $-(a|b)$, et comme immédiatement, $\mathrm{rg}\,(M + (a|b) I_3) \leq 1$, M donc l'endomorphisme $f_a \circ f_b$ est diagonalisable.

Remarque : f_a comme tout endomorphisme antisymétrique réel ou toute matrice antisymétrique réelle, n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, pusque la seule valeur propre réelle possible est 0. Par contre, il est diagonalisables sur $\mathbb{C}$, mais ce n'est pas du cours. Notons aussi que de f_a et f_b diagonalisables, ***on ne peut pas déduire*** $f_a \circ f_b$ diagonalisable.

CCP PSI 2013 (matrice de projection orthogonale)

ENONCÉ 91 On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. On note F l'espace d'équations $x+y+z+t=0$ et $x-y+z-t=0$.

1) Déterminez une base orthonormée de F.

2) Donnez la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

1)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 0 \\ x-y+z-t & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -t \\ y & = & y \\ t & = & t \end{array}\right.$$

(u,v) avec $u=(1,0,-1,0)$ et $v=(0,1,0,-1)$ est donc une base de F. Le principe est alors d'orthonormaliser paar le principe de **Gram**[6] (je vous conseille de bien le réviser), mais ici ce n'et pas nécessaire puisque la base est déjà orthogonale. Il suffit de normer. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u, \frac{1}{\sqrt{2}}v\right)$ est une BON de F.

2) Pour calculez la matrice de p dans la base canonique (donc orthonormée ici) il faut et il suffit de calculer ses images par p. On dispose d'une formule, qui n'est pas toujours applicable à cause du coût de calcul de la BON de F, mais ici, elle est déjà calculée...On a donc $p(x)=\frac{1}{2}(u|x)u+\frac{1}{2}(v|x)v$ et on l'applique aux 4 vecteurs ε_i de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Le calcul est très aisé, je ne donne que le résultat :

$$\begin{array}{l} p(1,0,0,0)=\frac{1}{2}(1,0,-1,0) \\ p(0,1,0,0)=\frac{1}{2}(0,1,0-1) \\ p(0,0,1,0)=\frac{1}{2}(-1,0,1,0) \\ p(0,0,0,1)=\frac{1}{2}(0,-1,0,1) \end{array} \qquad \mathrm{Mat}\,(p,\varepsilon)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : La matrice est symétrique ce qui était « *prévisible* » puisque une projection orthogonale est un endomorphisme symétrique et la base utilisée est orthonormée.

6. **Jorgen Pedersden Gram** : mathématicien danois (1850-1916).

ENONCÉ 102 Déterminer le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré minimum tel que le reste dans la division euclidienne de P par X^2+X+1 soit $X-1/2$ et que le reste dans la division euclidienne par X^2-X+1 soit $-X+2$

On va utiliser les congruences plus efficaces quand on ne s'intéresse pas au quotient. Rappelons la notation : $A = BQ+R \iff A \equiv R\ (Q)$. Elle est stable par $+$ (rp. par $\times$) puisque $A = BQ+R$ et $A' = B'Q+R' \implies A+A' = (B+B')Q+(R+R')$ (rp. $AA' = BB'Q+RB'+R'B)Q+(RR')$). Le reste dans la division euclidienne par Q se prouve en rajoutant la condition de degré.

Analyse :
$P(X) \equiv X-\frac{1}{2}\quad (X^2+X+1)$ et $P(X) \equiv -X+2\quad (X^2-X+1)$, puis par « *opposition* »,
$P(-X) \equiv -X-\frac{1}{2}\quad (X^2-X+1)$ et $P(-X) \equiv X+2\quad (X^2+X+1)$ et par « *addition* » ,

$$\frac{1}{2}\Big(P(X)+P(-X)\Big) \equiv X+\frac{3}{4}\quad (X^2+X+1) \qquad\qquad \frac{1}{2}\Big(P(X)-P(-X)\Big) \equiv -\frac{5}{4}\quad (X^2+X+1)$$

Rappelons que ces deux quantités désignent la ***partie paire*** et la ***partie impaire*** de P, cad que les puissances paires et que les puissances impaires de P. Ensuite :

$$1 \equiv 1\quad (X^2+X+1)\quad X^2 \equiv -X-1\quad (X^2+X+1) \implies -X^2-\frac{1}{4} \equiv -(-X-1)-\frac{1}{4} \equiv X+\frac{3}{4}\quad (X^2+X+1)$$

Et $-X^2-\frac{1}{4}$ est aussi le plus petit polynôme pair vérifiant cette congruence, puisque le degré 0 est clairement impossible. De même, on prouve que $-\frac{5}{4}X^3$ est le plus petit polynôme impair vérifiant l'autre congruence (degré 1 étant impossible) :

$$X \equiv X\quad (X^2+X+1)\quad X^3 = (X-1)(X^2+X+1)+1 \equiv 1\quad (X^2+X+1) \implies -\frac{5}{4}X^3+0X \equiv -\frac{5}{4}\quad (X^2+X+1)$$

Réciproque :
Par construction, $P(X) = -\frac{5}{4}X^3-X^2-\frac{1}{4}$ est le polynôme de plus petit degré vérifiant :

$$P(X) \equiv -\frac{5}{4}+\left(X+\frac{3}{4}\right) \equiv X-\frac{1}{2}\quad (X^2+X+1)$$

Vérifions l'autre congruence, ou la division euclidienne par X^2-X-1. On calcule aisément :

$$P(X) = -\frac{1}{4}\left(5X^3+4X^2-1\right) = -\frac{1}{4}\left(5X+9\right)\left(X^2-X-1\right)+2-X$$

2 Analyse

Centrale PSI 2013 (series entieres à termes récurrents imbriqués)

Enoncé 111 Soient (u_n) et (v_n) les suites complexes définies par $u_0 = v_0 = 1$ et $\forall\, n \geq 0$,
$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n - 2v_n \end{cases}$. Soient $u(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ et $v(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$.
Déterminez le rayon de convergence de u et v et calculez leur somme.

$$X_{n+1} = AX_n \quad \text{avec } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ d'ou } X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On calcule $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det(A) = \lambda^2 + \lambda - 1$. Les valeurs propres sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ notées $\alpha < 0 < \beta$.

Méthode 1 sans calcul explicite de u_n et v_n :

Sans qu'il soit besoin de calculer les vecteurs propres, on en déduit $u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n$, puis $u(x) = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \alpha^n x^n + \mu \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \beta^n x^n$. Comme $u(x)$ est la somme de deux séries entières géométriques de rayons respectif $\frac{1}{|\alpha|}$ et $\frac{1}{|\beta|}$, comme ces valeurs sont distinctes, on sait (cours) que le rayon de $u(x)$ vaut alors $R = \inf\left(\frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|\beta|}\right) = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ ***sauf si*** $\lambda = 0$. Idem pour v_n.
(remarquons quand même que $\frac{1}{|\alpha|} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = |\beta|!$, normal puisque $\alpha\beta = -1$).

Toujours en voulant éviter de calculer explicitement u_n et v_n. Il est usuel que pour un endomorphisme f diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, on a $f^n = \lambda_1^n p_1 + \dots + \lambda_p^n p_p$, où les p_i désignent les projections associées à la décomposition en somme directe sur les espaces propres (cours sur les sommes directes). En revenant à l'exo, si f est l'endomorphisme canoniquement associé à A, $f^n = \alpha^n p_1 + \beta^n p_2$. L'un des λ (de u_n ou v_n) est nul ssi le vecteur $p_1(1,1)$ a une coordonnée nulle. Comme ce vecteur appartient à l'espace propre (droite) associé à la valeur propre α, $\lambda = 0$ ssi ce vecteur propre a une coordonnée non nulle ce qui équivaut à l'un des deux vecteurs de la base canonique vecteur propre. On voit tout de suite sur la matrice que non, donc on a bien $R = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$

$$u(x) - v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - v_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{x}\Big(u(x) - 1\Big)$$
$$u(x) - 2v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_n - 2v_n)x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{x}\Big(v(x) - 1\Big)$$

Pour $x \in \left]-R, R\right[$ et $x \neq 0$, par résolution élémentaire d'un système 2×2 :

$$\begin{cases} (x-1)u(x) - xv(x) &= -1 \\ xu(x) + (-1-2x)v(x) &= -1 \end{cases} \iff u(x) = \frac{-1-x}{x^2-x-1} \qquad v(x) = \frac{-1}{x^2-x-1} \qquad \text{(vrai pour } x = 0)$$

Méthode 2 par calcul explicite :

On calcule aisément les vecteurs propres $\operatorname{Ker}(A - \alpha I_2) = \operatorname{Vect}(2, 3+\sqrt{5})$ et $\operatorname{Ker}(A - \beta I_2) = \operatorname{Vect}(2, 3-\sqrt{5})$, puis :

$$X_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3+\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1}X_0 = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (\sqrt{5}-3)\alpha^n + (\sqrt{5}+3)\beta^n & 2\alpha^n - 2\beta^n \\ 2\beta^n - 2\alpha^n & (3+\sqrt{5})\alpha^n + (\sqrt{5}-3)\beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\Big((-1+\sqrt{5})\alpha^n + (\sqrt{5}+1)\beta^n\Big) \qquad v_n = \frac{1}{2\sqrt{5}}\Big((1+\sqrt{5})\alpha^n + (\sqrt{5}-1)\beta^n\Big)$$

Le calcul du rayon de convergence se fait par sommation de deux séries entières géométriques comme plus haut, soit, pour les deux séries entières $R = \inf\left(\frac{1}{|\alpha|}, \frac{1}{|\beta|}\right) = \frac{1}{|\alpha|} = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$ Le calcul de u et v sera fait ici par les séries géométriques :

$$\begin{aligned}
v(x) &= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n x^n + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\sum_{n=0}^{+\infty}\beta^n x^n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{1}{1-\alpha x} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{1}{1-\beta x}\\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{2}{2+(1+\sqrt{5})x} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{2}{2+(1-\sqrt{5})x} \overbrace{=}^{\times(\sqrt{5}\pm 1)} \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{2x+\sqrt{5}-1} + \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-2x+1+\sqrt{5}}\\
u(x) &= \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{1}{1-\alpha x} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{1}{1-\beta x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{2}{2+(1+\sqrt{5})x} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\frac{2}{2+(1-\sqrt{5})x}\\
&= \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}-1}{2x+\sqrt{5}-1} + \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}+1}{-2x+1+\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Remarque : On a en fait ici la décomposition en éléments simples des valeurs de u et v trouvées par la première méthode.

Centrale PSI 2013 (inegalite sur les sommes partielles) ☜

ENONCÉ 112 Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ où (u_n) est une suite réelle à termes positifs.

On suppose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_{2n} \leq \left(1+\dfrac{1}{n}\right) S_n$. Montrez que la série $\sum u_n$ converge.

Le cas de la suite nulle étant évident, on suppose le contraire. les S_n étant alors strictement positifs à partir d'un certain rang, l'inégalité s'écrit aussi, en vertu de l'inégalité de convexité bien connue $\forall\, x > -1,\ \ln(1+x) \leq x$:

$$0 \leq \ln(S_{2n}) - \ln(S_n) \leq \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$
$$\Longrightarrow \ln(S_{2^p n}) - \ln(S_n) = \sum_{k=0}^{p-1} (\ln(S_{2^{k+1}n}) - \ln(S_{2^k n})) \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^k n} \leq \frac{1}{n}\frac{1}{1-1/2}$$

Comme $\ln(S_n)$ est croissante par positivité des u_n, pour tout $m \geq n$ entiers, en posant p un entier tel que $2^p \geq \frac{m}{n}$:

$$0 \leq \ln(S_m) - \ln(S_n) \leq \ln(S_{2^p n}) - \ln(S_n) \leq \frac{2}{n}$$

Le critère de **Cauchy**[7] étant vérifié, la suite $\ln(S_n)$ converge, puis, par composition de limites avec l'exponentielle, la suite des sommes partielles S_n converge, cad la série $\sum u_n$ converge.

7. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable, plus de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe et en théorie des groupes.

Mines-Ponts PSI 2013 (série à terme défini par récurrence)

Enoncé 125 On s'intéresse à la suite définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1) Etudiez la convergence de cette suite.

2) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

3) Déterminez la nature de la série de terme général a_n^2.

4) Etudiez la série de terme général $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En déduire la nature de la série de terme général a_n.

1) On a $a_{n+1} = f(a_n)$ avec $f(x) = 1 - e^{-x}$. On étudie cette suite récurrente usuellement. Comme $f'(x) = e^{-x} \geq 0$, f est croissante et donc (a_n) monotone, puisque :

$$\operatorname{sgn}(a_{n+1} - a_n) = \operatorname{sgn}(f(a_n) - f(a_{n-1})) = \operatorname{sgn}(a_n - a_{n-1}) = \cdots = \operatorname{sgn}(a_1 - a_0) = \operatorname{sgn}(f(a_0) - a_0)$$

En posant $g(x) = f(x) - x$, $g'(x) = e^{-x} - 1 \leq 0$ sur $\mathbb{R}^+$. Comme $a_0 > 0$, il vient $g(u_0) \leq g(0) = 0$, soit la suite (a_n) est décroissante. Comme $a_n \geq 0$, $a_n)$ est minorée donc converge. Sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell \iff g(\ell) = 0 \iff \ell = 0$. Donc $\lim a_n = 0$.

2) Par la question Q1 et le critère CSSA, la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ est immédiatement convergente.

3) Comme $a_n \to 0$, un petit développement asymptotique amène :

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2) \implies (a_{n+1} - a_n) \sim -\frac{1}{2}a_n^2$$

Or, $\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0 \to -a_0$. Ceci prouve que la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge et de sa négativité (cad signe constant), il résulte par le critère d'équivalent, que la série $\sum a_n^2$ converge.

4)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_0}\right) \longrightarrow -\infty$$

La série de terme général $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ diverge donc. En reprenant le développement vu plus haut :

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}a_n + o(a_n)\right) \sim -\frac{1}{2}a_n$$

Du critère d'équivalent appliqué à une série de terme de signe constant, il résulte que la série $\sum a_n$ diverge.

Enoncé 132 On pose $f : x \to \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n x^n$ et $g : x \to \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) x^n$.

1) Déterminez les rayons de convergence de f et g.

2) Montrez que g est définie et continue sur $[-1,1[$.

3) Trouvez une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$.

4) Montrez que f est continue sur $[-1,1[$ et trouvez des équivalents de f et g en 1.

1) En appliquant la formule d'**Alembert**[8] ppour les séries numériques, on obtient immédiatement que le rayon de convergence vaut $R=1$ pour les deux séries entières. On pose $u_n = \ln n x^n$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\ln(n+1)|x|^{n+1}}{\ln n |x|^n} \sim \frac{\ln n}{\ln n}|x| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |x|$$

- Si $|x|<1$, alors la série numérique $\sum \ln n x^n$ converge absolument, donc converge, d'ou $R \geq 1$
- Si $|x|>1$, alors la série $\sum \ln n x^n$ diverge grossièrement, d'où $R \leq 1$.

Raisonnement identique pour l'autre série entière.

2) Un petit développement limité amène la convegence de la série $g(-1)$: $(-1)^n \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{-(-1)^n}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
Par théorème sur les séries entières, on sait que les deux fonctions-sommes f et g sont continues sur (au moins) $]-R,R[\ = \ ]-1,1[$. La continuité de g sur $[-1,1[$ résulte de l'application du théorème de continuité des séries de fonctions sur l'intervalle $I = [-1,0]$:

- Les fonctions $u_n(x) : x \to \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$ sont clairement continues sur $[-1,0]$.
- Pour $x \leq 0$, $\sum u_n(x)$ est une série alternée dont le terme général tend vers 0. Pour $-1 \leq x \leq 0$, on a la décroissance (par rapport à n !) car $|x|^n$ decroit et $|\ln(1-\frac{1}{n})|$ aussi puisque le terme est négatif et $x \to \ln(1-\frac{1}{x})$ de dérivée $\frac{1/x^2}{1-1/x} \geq 0$. On a alors la convergence uniforme de la série $\sum u_n(x)$ sur $[-1,0]$ car :

$$\forall x \in [-1,0],\ \left|R_n(x)\right| \leq \left|u_{n+1}(x)\right| \implies \|R_n\|_{\infty\ I} \leq \left\|\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left|x\right|^{n+1}\right\|_{\infty\ I} \leq \left|\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\right| \sim \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3)

$$(1-x)f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} \ln(n-1)x^n = -\sum_{n=3}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n + \ln 2\, x^2 = -g(x)$$

Remarque : On en déduit donc que la limite de f existe en -1, alors que la série $f(-1)$ est visiblement divergente grossièrement ! En fait, pour que l'existence de la limite en $\pm R$ entraîne la convergence de la série, il faut rajouter des conditions sur le coefficient a_n de la série entière $\sum a_n x^n$ (ce sont les théorèmes de **Tauber**[9]).
Par contre, l'autre « *sens arrive* » toujours, cad que si la série converge en $\pm R$, alors la fonction-somme y admet une limite, qui est la somme de la série.

4)
f se prolonge en une fonction continue sur $[-1,1[$ car, d'après la question précédente, $\lim_{-1} f = -\frac{1}{2}g(-1)$.

8. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).
9. **Alfred Tauber** : mathématicien slovaque (1866 - 1942). Mise en place de réciproques de divers critères de convergence d'intégrales et de séries,.

Pour les équivalents en $x=1$, on peut déjà noter que la relation trouvée en Q1 permet de déduire les équivalents l'un de l'autre. On va donc chercher plutôt celui de g car son terme général se prête facilement à un développement :

$$h(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\left(\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{-1}{n}\right)}_{a_n} x^n = g(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = g(x) - \ln(1-x) - x$$

Comme $a_n \sim \dfrac{-1}{2n^2}$, on a immédiatement $R=1$, puis la convergence normale sur $\left[-1,1\right]$. Ceci amène la continuité de h sur $\left[-1,1\right]$, en particulier h bornée dans un voisinage de 1 : Par suite, dans un voisinage de 1 :

$$g(x) - \ln(1-x) - x = O(1) \implies g(x) \sim_1 \ln(1-x) \implies f(x) \sim_1 \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

Enoncé 136 Pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n}$.

1) Etudiez la convergence simple et uniforme, normale de $\sum u_n$.

2) On pose $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ et $F(x) = e^x\, S(x)$. Montrez que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculez $F'(x)$.

3) Déterminez $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. En déduire $F(x)$, puis $S(x)$ pour $x > 0$, puis $S(0)$.

4) On note U la primitive de S s'annulant en 0. Déterminez U.

5) Montrez S intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1) ***Convergence simple :***

Soit $x > 0$ fixé. Alors, par croissance comparée, comme $-(n+1)x < 0$, $|u_n(x)| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, soit $\sum u_n(x)$ converge absolument, donc converge. Pour $x = 0$, $u_n(0) = \frac{(-1)^n}{n}$. C'est la série harmonique alternée qui converge.
La série de fonctions $\sum u_n(x)$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}^+$.

Convergence normale :

la fonction $x \to e^{-(n+1)x}$ étant décroissante, et ceci pour tout n entier, il suit $\|u_n\|_{\infty\ \mathbb{R}^+} = |u_n(0)| = \frac{1}{n}$, terme général de la série harmonique divergente. Par conséquent, la série de fonctions $\sum u_n(x)$ ne converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, sur tout segment $[a,b] \subset \left]0,+\infty\right[$, Il y a convergence normale puisque $\|u_n\|_{\infty\ [a,b]} = |u_n(a)| = o(\frac{1}{n^2})$.

Convergence uniforme :

Il y a convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset \left]0,+\infty\right[$. Par contre, sur $\mathbb{R}^+$, il faut étudier. Comme, pour tout $x \geq 0$, $n \to \frac{e^{-(n+1)x}}{n}$ décroit vers 0, (produit de deux fonctions de n positives et immédiatement décroissantes), la série $\sum u_n(x)$ vérifie le CSSA, et ce pour tout $x \geq 0$. La convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$ provient alors de :

$$\forall\, x \geq 0,\ \left|R_n(x)\right| \leq \left|\frac{e^{-(n+2)x}}{n+1}\right| \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \left\|R_n\right\|_{\infty\ \mathbb{R}^+} \leq \left\|\frac{e^{-(n+2)x}}{n+1}\right\|_{\infty\ \mathbb{R}^+} = \frac{1}{n+1} \to 0$$

2) F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car S l'est par application du théorème
d'une série de fonctions :

- Chaque fonction $u_n(x)$ est bien $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- La série de fonctions $\sum u_n'(x)$ égale à la série $\sum -\frac{n+1}{n} e^{-(n+1)}$ converge normalement, donc uniformément sur tout segment $\left[a,b\right] \subset \left]0,+\infty\right[$ puisque $\left\|u'n\right\|_{\infty\ [a,b]} \leq 2e^{-(n+1)a}$

Il suit, pour $x > 0$, en ayant reconnu une série géométrique convergente (privée de 2 terms), puisque $|-e^{-x}| < 1$:

$$F'(x) = e^x\left(S'(x) + S(x)\right) = e^x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n e^{-(n+1)x}\left(-\frac{n+1}{n} + \frac{1}{n}\right) = e^x \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-(n+1)x}$$
$$= e^x \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-e^{-x}\right)^{n+1} = e^x\left(\frac{1}{1+e^{-x}} - 1 + e^{-x}\right) = e^x\left(\frac{e^{-2x}}{1+e^{-x}}\right) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{1+e^x}$$

3) On peut utiliser le théorème d'interversion de limites puisque :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n(x) \to 0$, lorsque $x \to +\infty$.
- Il y a convergence uniforme dans un voisinage de $x = +\infty$ et même sur $\mathbb{R}^+$

IL vient $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \lim\limits_{x\to+\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$

Comme on est sur l'***intervalle*** $]0,+\infty[$, par primitivation, il vient $F(x) = cste - \ln(1+e^{-x}) = -\ln(1+e^{-x})$, puisque la limite nulle en $+\infty$ amène la constante nulle. Puis $S(x) = -e^{-x}\ln(1+e^{-x})$. On a $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = -\ln(2)$.
Reste à prouver ***la continuité*** de S en 0 ppour affirmer que c'est la valeur de $S(0)$. En fait la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n(x)$ sur tout $\mathbb{R}^+$ établie précédemment amène la continuité de S sur $\mathbb{R}^+$ tout entier, donc en 0 en particulier.

4) S étant continue sur $\mathbb{R}^+$, admet un primitive sur $\mathbb{R}^+$. La primitive en 0 est donnée par :

$$U(x) = \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x -e^{-t}\ln(1+e^{-t})\,\mathrm{d}t \overset{\substack{u'=-e^{-t} \\ v\,=\ln(1+e^{-t})}}{\underset{\substack{u\,=e^{-t} \\ v'=-e^{-t}/1+e^{-t}}}{=}} = \left[e^{-t}\ln(1+e^{-t})\right]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= e^{-x}\ln(1+e^{-x}) - \ln 2 + \int_0^x \mathrm{d}t\left(e^{-t} - \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\right)\mathrm{d}t = e^{-x}\ln(1+e^{-x}) - \ln 2 + \left[-e^{-t} + \ln(1+e^{-t})\right]_0^x$$

$$= (1+e^{-x})\ln(1+e^{-x}) - e^{-x} - 2\ln 2 + 1$$

5) S est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $S(x) = -e^{-x}\ln(1+\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}) \sim_{+\infty} -e^{-x}e^{-x} = o(\dfrac{1}{x^2})$.

Centrale PSI 2013 (série de fourier d'une fonction-intégrale)

ENONCÉ 142 Soient $h>0$ et f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ 2π-périodique.

1) Montrez que f_h définie sur $\mathbb{R}$ par $f_h(x)=\dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ est 2π-périodique de classe C^1.
Calculez f_h' en fonction de f.

2) Rappelez la relation entre les coefficients de Fourier $c_n(f_h')$ et $c_n(f_h)$. Calculez $c_n(f_h)$ en fonction de $c_n(f)$.

1) En posant $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$puisque f est continue sur $\mathbb{R}$(cours), et comme $f_h(x)=\frac{1}{2h}\Big(F(x+h)-F(x-h)\Big)$, il suit que f_h est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f_h'(x)=\frac{1}{2h}\Big(f(x+h)-f(x-h)\Big)$. f_h est 2π-périodique puisque :

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\quad f_h(x+2\pi)=\frac{1}{2h}\int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(t)\,\mathrm{d}t \overbrace{=}^{\substack{u=t-2\pi\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t}} \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(u-2\pi)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(u)\,\mathrm{d}u=f_h(x)$$

2) $\forall\, n\in\mathbb{Z},\ c_n(f_h')=inc_n(f_h)$. D'autre part, on a $c_n\Big(\tau_a(g)\Big)=e^{ina}c_n(g)$, où τ_a est l'application-translation qui à g associe $g_a : x\to g(x+a)$. Démonstration :

$$\forall\, n\in\mathbb{Z},\forall\, g\in CM_{2\pi},\quad c_n\Big(\tau_a(g)\Big)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(t+a)e^{-int}\,\mathrm{d}t = \overbrace{=}^{\substack{u=t-a\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{2\pi-a} g(u)e^{-inu}e^{ina}\,\mathrm{d}u=e^{ina}c_n(g)$$

Comme $f_h'(x)=\frac{1}{2h}\Big(f(x+h)-f(x-h)\Big)$, il suit par « *linéarité des coefficients de* » **Fourier** [10],

$$c_n(f_h')=\frac{1}{2h}\Big(e^{inh}c_n(f)-e^{-inh}c_n(f)\Big)=\frac{i\sin(nh)}{h}c_n(f) \implies c_n(f_h)=\frac{1}{in}c_n(f_h')=\frac{\sin(nh)}{nh}c_n(f)\ (n\neq 0)$$

Pour $n=0$, on a $c_0(f_h)=c_0(f)$ (qui est d'ailleurs obtenue par « *passage à la limite* ») car :

$$\begin{aligned}2\pi c_0(f_h)&=\frac{1}{2h}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \overbrace{=}^{\substack{u=t-x\\ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t}} \frac{1}{2h}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_{-h}^{h} f(u+x)\,\mathrm{d}u\\ &\overbrace{=}^{*} \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\int_0^{2\pi} f(u+x)\,\mathrm{d}u=\frac{2h}{2h}\int_0^{2\pi} f(u+x)\,\mathrm{d}u=\int_x^{2\pi+x} f(t)\,\mathrm{d}t=2\pi c_0(f)\end{aligned}$$

On a appliqué en * le théorème de **Fubini** [11] (qui permet d'intervertir l'ordre d'intégration), puisque la fonction $(x,u)\to f(u+x)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

10. **Joseph Fourier** : français (1768-1830). Travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques.
11. **Guido Fubini** : mathématicien italien (1879-1943).

Mines-Ponts PSI 2013 (calcul intégrale fonction partie-entière) ✷

Enoncé 153 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-1)^{E\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\,\mathrm{d}x$.

$E\left[\frac{1}{t}\right]=k \iff \dfrac{1}{k+1}<t\leq\dfrac{1}{k}$. Soit $0<x\leq 1$. Posons $N_x=E[\frac{1}{x}]$

$$\int_x^1 \frac{(-1)^{E[\frac{1}{t}]}}{t}\,\mathrm{d}t=\int_x^{1/N_x}\frac{(-1)^{E[\frac{1}{t}]}}{t}\,\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{N_x-1}(-1)^k\int_{1/k+1}^{1/k}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_x^{1/N_x}(\cdot)+\sum_{k=1}^{N_x-1}\underbrace{(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}_{u_k}[=u_{N_x-1}]$$

La série $\sum u_n$ converge puisque $u_n=\frac{(-1)^n}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On peut obtenir sa somme en séparant les termes pairs des impairs, puis en utilisant la formule de **Stirling**[12] : $n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ et le résultat $a_n\sim b_n$ et $\lim a_n\neq 1 \implies \ln a_n\sim\ln b_n$:

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^n\ln\left(\frac{2k+1}{2k}\right)-\sum_{k=1}^n\ln\left(\frac{2k}{2k-1}\right)=\ln\left(\prod_{k=1}^n\frac{(2k+1)(2k-1)}{4k^2}\right)=\ln\left(\frac{(2n+1)(2n)!^2}{4^{2n}n!^4}\right)$$
$$\sim\ln\left(\frac{2n(4\pi n)\left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}}{2^{4n}\,(2\pi n)^2\left(\frac{n}{e}\right)^{4n}}\right)=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$$

Lorsque $x\to 0$, comme $N_x\geq\frac{1}{x}-1$, il vient $N_x\to+\infty$ et :

$$\left|\int_x^{1/N_x}\frac{(-1)^{E[\frac{1}{t}]}}{t}\,\mathrm{d}t\right|\leq\int_x^{1/N_x}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=-\ln\left(xN_x\right)\to 0\quad\text{car } 1-x<xN_x\leq 1$$

En conclusion, l'intégrale converge et $\displaystyle\int_0^1\frac{(-1)^{E\left[\frac{1}{x}\right]}}{x}\,\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{2}{\pi}\right)$

12. **James Stirling** : mathématicien écossais (1692-1770). Connu pour la formule donnant l'équivalent de la factorielle.

CCP PSI 2013 (développement en série entière d'une intégrale à paramètrez)

ENONCÉ 157 Soit $f : x \to \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminez le domaine de définition de f.

2) Montrez que f est C^∞.

3) Montrez que f admet un développement en série entière et le déterminer.

4) POur déterminer le domaine de définition de f, il faut et il suffit de chercher les paramètres x pour lesquels $g : t \to e^{-t^2}\cos(xt)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La continuité est immédiate sur $\mathbb{R}^+$, et ce pour tout x réel. Ensuite, l'intégrabilité résulte de la majoration $\left|g(t)\right| \leq e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, et ce ***pour tout*** x, donc $\mathrm{Def} f = \mathbb{R}$.

5) On rappelle la formule pratique : $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi/2)$. On remarque ensuite que $h : (x,t) \to e^{-t^2}\cos(xt)$ est immédiatement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, et que donc toutes les dérivées partielles par rapport à x existent en tout (x,t) et valent : $\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t) = t^n e^{-t^2}\cos\left(xt + n\dfrac{\pi}{2}\right)$. f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $f^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t^2}\cos\left(xt + n\dfrac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t$, par application duu théorème suivant :

- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ t \to \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ t \to \dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- ***Hypothèse de domination sur tout segment :***
  $\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \left[a,b\right] \subset \mathbb{R}, \forall\, t \in \mathbb{R}^+,\ \left|\dfrac{\partial^n h}{\partial x^n}(x,t)\right| \leq t^n e^{-t^2}$ immédiatement continue et ***intégrable*** sur $\mathbb{R}^+$ ($o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$).

6) f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, ce qui est une condition nécessaire (mais pas suffisante!) pour avoir un développement en série entière (mais pas nécessairement un développement sur $\left]-\infty, +\infty\right[\ldots$). On écrit :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{(-1)^n e^{-t^2}\frac{x^{2n}t^{2n}}{(2n)!}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$\overbrace{=}^{(1)}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(-1)^n e^{-t^2}\frac{x^{2n}t^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}t^{2n}\,\mathrm{d}t \overbrace{=}^{(2)}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2(2n)!}x^{2n}$$

L'intégration terme à terme de (1) résulte de :

- La série de fonctions $\sum f_n(t)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ (puisqu'on a développé « *nous-même* » le cosinus)
- Les f_n ston clairement continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}^+$ ($o_{+\infty}(1/t^2)$).
- La série numérique $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|$ converge puisque :

$$\int_0^{+\infty}\left|f_n\right| \leq |x|^{2n}\int_0^{+\infty}1\times\frac{t^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t \ = \ \frac{|x|^{2n}}{(2n+1)!}$$

Série convergente pour tout x puisque série entière de rayon $R = +\infty$

Le (2) n'est pas nécessaire pour la preuve du développement en série entière, mais permet de se rendre compte que l'intégrale n'est pas « *calculable* ». On effectue le changement de variables $u = t^2$ qui est bijectif $\mathscr{C}^1$ de $\left]0,+\infty\right[$ dans $\left]0,+\infty\right[$.

ENONCÉ 174

1) Pour quels $a \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^a}\,\mathrm{d}t$ est définie ?

2) Existence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^{3/2}+t^n}\,\mathrm{d}t$. Montrez que la suite (I_n) converge et exprimez sa limite sous forme d'intégrale.

1) la fontion $f : t \to \dfrac{\arctan t}{t^a}$ est continue sur $\left]0,+\infty\right[$.

- $f(t) \sim_0 \dfrac{t}{t^a} = \dfrac{1}{t^{a-1}}$.
  Par critère de comparaison à une fonction de **Riemann** [13], f est intégrable sur $\left]0,1\right]$ ssi $a-1<1 \iff a<2$.
- $|f(t)| \sim_{+\infty} \dfrac{\pi/2}{t^a}$. POur des raisons identiques, f est intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$ ssi $a>1$.

L'intégrale est donc définie ssi $1<a<2$.

2) Des équivalences $f_n(t) \sim_0 \frac{1}{t^{1/2}}$ (pour $n \geq 2$, sinon $f_n() \sim_0 \frac{1}{t^{n-1}}$ mais alors $n-1 \leq 1-1=0$) et $f_n(t) \sim_{+\infty} \frac{\pi/2}{t^n}$, et de la continuité de f_n sur $\left]0,+\infty\right[$, il résulte immédiatement l'existence de l'intégrale.
L'application du théorème de **Lebesgue** [14]permet d'écrire (justification après) :

$$\lim I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^{3/2}+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan t}{t^{3/2}+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\arctan t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$

- La suite de fonctions f_n converge simplement sur $\left]0,+\infty\right[$ vers $f : \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t>1 \\ \frac{\pi}{8} & \text{si} \quad t=1 \\ \frac{\arctan t}{t^{3/2}} & \text{si} \quad 0<t<1 \end{cases}$ continue / morceaux
- ***Domination :***
  $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \in \left]0,+\infty\right[,\quad \left|f_n(t)\right| \leq \dfrac{\arctan t}{t^{3/2}}$, ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$, d'après Q1

Remarque : L'intégrale se calcule par méthodes usuelles : IPP, puis $u=\sqrt{t}$, puis décomposition en éléments simples :

$$\int_0^1 \frac{\arctan t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\pi}{2} + \sqrt{2}\ln\left(2+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{2}\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

13. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.
14. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

ENSAM 2013 (équivalence de convergence d'intégrale) ☜

Enoncé 177 Soit $F \in \mathbb{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et F sa primitive qui s'annule en 0. Montrez que la convergence d'une des deux intégrales ci-dessous implique celle de l'autre et comparez leurs valeurs : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

En posant $u' = f(t)$, $v = \frac{1}{1+t}$, $u = F(t)$ et $v' = \frac{-1}{(1+t)^2}$, une ipp sur $[0, x]$ amène :

$$\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{F(t)}{1+t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{F(x)}{1+x}}_{g(x)} + \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$$

On remarque ensuite que F est la primitive d'une fonction positive, donc est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $F(0) = 0$, ceci nous amène $F \geq 0$. D'autre part, le théorème de limite monotone amène alors que F admet une limite finie ou $+\infty$, lorsque $x \to +\infty$, et que cette limite est finie ssi F est majorée dans un voisinage de $+\infty$. On rappelle aussi que si une intégrale d'une fonction existe dans un voisiange de $+\infty$ ***et que*** cette fonction admet une limite, alors cette limite ne peut être que 0 (il y a des exemples où la fonction n'admet pas de limite et n'est même pas bornée en $+\infty$). On rappelle aussi que pour des fonctions positives, ce qui est le cas ici, car $\frac{f(t)}{1+t} \geq 0$ et $\frac{F(t)}{(1+t)^2} \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$, il faut et il suffit de prouver que les « *les intégrales partielles* » sont majorées.

$\boxed{\Longrightarrow}$

La relation plus haut permet d'écrire : $\displaystyle\int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$

Le membre de droite admettant une limite finie, lorsque $x \to +\infty$ par hypothèse de convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$, et de la positivité du membre de gauche et de la remarque plus haut, il en résulte la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

On suppose $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Posons $g(x) = \dfrac{F(x)}{1+x}$ et montrons par l'absurde que $\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque $x \to +\infty$:

Si $\int_0^x \frac{f(t)}{1+t}$ n'a pas de limite finie, alors sa limite ne peut être que $+\infty$ (remarque plus haut). Comme par hypothèse, $\displaystyle\int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{g(t)}{1+t}$ a une limite finie, alors $g(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t} - \int_0^x \frac{F(t)}{(1+t)^2}$ a pour limite $+\infty$ (fini + infini = infini) d'où, pour t assez grand, $\dfrac{g(t)}{1+t} \geq \dfrac{1}{1+t} \geq 0$. Or $\int_0^{+\infty} \frac{g(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge et $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ diverge. Absurde.

Notons $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. Si $\ell \neq 0$, $\dfrac{g(t)}{1+t} \sim_{+\infty} \dfrac{\ell}{1+t}$ Avec la convergence d'un côté et la divergence de l'autre et ***la positivité***. Absurde. De $\lim_{+\infty} g = 0$ et de l'égalité du haut, on tire l'égalité des 2 intégrales : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

CCP PSI 2013 (calcul d'une intégrale par développement en série)

ENONCÉ 184

1) Convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{\sinh t}\,\mathrm{d}t$.

2) Exprimez I en fonction de $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3) Développement en série entière de $\dfrac{1}{1-t^2}$.

4) Exprimez I sous forme d'une série.

5) Calculez I sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1) La fonction $f : t \to \frac{t}{\sinh t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. La convergence de I résulte de l'intégrabilité de la fonction positive f sur $]0,+\infty[$ car :

- f se prolonge en une fonction continue sur $[0,+\infty[$ car $f \sim_0 \dfrac{t}{t} = 1$
- Comme $f \sim_{+\infty} \dfrac{t}{e^t/2} = 2te^{-t}$, on a immédiatement $f = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

2) Le changement de variable $u : t \to e^{-t}$ $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ vers $]0,1[$ $\mathrm{d}u = -u\,\mathrm{d}t$ permet d'écrire :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sinh t}\,\mathrm{d}t = \int_1^0 \frac{2(-\ln u)}{u - \frac{1}{u}} \frac{-\mathrm{d}u}{u} = -2\int_0^1 \frac{\ln u\,\mathrm{d}u}{1-u^2} = -2J$$

3) Le cours donne que $g : t \to \dfrac{1}{1-t^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ (et pas plus !) et $\dfrac{1}{1-t^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$

4)

$$I = -2\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -2\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t = -2\int_{]0,1[} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{t^{2n}\ln t}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t \overbrace{=}^{(1)} -2\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{]0,1[} t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t$$

$$\overbrace{=}^{(2)} -2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2} = -2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}\right) = -2\left(-\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6}\right) = \frac{\pi^2}{4}$$

Le (1) résulte du théorème d'intégration terme à terme de la série de fonctions $\sum f_n$ car :

- f_n est continue et intégrable sur $]0,1[$.
- $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers une fonction continue par morceaux.
- La série $\sum \int_0^1 \left|t^{2n}\ln t\right| = \sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

Le (2) s'obtient par une simple IPP que à priori, l'on « doit » effectuer sur $[\varepsilon,1]$ puis faire tendre $\varepsilon \to 0$:

$$\int_\varepsilon^1 t^{2n}\ln t\,\mathrm{d}t = \int_\varepsilon^1 \left(\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right)'\ln t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{2n+1}}{2n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \underbrace{\frac{\varepsilon^{2n+1}}{2n+1}\ln\varepsilon}_{\to 0} + \frac{-1}{2n+1}\int_\varepsilon^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(2n+1)^2}$$

ENONCÉ 187

1) Montrez que $y(x)=x$ est solution de $(1+x^2)y''+xy'-y=0$.

2) Calculez la dérivée de $\varphi(x)=\dfrac{-\sqrt{1+x^2}}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et en déduire les solutions de $(1+x^2)y''+xy'-y=x\sqrt{1+x^2}$.

3) Déterminez les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$.

1) Immédiat : $(1+x^2)0+x\times 1-x=0$. x est solution sur $\mathbb{R}$.

2)

$$\left(\frac{-\sqrt{1+x^2}}{x}\right)'=\left(-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\times x+1\times\sqrt{1+x^2}\right)\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2+(1+x^2)}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

Conformément à la méthode générale, on effectue le changement de fonction inconnue $y=xz$ soit $y'=z+xz'$ puis $y''=2z'+xz''$. y est solution sur I ne contenant pas 0 ssi z est solution sur I de :

$$(1+x^2)(2z'+xz'')+x(z+xz')-xz=x\sqrt{1-x^2}\iff x(1+x^2)z''+z'(2+3x^2)=x\sqrt{1+x^2}\ (1)$$

L'équation homogène de (1) s'intègre en :

$$z'=C\exp\left(\int-\frac{2+3x^2}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x\right)=C\exp\left(\int\frac{-2}{x}+\frac{-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right)=C\exp\left(-\ln(x^2)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)=\frac{C}{x^2\sqrt{1+x^2}}$$

puis la méthode de la variation de la constante amène :

$$x(1+x^2)\frac{C'(x)}{x^2\sqrt{1+x^2}}+C(x)\times 0=x\sqrt{1+x^2}\iff C'(x)=x^2\text{ soit }C(x)=\frac{1}{3}x^3$$

Finalement, la solution générale de (1) est $z'=\dfrac{C}{x^2\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{3}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. En se servant du calcul précédent :
$z=\dfrac{-C\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1}{3}\sqrt{1+x^2}+D$ puis $y=xz=-C\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{3}x\sqrt{1+x^2}+Dx$, sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}_-^*$.

3)

Toute solution sur $\mathbb{R}$ ne peut être qu'un recollement d'une solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Recollement par continuité :

$f:\begin{cases}-C\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}x\sqrt{1+x^2}+Dx & \text{si}\quad x>0\\ -C'\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}x\sqrt{1+x^2}+D'x & \text{si}\quad x<0\end{cases}$ Comme $\lim_0 -C\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}x\sqrt{1+x^2}+Dx=-C$, le recollement de deux solutions n'est possible que ssi $C=C'$, en posant $f(0)=-C$.

Dérivabilité du recollement

Soit $f:\begin{cases}-C\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}x\sqrt{1+x^2}+Dx & \text{si}\quad x>0\\ -C & \text{si}\quad x=0\\ -C\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}x\sqrt{1+x^2}+D'x & \text{si}\quad x<0\end{cases}$

Un petit dl à l'ordre 2 mène :

$$-C\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{3}x\sqrt{1+x^2}+Dx=-C\left(1+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)+\frac{1}{3}x+o(x^2)+Dx=-C+\left(\frac{1}{3}+D\right)x-\frac{C}{2}x^2+o(x^2)$$

Il en résulte que le recollement est dérivable à droite en 0 avec $f'_g(0)=\frac{1}{3}+D$. De même il est dérivable à gauche en 0 avec $f'_d(0)=\frac{1}{3}+D'$. Il en résulte que le recollement est dérivable sur $\mathbb{R}$ ssi $D=D'$ et qu'alors $f'(0)=\frac{1}{3}+D$. Par contre, ***on ne***

peut pas déduire du dl l'existence de la dérivée seconde en 0. Tout au plus peut-on dire que si f l'est alors $f''(0) = 2! \times \frac{-C}{2}$.

Double dérivabilité du recollement :

On « *calcule* » f' en revenant à z' plus haut, et on essaye d'effectuer un petit dl à l'ordre 1 : ici on a bien f deux fois dérivable en 0 ssi f' admet un dl à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\left(\frac{C}{x^2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + \left(\frac{-C\sqrt{1+x^2}}{x} + \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} + D\right) \\ &= \frac{C}{x}\left(1+x^2\right)^{-1/2} + \frac{1}{3}x^2\left(1+x^2\right)^{-1/2} - \frac{C}{x}\left(1+x^2\right)^{1/2} + \frac{1}{3}\sqrt{1+x^2} + D \\ &= \frac{C}{x}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) + o(x) - \frac{C}{x}\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right) + \frac{1}{3} + D = \left(\frac{1}{3} + D\right) - Cx + o(x) \end{aligned}$$

Par conséquent, tous les recollements par dérivabilité en 0 sont deux fois dérivables en 0 et même sur $\mathbb{R}$, avec $f''(0) = -C$.

Vérification de solution sur $\mathbb{R}$ ***:***

On sait (cours) que cette étape est toujours vérifiée dans le cadre d'un recollement d'une équatindifférentielle linéaire d'ordre 1. On le vérifie quand même, et seulement en 0 : $(1+0^2)(-C) + 0 \times (D + \frac{1}{3}) - (-C) = 0$. Ok.

CCP PSI 2013 (système différentiel avec étude géométrique)

ENONCÉ 195 Soient $(S)\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& y(t)-z(t)\\ y'(t) &=& z(t)-x(t)\\ z'(t) &=& x(t)-y(t)\end{array}\right.$ avec $x(0)=1,\ y(0)=z(0)=0$.

1) Discuter l'existence et l'unicité d'une solution.

2) Montrez que la trajectoire de la solution est incluse dans une sphère et dans un plan. Reconnaître l'intersection de cette sphère et de ce plan.

3) Résoudre directement (S) et retrouvez les résultats de la question précédente.

1) D'après le théorème de **Cauchy**[7], il existe et une seule solution de ce système différentiel, cad une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, qui passe par la condition initiale $(1,0,0)$.

2) On calcule :

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)'=2xx'+2yy'+2zz'=2x(y-z)+2y(z-x)+2z(x-y)=0$$

$$\left(x+y+z\right)'=x'+y'+z'=y-z+z-x+x-y=0$$

Par primitivation, il vient pour $t\in\mathbb{R}$, et en utilisant la condition initiale : $x^2+y^2+z^2=1$ et $x+y+z=1$. La trajectoire de la solution est donc inscrite sur l'intersection de la sphère de centre O et de rayon 1 et du plan $\mathscr{P}: x+y+z=1$. C'est bien un cercle, puisque $d=d(O,\mathscr{P})=\dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<R=1$. C'est un cercle de rayon $\sqrt{1-d^2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

3) Le système s'écrit :

$$X'=AX \qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

On cherche d'abord les valeurs propres de la matrice associée au système différentiel

$$\chi_A(\lambda)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&-1\\-1&-\lambda&1\\1&-1&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+1-1-\lambda-\lambda-\lambda=-\lambda^3-3\lambda=-\lambda(\lambda+i\sqrt{3})(\lambda-i\sqrt{3})$$

On cherche des vecteurs propres, sachant que les espaces propres sont de dimension 1. Pour la valeur propre 0, on remarque que sur la colonne A, $C_1+C_2+C_3$. Il est donc inutile de résoudre le système associé, puisque ceci nous donne $(1,1,1)\in\ \mathrm{Ker}\,A$ et, par suite, pour des raisons de dimension, $\mathrm{Ker}\,A=\mathrm{Vect}\,(1,1,1)=\mathrm{Vect}\,(u)$. Pour la valeur propre $i\sqrt{3}$, on résoud le système sur $\mathbb{C}$:

$$X\in\ \mathrm{Ker}\,(A-i\sqrt{3}I_3)\iff\left\{\begin{array}{rcl}-i\sqrt{3}x+y-z&=&0\\-x-i\sqrt{3}y+z&=&0\\x-y-i\sqrt{3}z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}-i\sqrt{3}x+y&=&z\\-x-i\sqrt{3}y&=&-z\\x-y-i\sqrt{3}z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&\frac{1}{2}(i\sqrt{3}-1)z\\y&=&\frac{1}{2}(-i\sqrt{3}-1)z\\z&=&z\end{array}\right.$$

Comme la matrice A est ***réelle***, on sait que l'espace propre associé à la valeur propre conjuguée $-i\sqrt{3}$ se calcule par conjugaison des valeurs précédentes. $\mathrm{Ker}\,(A-i\sqrt{3}I_3)=\mathrm{Vect}\,(i\sqrt{3}-1,-i\sqrt{3}-1,2)=\mathrm{Vect}\,(v)$ et $\mathrm{Ker}\,(A+i\sqrt{3}I_3)=\mathrm{Vect}\,(\overline{v})$. Le cours nous apprend alors que $\left(e^{0t}u,e^{i\sqrt{3}t}v,e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v}\right)$ est un système fondamental de solutions sur $\mathbb{C}$, cad les solutions

7. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable, plus de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe et en théorie des groupes.

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^3$. Alors $\left(e^{0t}u, \frac{1}{2}(e^{i\sqrt{3}t}v+e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v}), \frac{1}{2i}(e^{i\sqrt{3}t}v-e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v})\right)$ est un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$(et sur $\mathbb{C}$), puisque :

- Ces fonctions sont bien réelles, puisqu'on reconnaît partie réelle et imaginaire.
- Ce sont bien des solutions puisque combinaisons linéaires (à coefficients complexes) de l'ev complexe des solutions précédentes du système ***linéaire*** sur $\mathbb{C}$.
- Elles sont au nombre de 3 et sont independantes puisque la matrice de passage a un déterminant non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0$$

On calcule :

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\sqrt{3}t}v+e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v}\right) = \Re\mathrm{e}\left(\left(\cos(\sqrt{3}t)+i\sin(\sqrt{3}t)\right)\begin{pmatrix} i\sqrt{3}-1 \\ -i\sqrt{3}-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\cos(\sqrt{3}t)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t)+\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ 2\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{i\sqrt{3}t}v-e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v}\right) = \Im\mathrm{m}\left(\left(\cos(\sqrt{3}t)+i\sin(\sqrt{3}t)\right)\begin{pmatrix} i\sqrt{3}-1 \\ -i\sqrt{3}-1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)-\sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)-\sin(\sqrt{3}t) \\ 2\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

Les solutions réelles sont donc :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \alpha e^{0t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -\cos(\sqrt{3}t)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ -\cos(\sqrt{3}t)+\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ 2\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} \sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)-\sin(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)-\sin(\sqrt{3}t) \\ 2\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha+\cos(\sqrt{3}t)(-\beta+\sqrt{3}\gamma)+\sin(\sqrt{3}t)(-\sqrt{3}\beta-\gamma) \\ \alpha+\cos(\sqrt{3}t)(-\beta-\sqrt{3}\gamma)+\sin(\sqrt{3}t)(\sqrt{3}\beta-\gamma) \\ \alpha+2\beta\cos(\sqrt{3}t)+2\gamma\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}}_{\Omega} + \cos(\sqrt{3}t)\underbrace{\begin{pmatrix} -\beta+\sqrt{3}\gamma \\ -\beta-\sqrt{3}\gamma \\ 2\beta \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{i}} + \sin(\sqrt{3}t)\underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\beta-\gamma \\ \sqrt{3}\beta-\gamma \\ 2\gamma \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{j}}\end{aligned}$$

On voit immédiatement que c'est une courbe tracée dans le plan $(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, mais ce n'est pas nécessairement un cercle, en fait ce peut être une ellipse ! Il faut comparer les normes de $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$:

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{i}\|^2 &= (-\beta+\sqrt{3}\gamma)^2+(-\beta-\sqrt{3}\gamma)^2+4\beta^2 = 6\beta^2+6\gamma^2 \\ \|\overrightarrow{j}\|^2 &= (-\sqrt{3}\beta-\gamma)^2+(\sqrt{3}\beta-\gamma)^2+4\gamma^2 = 6\beta^2+6\gamma^2\end{aligned}$$

Quelles que soient les conditions initiales, c'est donc toujours un cercle (comme vu plus haut, sauf que l'on avait seulement ***inclus***) et son rayon est $R = \sqrt{6}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$.

Remarque : En reprenant les conditions initiales de l'énoncé, on trouve $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = -\frac{1}{6}$ et $\gamma = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Le rayon $R = \sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{12}}$ est bien égal à $\sqrt{\frac{2}{3}}$ comme trouvé plus haut. On remarque aussi que comme $\Omega = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{i} = \frac{1}{3}(2,-1,-1)$, $\overrightarrow{j} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1)$, le plan est bien le plan $x+y+z=1$.

3 Géométrie

Centrale PSI 2013 (quadriques de révolution)

Enoncé 222 Dans $\mathbb{R}^3$, soit $\Omega(1,0,1)$ et D la droite passant par Ω de vecteur directeur $u = (1,1,1)$. On note (S_1) (rp. (S_2)) la surface engendrée par rotation de D autour de l'axe (Oz) (rp. autour de l'axe (Oy)).

1) Déterminer une équation cartésienne de (S_1) et (S_2), puis indiquer leur nature.

2) Soit P le plan (yOz). Donnez l'équation et la nature de $P \cap S_1$ et $P \cap S_2$.

3) Comparez D et $S_1 \cap S_2$.

1) Rappelons que la distance d'un point $M(x,y,z)$ à l'axe $0z$ est $\sqrt{x^2+y^2}$. $M(x,y,z) \in (S_1)$ ssi il appartient à un cercle centré sur l'axe $0z$ (orthogonalement, donc de même « *altitude* ») qui contient un point M_0 de D :

$$M(x,y,z) \in (S_1) \iff \exists x_0, y_0, z_0, \lambda \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{ccc} x^2+y^2 & = & x_0^2+y_0^2 \\ z & = & z_0 \\ x_0 & = & 1+\lambda \\ y_0 & = & 0+\lambda \\ z_0 & = & 1+\lambda \end{array} \right.$$

$$\iff \quad \exists x_0, y_0 \in \mathbb{R} \left\{ \begin{array}{ccc} x^2+y^2 & = & x_0^2+y_0^2 \\ x_0 & = & 1+(z-1) \\ y_0 & = & z-1 \end{array} \right. \iff x^2+y^2 = z^2+(z-1)^2 \iff x^2+y^2-2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Sous cette forme ***réduite***, on reconnaît immédiatement une quadrique, ***hyperboloïde à une nappe*** (de révolution autour de $0z$ évidemment). C'est une quadrique de centre $(0,0,\frac{1}{2})$. De manière analogue pour (S_2) :

$$M(x,y,z) \in (S_1) \iff \exists x_0, y_0, z_0, \lambda \left\{ \begin{array}{ccc} x^2+z^2 & = & x_0^2+z_0^2 \\ y & = & y_0 \\ x_0 & = & 1+\lambda \\ y_0 & = & 0+\lambda \\ z_0 & = & 1+\lambda \end{array} \right. \iff \exists x_0, z_0 \left\{ \begin{array}{ccc} x^2+z^2 & = & x_0^2+z_0^2 \\ x_0 & = & 1+y \\ z_0 & = & 1+y \end{array} \right. \iff x^2+z^2-2(y+1)^2 = 0$$

On reconnait ici aussi une réduite de quadrique, un ***cône de révolution*** (axe $0y$!) et de sommet $(0,-1,0) \in D$.

2) $P \cap S_1$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ d'équation $\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y^2-2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 & = & \frac{1}{2} \end{array} \right.$ On reconnaît une hyperbole.

$P \cap S_2$ est l'ensemble des points $M(x,y,z)$ d'équation $\left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ z^2 & = & 2(y+1)^2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ z & = & \pm\sqrt{2}(y+1) \end{array} \right.$ Deux droites.

3) Par construction, $S_1 \cap S_2 \supset D$. Comme S_1 et S_2 sont invariantes par la transformation $(x,y,z) \to (-x,y,z)$, cad la réflexion s par rapport au plan $y0z$, la droite $D' = s(D) \in S_1 \cap S_2$. En soutrayant l'équation (2) à l'équation (1), on obtient :

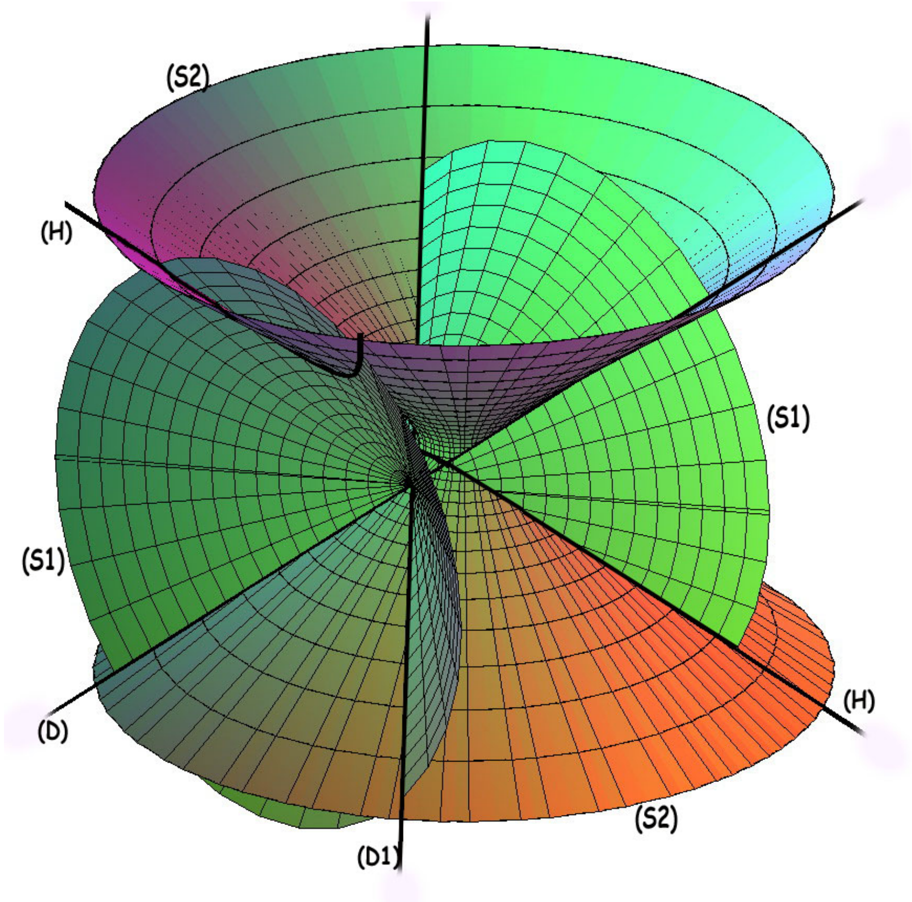
$$y^2+2\left(y+1\right)^2-2\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-z^2-\frac{1}{2}=0 \iff 3\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-3\left(z-\frac{1}{3}\right)^2=0 \iff y+\frac{2}{3}=\pm\left(z-\frac{1}{3}\right)$$

L'intersection $S_1 \cap S_2$ est donc contenue dans deux plans : (P) $y = z-1$ et (P_1) $y = -z-\frac{1}{3}$. Le premier contient les deux droites précédentes et le deuxième une hyperbole équilatère, comme nous allons le démontrer :

$$M \in P \cap S_1 \cap S_2 \iff M \in P \cap S_2 \iff M \in P \text{ et } x^2 = 2(y+1)^2 - z^2 = 2z^2 - z^2 \iff \begin{cases} y &= z-1 \\ x &= \pm z \end{cases}$$

$$M \in P_1 \cap S_1 \cap S_2 \iff M \in P_1 \text{ et } x^2 = 2\left(-z + \frac{2}{3}\right)^2 - z^2 \iff \begin{cases} y &= z - \frac{1}{3} \\ \left(z - \frac{4}{3}\right)^2 - x^2 &= \frac{8}{9} \end{cases}$$

Le dessin suivant a été réalisé à l'aide de ***MapleV*** (sauf les annotations). Les surfaces sont évidemment tronquées. Si vous voulez reproduire ce dessin chez vous, pour le faire « *tourner* », le code Maple est plus bas :




```
> with ( plots ) : a := 4.5 : b := 2.7 :
> S2 := plot3d( [sqrt(2)*(y+1)*cos(t) , y , sqrt(2)*(y+1)*sin(t)], t=0..6.3, y=−4..2,numpoints=1000 ):
> DroiteD := spacecurve( [ 1+t , t , 1+t ] , t=−5..4 , thickness=4 , color=black ):
> DroiteD1 := spacecurve( [ −1−t , t , 1+t ] , t=−5..4 , thickness=4 , color=black ):
> Hyperbole_1 := spacecurve( [ sqrt(8)/3*sinh(u) , −sqrt(8)/3*cosh(u)−5/3 , 4/3+sqrt(8)/3*cosh(u) ] ,
   u=−1.9..1.9 , thickness=6 , color=black ):
> Hyperbole_2 := spacecurve( [ sqrt(8)/3*sinh(u) , sqrt(8)/3*cosh(u)−5/3 , 4/3−sqrt(8)/3*cosh(u) ] ,
   u=−2.4..2.4 , thickness=6 , color=black ):
> S1_1 := plot3d( [ 1/sqrt(2)*cosh(u)*cos(t) , 1/sqrt(2)*cosh(u)*sin(t) , 1/2+1/2*sinh(u) ] ,
   t=0..6.3 , u=−b..b , numpoints=1000):
> S1_2 := plot3d( [ −1/sqrt(2)*cosh(u)*cos(t) , −1/sqrt(2)*cosh(u)*sin(t) , 1/2+1/2*sinh(u) ] ,
   t=0..6.3 , u=−b..b , numpoints=1000 ):
> display ( S2 , S1_1 , S1_2 , DroiteD , DroiteD1 , Hyperbole_1 , Hyperbole_2 ) ;
```