Centrale PSI 2012

Enoncé 126 Dans $\mathbb{R}^3$, on donne les 3 droites : $D_1 : \begin{cases} z &= 1 \\ x &= 0 \end{cases}$ $D_2 : \begin{cases} z &= 0 \\ x &= y \end{cases}$ $D_3 : \begin{cases} z &= -1 \\ y &= 0 \end{cases}$.
Donnez l'équation générale d'une droite coupant ces 3 droites. Définir la surface (S) engendrée par l'ensemble des droites trouvées. Quelle est sa nature ?

Odlt 19-117

Il faut chercher des droites de $\mathbb{R}^3$ avec un minimum de paramètres. La méthode la plus efficace est de les chercher sous la forme $x = az + b \;\; y = cz + d$, mais il manque les droites parallèles à $x0y$ (qu'on cherche ensuite sous la forme $z = a \;\; y = bx + c$ (sauf parallèle à axe $0y$), puis $z = a \; x = b$).

Les droites $x = az + b \; y = cz + d$, non parallèles à $x0y$ rencontrent les 3 droites D_i ssi :

$$\exists x, y \in \mathbb{R}, \begin{cases} 0 &= a+b \\ y &= c+d \\ b &= d \\ 0 &= -c+d \\ x &= -a+b \end{cases} \iff \begin{cases} a &= -b \\ c &= b \\ d &= b \end{cases} \quad \text{soit} \quad (D_b) \begin{cases} x &= b(-z+1) \\ y &= b(z+1) \end{cases}$$

Les 3 droites D_i étant dans 3 plans parallèles à $x0y$, les droites parallèles à $x0y$ ne peuvent les rencontrer toutes les trois. Reste à reconnaître la surface (S) $\bigcup_{b\in\mathbb{R}} D_b$: il suffit d'éliminer le b pour reconnaître une quadrique

$$M(x,y,z) \in S \iff \exists b, z \in \mathbb{R},\; (x,y,z) \in (D_b) \iff \frac{x}{-z+1} = \frac{y}{z+1} \iff xz + yz + x - y = 0$$

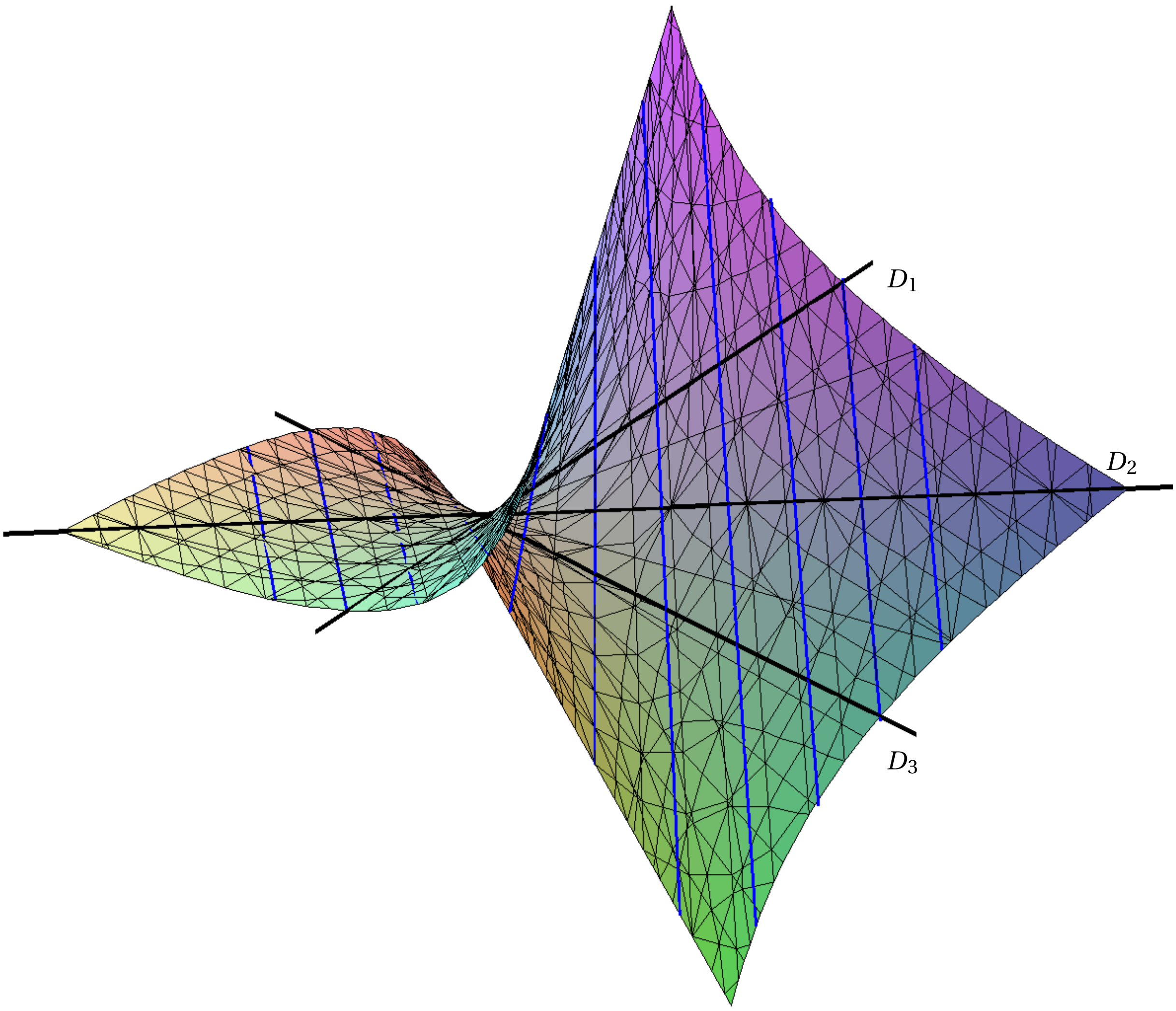
Méthode 1 :

On réduit la forme quadratique $Q(x,y,z) = xz + yz = {}^tXSX$ avec $S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&1 \\ 1&1&0 \end{pmatrix}$. On peut commencer par regarder le signe des valeurs propres $\operatorname{tr} S = 0$ et $\det S = 0$ amènent une valeur propre nulle et deux de signes opposées (non nulles). Il y a deux possibilités : paraboloïde hyperbolique ou cylindre hyperbolique (éventuellement dégénérés en 2 plans). On calcule un peu plus : le polynôme caractéristique de S est $\chi_S(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda = -\lambda(\lambda - \sqrt{2})(\lambda + \sqrt{2})$. L'espace propre associé à 0 est « visiblement » $\operatorname{Vect}(1, -1, 0$. Le plan contenant les deux autres est $x - y = 0$, ce qui sans calcul supplémentaire amène que dans un nouveau repère orthonormé où $(1, -1, 0)$ est l'axe OZ, la nouvelle équation est $\sqrt{2}(X^2 - Y^2) + \alpha Z = 0$, donc paraboloide hyperbolique

Méthode 2 : _ On remarque que les groupements $x + y$ et $x - y$, par une rotation de repère d'axe $0z$ et d'angle $\pi/4$ « deviennent » $\sqrt{2}X$ et $\sqrt{2}Y$, d'où $\sqrt{2}XZ = \sqrt{2}Y$, puis une autre rotation autour de $0Y$ et d'angle $\pi/4$ donne $X'^2 - Z'^2 = (X' - Z')(X' + Z') = 2XZ = 2Y = 2Y'$. On reconnaît immédiatement la réduite d'un paraboloïde hyperbolique.

Remarque : Les surfaces « réunion de droites » s'appelent des surfaces réglées. Il y a 5 quadriques réglées : les cylindres (réunion de droites parallèles à la direction du cylindre) parabolique et hyperbolique, le cône (réunion de droites concourantes au sommet) elliptique, l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique.

On dessine ici le paraboloïde hyperbolique avecc quelques droites (en bleu) tracées dessus. La surface est tronquée à $[-3, 3]^2$:



□

CCP PSI 2012

ENONCÉ 1231040 Extrema locaux de $f:(x,y)\in(\mathbb{R}_+^*)^2 \to xy+8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$?

RMS 123-1040

$\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2 = \left]0,+\infty\right[\times\left]0,+\infty\right[$ est bien ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit d'intervalles ouverts. Les extrema $M=(x,y)$ de f sont ***donc*** des points critiques de f, cad des points de dérivées partielles nulles. On cherche $x,y>0$ et on en trouve un seul possible :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y-8\dfrac{1}{x^2} & = & 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x-8\dfrac{1}{y^2} & = & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y & = & \dfrac{8}{64/y^4}\\ x & = & \dfrac{8}{y^2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} y(y^3-8) & = & 0\\ x & = & \dfrac{8}{y^2}\end{array}\right. \iff M=(2,2)$$

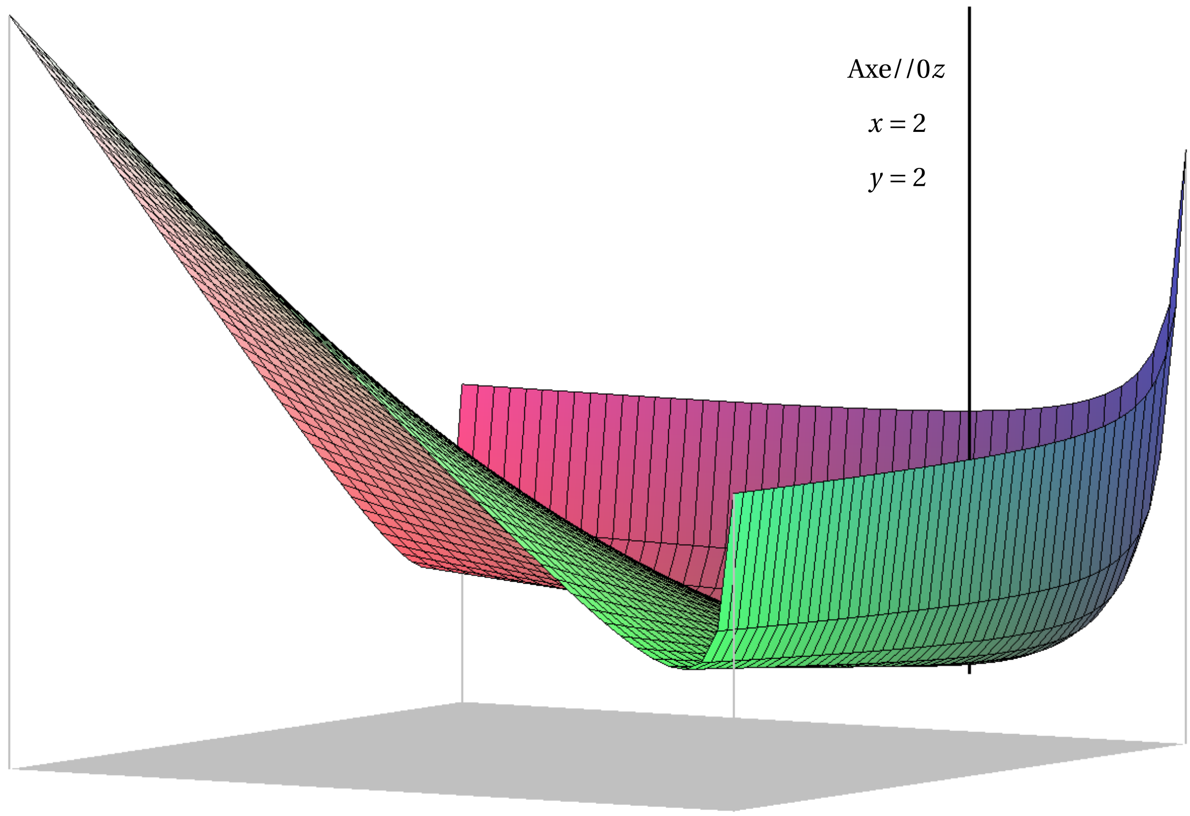
Réciproquement, on va utiliser $\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+x/2}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+o(x^2))$, lorsque $x\to 0$ et on doit considérer, pour $(h,k)\to(0,0)$, le signe de $f(2+h,2+k)-f(2,2)$ (différence « d'altitude ») :

$$\begin{aligned} f(2+h,2+k)-f(2,2) &= (2+h)(2+k)+8\left(\frac{1}{2+h}+\frac{1}{2+k}\right)-12\\ &= 4+2h+2k+hk+8\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2+h^2\varepsilon(h)\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}k+\frac{1}{4}k^2+k^2\varepsilon(k)\right)\right)-12\\ &= h^2+hk+k^2+4h^2\varepsilon(h)+4k^2\varepsilon(k)\end{aligned}$$

Pour ***deviner*** le signe ***local*** de cette quantité, on regarde le signe de la forme quadratique des ***termes d'ordre 2*** $Q(h,k) = h^2 + hk + k^2$. Pour ceci, en général, on regarde le signe des valeurs propres de la matrice symétrique canoniquement associée $S = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$, mais il est plus simple d'écrire $Q(h,k) = (h + \frac{1}{2}k)^2 + \frac{3}{4}k^2$ pour voir immédiatement que Q est définie positive et on « devine donc » que c'est un minimum. Montrons-le en « bidouillant » subtilement la négligeabilité des autres termes :

$$f(2+h,2+k) - f(2,2) = \frac{1}{2}(h+k)^2 + \frac{1}{2}h^2(1+8\varepsilon(h)) + \frac{1}{2}k^2(1+8\varepsilon(k))$$

Comme $1+8\varepsilon(h) \to 1 > 0$ et $1+8\varepsilon(k) \to 1 > 0$,par continuité, pour h,k assez proches de 0, on déduit que cette quantité est (localement) positive, cad $M(2,2)$ minimum (au moins local) de f sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Sur le dessin de la surface « associée » $z = f(x,y)$, on voit que c'est un minimum global. La surface est tronquée à $[0,10]^2$ d'où les « faux coins » en haut.



□

CCP PSI 2012 Variante numérique

ENONCÉ 16 Soit A,B,C 3 matrices carrées d'ordre n complexes telles que $A = B+C$, $A^2 = 3B+C$, $A^3 = 5B+6C$. Trouvez un polynôme annulateur de A et montrez que ces matrices sont diagonalisables.

Odlt 19-216 cple serie de fonctions

$$\left\{\begin{array}{lcl} A & = & B+C \\ A^2 & = & 3B+C \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} B & = & \frac{1}{2}(A^2-A) \\ C & = & \frac{1}{2}(3A-A^2) \end{array}\right. \implies A^3 = \frac{5}{2}(A^2-A) + \frac{6}{2}(3A-A^2) = -\frac{1}{2}A^2 + \frac{13}{2}A$$

Le polynôme $P(X) = X^3 + \frac{1}{2}X^2 - \frac{13}{2}X = X(X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{13}{2})$ est annulateur de A et scindé à racines simples ($\Delta > 0$), donc A est diagonalisable, puis A^2 aussi au travers de la même matrice de passage P, puisque $A = PDP^{-1} \implies A^2 = PD^2P^{-1}$.

En se servant du système résolu plus haut, $B = P\frac{1}{2}(D^2 - D)P^{-1}$ et $C = P\frac{1}{2}(3D - D^2)P^{-1}$, prouvent B, C diagonalisables et même codiagonalisables (puisque c'est le même P) car les matrices $\frac{1}{2}(D^2 - D)$ et $\frac{1}{2}(3D - D^2)$ sont bien diagonales. (stabilité par + et . de l'ev des matrices diagonales d'ordre n $D_n(\mathbb{R})$)

CCP PSI 2012

ENONCÉ 25 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall\, 1 \le k \le n,\ \operatorname{tr}(A^k) = 0$.

1) En calculant $\operatorname{tr}(\chi_A(A))$, montrez 0 valeur propre de A.

2) Montrez que A est semblable à une matrice A' dont la dernière colonne contient que des 0. On note B lamatrice obtenue en supprimant à A' la dernière ligne et la dernière colonne.

3) Montrez $\forall\, 2 \le k \le n,\ B^k = 0$. En déduire $A^n = 0$.

Odlt 19-210

Q1) Par le théorème de **Cayley**[1]-**Hamilton**[2], le polynôme caractéristique de A est annulateur de A, cad $\chi_A(A) = 0$. Il vient $\operatorname{tr}(\chi_A(A)) = 0$. D'autre part, si $\chi_A(x) = (-1)^n(X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0)$, par linéarité, $\operatorname{tr}(\chi_A(A) = (-1)^n(\operatorname{tr}(A^n) + a_{n-1}\operatorname{tr}(A^{n-1}) + \cdots + a_1\operatorname{tr}(A) + a_0\operatorname{tr}(I)$, et en utilisant l'hypothèse sur les traces des A^k, $0 = \operatorname{tr}(\chi_A(A)) = a_0 n \implies a_0 = 0$. 0 est donc racine de χ_A, cad valeur propre de A.

Q2) 0 étant valeur propre de A, il existe un vecteur $U \neq 0$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $AU = 0$. On complète en une base $\mathcal{E} = (E_1, \ldots, E_{n-1}, U)$ de $\mathbb{R}^n$. En considérant la matrice P dont les colonnes sont ces éléments, cad la matrice de passage inversible de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{E}$, on a $P^{-1}AP = A'$, où la dernière colonne correspond aux coordonnées de $AU = 0$ dans la base $\mathcal{E}$, donc est nulle.

Q3) On a $A' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et C vecteur-ligne d'ordre $n-1$. Cette matrice étant triangulaire par blocs de blocs diagonaux B et 0, on sait alors $\forall\, 1 \le k \le n,\ A'^k = \begin{pmatrix} B^k & 0 \\ C_k & 0^k \end{pmatrix}$. Il vient alors $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(A'^k) = \operatorname{tr}(B^k) + 0 = 0$.

Montrons, ***par récurrence sur*** $n \ge 1$, que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $\operatorname{tr}(A^k) = 0$, pour $1 \le k \le n$, alors $A^n = 0$ (cad A nilpotente).

- $n = 1$. $A = (a)$. L'hypothèse $\operatorname{tr}(A) = a = 0$, amène $A = A^1 = 0$.
- Supposons l'hypothèse vraie jusqu'à $n-1$ et considérons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr}(A^k) = 0$, pour $1 \le k \le n$. Les questions précédentes amènent l'existence d'une matrice $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ vérifiant les hypothèses de récurrence à l'ordre $n-1$. Il vient donc $B^{n-1} = 0$, puis, en utilisant :

$$A'^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \implies A'^n = A' \times A'^{n-1} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C_{n-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par similitude, on a aussi $A^n = 0$. (Remarque : si on calculait $A'^{n-1} \times A'$, on ne trouvait pas 0 !)

Mines-Ponts PSI 2012

ENONCÉ 28 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminez les valeurs propres de $\operatorname{com} A$.

Indication : commencez par le cas inversible.

RMS 123-583

- Si A est inversible, on sait $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t\mathrm{com}\,A$, soit $\mathrm{com}\,A = \det(A)\ {}^t(A^{-1})$. Comme une matrice a les mêmes valeurs propres que sa transposée, et que les valeurs propres de A^{-1}, sont les inverses de celles de A, il vient que si les valeurs propres de A sont notées (avec leur multilicité) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, les valeurs propres de $\mathrm{com}\,A$ sont donc les n complexes :
$$\det A\ \frac{1}{\lambda_i} = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{\lambda_i} = \prod_{j\neq i} \lambda_j$$
On va démontrer que ce résultat reste vrai dans le cas général (donc lorsque au moins l'un des λ_j vaut 0).

- Si $\mathrm{rg}\,A \leq n-2$, alors $\mathrm{com}\,A = 0$, donc toutes les valeurs propres de $\mathrm{com}\,A$ sont nulles. En effet, on sait, cours sur le rang d'une matrice, que $\mathrm{rg}\,A = r$ ssi il existe une sous-matrice carrée d'ordre r de A inversible. Or, si $\mathrm{rg}\,A \leq n-2$, toutes les sous-matrices d'ordre $n-1$ sont non inversibles, donc un déterminant nul. Il s'ensuit que tous les coafacteurs sont nuls, cad $\mathrm{com}\,A = 0$.
On notera, que si $\mathrm{rg}\,A \leq n-2$, $\mu(0) \geq \dim\ \mathrm{Ker}\,A \geq 2$, donc au moins deux λ_j de A sont nuls, donc $\prod_{j\neq i} \lambda_j$ est toujours nul. La formule vue plus haut convient bien …

- Ici $\mathrm{rg}\,A = n-1$. On sait $A \times \mathrm{com}\,A = (\det A)I = 0$. Il vient $\mathrm{Im}\,\mathrm{com}\,A \subset \mathrm{Ker}\,A$, donc $\mathrm{rg}\,\mathrm{com}\,A \leq 1$ donc $= 1$ (sinon on aurait $\mathrm{com}\,A = 0$). Il s'ensuit, par un raisonnement habituel que 0 est valeur propre d'ordre au moins $n-1$ de $\mathrm{com}\,A$. On trouve la dernière par la trace. On utilise le « résultat classique » que le coefficient en X du polynôme caractéristique de A est $-\mathrm{tr}(\mathrm{com}\,A)$. (Rappel : le coefficient constant est $\det A$ et le coefficient en X^{n-1} est $(-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)$). En utilisant le théorème de relation coefficient-racines d'un polynôme, comme les n racines de $\chi_A(x)$ sont $\lambda_i, \ldots, \lambda_n$, le coefficient en X est $(-1)^n \times (-1)^{n-1}\sigma_{n-1}$ où σ_{n-1} est l'expression symétrique élémentaire en les $n-1$ racines, soit $\sum_{i=1}^n \prod_{j\neq i} \lambda_j$. Comme ici, une racine (valeurs propre) est nulle, σ_{n-1} est le produit des racines non nulles, d'où finalement la dernière valeur propre de $\mathrm{com}\,A$ (la seule non nulle) est $-(-\sigma_{n-1}) = \prod_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j$.
On notera que ici aussi, les n valeurs propres de $\mathrm{com}\,A$ sont bien les $\prod_{j\neq i} \lambda_j$, pour $1 \leq i \leq n$, qui sont bien $n-1$ fois nulles sauf pour le i tel que $\lambda_i = 0$.

CCP PSI 2012

Enoncé 36 Soient $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ une base de $\mathbb{C}_n[X]$ et $a \in \mathbb{C}$.

1) Montrez que $(P_k(X+a))_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

2) Soient $a \neq b \in \mathbb{C}$. Montrez que $((X-a)^k(X-b)^{n-k})_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
(*On pourra utiliser les polynômes* $X^k(X+a-b)^{n-k}$).

Odlt 19-209 cpl integrales

La famille $(P_k(X+a))_{0\leq k\leq n}$ est une famille de $n+1$ polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ libre car, soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_0 P_0(X+a) + \ldots \alpha_n P_n(X+a) = 0 = R(X+a)$. R s'annule en tout $x+a$, donc en tout x!, soit $\alpha_0 P_0(X) + \ldots \alpha_n P_n(X) = 0$, d'où $\alpha_0 = \cdots = \alpha_n = 0$. c'est donc une base de $\mathbb{C}_n[X]$. On aurait aussi pu dire que l'application $\varphi_a : P(X) \longrightarrow P(X+a)$ est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$. Elle est bijective, car de réciproque $P(X) \longrightarrow P(X-a)$. $(P_k(X+a))_{0\leq k\leq n}$ estdonc une base en tant qu'image de la base $(P_k(X))_{0\leq k\leq n}$ par l'automorphisme φ_a.

On a ici aussi, juste à démontrer la liberté : soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha_0(X-a)^0(X-b)^n + \cdots + \alpha_n(X-a)^n(X-b)^0 = 0$. La valeur en a de ce polynôme amène $\alpha_0(a-b)^n = 0 \implies \alpha_0 = 0$, car $a \neq b$. On pose $R_k(X) = (X-a)^k(X-b)^{n-k}$. Ensuite, la dérivée en a amène $\alpha_1 R_1'(a)=0$, puisque $R_2'(a)=\cdots=R_n'(a)=0$, a étant racine de multiplicité $k\geq 2$ de R_k. De plus, a est racine de multiplicité 1 de R_1 (car $a\neq b$), donc $R_1'(a)\neq 0$. Il vient $\alpha_1=0$. Ensuite, la dérivée seconde en a donne $\alpha_2=0$. On réitère jusqu'à la dérivée $n$ième en a qui donnera, in fine, $\alpha_n=0$.

Mines-Ponts PSI 2012

Enoncé 123577 Déterminez le commutant de $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2\neq 0$ et $f^3=0$.

RMS 123-577

Le commutant $C(f)$ de f est l'ensemble des endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ commutant avec f. C'est un ev, car c'est le noyau de l'application linéaire $\varphi_f:\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)\to\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$, $g\longrightarrow f\circ g-g\circ f$. D'autre part, on a toujours trivialement $C(f)\supset \mathrm{Vect}(f^k)_{0\leq k<n}$. (ce n'est pas utile que $k\geq n$, car par Cayley-Hamilton, les puissances de f supérieures ou égales à n sont combinaisons linéaires de $(Id,f,f^2,\dots,f^{n-1})$. Comme ici, il est clair que (Id,f,f^2) est libre, on en déduit $\dim C(f)\geq 3$.

Le plus simple est d'essayer de diagonaliser, sinon de trigonaliser f. La seule valeur propre étant 0, f n'est pas diagonalisable, puisque $f\neq 0$. On construit une base $\mathscr{E}=(e_1,e_2,e_2)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}(f,\mathscr{E})=A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Je ne mets pas l'analyse ici. Comme 0 est valeur propre de f (f n'est pas inversible et d'ailleurs nilpotente), il existe e_1 tel que $f(e_1)=0$. Comme $\{0\}\subsetneq \mathrm{Ker}\, f\subsetneq \mathrm{Ker}\, f^2$, on prend $e_3\neq 0\in \mathrm{Ker}\, f^2-\mathrm{Ker}\, f$, et on pose $e_2=f(e_3)$. On obtient bien alors la matrice plus haut. Reste à démontrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}^3$, cad libre : laissé au lecteur. facile. Ensuite, on effectue un petit calcul de matrices 3×3 :

$$M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\times A=A\times M \iff \left\{\begin{array}{ccc}0&=&d\\a&=&e\\b&=&f\\0&=&g\\d&=&h\\e&=&i\\0&=&0\\g&=&0\\h&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc}d=g=h&=&0\\a=e=i&=&a\\b=f&=&b\end{array}\right. \iff M=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}$$

On reconnaît immédiatement $aI+bA+cA^2$, soit $C(f)=\mathrm{Vect}(Id,f,f^2)$. Un endomorphisme où le commutant est l'ev engendré par toutes les puissances de f (qui d'ailleurs est égal à l'ensemble de tous les polynômes en f, soit $\mathbb{C}[f]$) est appelé ***endomorphisme cyclique***.

Pour un endomorphisme diagonalisable, il est facile d'avoir la dimension du commutant (et même le commutant) : si les valeurs propres distinctes sont $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ de multilicités respectives $m_1,\dots,m_p$, alors $\dim C(f)=\sum_{k=1}^p m_i^2$. En particulier, on voit que si l'une des valeurs propres est au moins double, $\dim C(f)>n$ et donc ce n'est pas un endomorphisme cyclique et il existe des endomorphismes qui commutent avec f qui ***ne sont pas*** des combinaisons de puissances de f, cad ***qui ne sont pas*** des polynômes en f. Si l'endomorphisme se diagonalise en $\mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{m_1},\dots,\lambda_p I_{m_p})$, un calcul par blocs élémentaire montre que toutes les matrices qui commutent sont les matrices diagonales par blocs $\mathrm{Diag}(A_1,\dots,A_p)$ où A_i est une matrice quelconque d'ordre m_i. La dimension $\sum_{k=1}^p m_i^2$ vient alors aisément.

Petites Mines PSI 2012

ENONCÉ 1231012 Rayon de Convergence de $x \to \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{\cosh(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}\right) x^n$.

RMS 123-1012

$$\ln\left(\frac{\cosh(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}\right) = \ln\left(\frac{1-\dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{1}{n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)}{1+\dfrac{\pi^2}{2}\dfrac{1}{n^2}+O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)}\right) = \ln\left(\left(1-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\left(1-\frac{\pi^2}{2}\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)$$
$$= \ln\left(1-\pi^2\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = -\pi^2\frac{1}{n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right) \sim -\pi^2\frac{1}{n^2}$$

Méthode 1 : On utilise le critère d'**Alembert**[3] pour les séries numériques :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\ln\left(\frac{\cosh(\pi/n+1)}{\cos(\pi/n+1)}\right)\ x^{n+1}}{\ln\left(\frac{\cosh(\pi/n)}{\cos(\pi/n)}\right)\ x^n}\right| \sim \frac{\pi^2}{(n+1)^2}\frac{n^2}{\pi^2}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$$

- Si $|x|<1$, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc $R \geq 1$.
- Si $|x|>1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, donc $R \leq 1$.

Méthode 2 : On utilise directement le résultat « limite-cours » Si deux séries entières $\sum a_n x^n$ de rayon R_A et $\sum b_n x^n$ de rayon R_b vérifient $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$. On a immédiatement $R=1$ par la série convergente de **Riemann**[4] $\sum \frac{1}{n^2}$.

Centrale PSI 2012

ENONCÉ 78 Soit $f : x \to \sum_{n=2}^{+\infty} \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1) Déterminez l'ensemble de définition de f.

2) Montrez que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) Est-elle dérivable à droite en 0 ?

4) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

RMS 123-844

Q1) Si $x>0$, on a $f_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où $\sum f_n(x)$ converge. Si $x=0$, la série $\sum f_n(0)=0$ converge et si $x<0$, $\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f_n(x) = +\infty \neq 0$ amène la divergence de $\sum f_n(x)$. Conclusion : Def $f = \mathbb{R}_+$.

Q2) On applique le théorème $\mathscr{C}^1$ d'une série de fonctions sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$, après avoir calculé $f_n'(x) = \frac{e^{-nx}}{\ln n}(1-nx)$:

- Les fonctions f_n sont clairement C^1 sur $[a,b]$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$.
- La série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément car normalement sur $[a,b]$ car $\|f_n'\|_{+\infty,[a,b]} \leq \dfrac{e^{-na}}{\ln n}(1+nb) = o\left(1/n^2\right)$, car $a>0$ et croissances comparées.

3. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).
4. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

Q3) ***Méthode 1 :***

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)}{x}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{e^{-kx}}{\ln k}\geq\sum_{k=2}^{n}\frac{e^{-kx}}{\ln k}\geq\frac{1}{\ln n}\sum_{k=2}^{n}\left(e^{-x}\right)^k=\frac{1}{\ln n}\frac{e^{-2x}-e^{-(n-1)x}}{1-e^{-x}}\sim_{x\to 0}\frac{x(n-3)}{x\ln n}\xrightarrow[x\to 0]{}\frac{n-3}{\ln n}$$

Comme $\frac{n-3}{\ln n}\to+\infty$, il existe N_0 tel que $\frac{N_0-3}{\ln N_0}\geq 2A$. Pour ce N_0, en vertu de la limite plus haut, il existe $\eta>0$ tel que, pour $0<x<\eta$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\geq\frac{N_0-3}{\ln N_0}-1\geq 2A-1$. $2A-1$ étant quelconque, on vient de démontrer $\lim\limits_{x\to 0, x>0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$, cad f n'est pas dérivable (à droite) en 0.

Méhode 2 :

Supposons que f soit dérivable en 0, alors le taux d'accroissement est borné localement à droite en 0, cad il est majoré pour x assez petit, cad pour $x=\frac{1}{n}$, avec $n\geq N_0$.

$$\forall\, n\geq N_0,\ M\geq\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{e^{-kx}}{\ln k}\geq\sum_{k=2}^{n}\frac{e^{-kx}}{\ln k}\geq e^{-nx}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}=e^{-1}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\ln k}$$

On en déduit que les sommes partielles de la série $\sum\frac{1}{\ln n}$ sont majorées alors que la série diverge. Absurde.

Mines-Ponts PSI 2012

Enoncé 80 Soitr, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n: x\to\arctan\left(\dfrac{n+x}{1+nx}\right)$. Etudiez la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions (f_n).

RMS 123-603

Etude de la convergence simple de la suite (f_n) ***sur*** $\mathbb{R}_+$

Soit $x>0$ fixé. Comme $\frac{n+x}{1+nx}\sim_{n\to+\infty}\frac{n}{nx}=\frac{1}{x}$, il vient $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\arctan\frac{1}{x}$, par continuité de la fonction arctangente. Pour $x=0$, on a immédiatement $\lim f_n(0)=\lim\arctan n=\frac{\pi}{2}$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction f définie par $f(x)=\arctan\frac{1}{x}$, pour $x>0$, et $f(0)=\frac{\pi}{2}$.

Etude de la convergence uniforme de la suite (f_n) ***sur*** $\mathbb{R}_+$

On constate que f est bien continue sur $\mathbb{R}_+$, notamment en 0, car $\lim_0=\arctan(+\infty)=\frac{\pi}{2}=f(0)$. (Sinon, on aurait pu en déduire tout de suite la ***non-convergence uniforme*** vers f sur $\mathbb{R}_+$, les f_n étant continues ...).

Par efficacité, on va utiliser la formule trigonométrique (pas vraiment au programme) : si $ab<1$, $\arctan a+\arctan b=\arctan(\frac{a+b}{1-ab})$.

Ici, $a=\frac{n+x}{1+nx}$ et $b=-\frac{1}{x}$. On cherche le sup en valeur absolue de $f_n(x)-f(x)$. Par la formule et la croissance d'arctangente, ses variations sur $\mathbb{R}_+$ de sont les mêmes que celles de $g_n(x)$:

$$g_n(x)=\frac{f_n(x)-f(x)}{1+f_n(x)f(x)}=\left(\frac{n+x}{1+nx}-\frac{1}{x}\right)\Big/\left(1+\frac{n+x}{x(1+nx)}\right)=\frac{x^2-1}{nx^2+2x+n}\implies g_n'(x)=\frac{2(x^2+2nx+1)}{(nx^2+2x+n)^2}\geq 0$$

$$\|f_n-f\|_\infty=\max\left(\left|\lim_0(f_n-f)\right|,\left|\lim_{+\infty}(f_n-f)\right|\right)=\max\left(\frac{\pi}{2}-\arctan n,\arctan(\frac{1}{n})\right)=\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\longrightarrow 0$$

On rappelle la formule pour $x>0$, $\arctan(x)+\arctan(1/x)=\frac{\pi}{2}$. Il y a bien convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}_+$.

Navale 2012

ENONCÉ 99 Soit $f : x \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminez le domaine de définition de f.

2) Que dire de la régularité de f ?

3) Déterminez la limite de f en $+\infty$.

RMS 123-1025

Q1) La fonction $f_x(t) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour $x > 0$, on a $|f_x(t)| \sim_{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t} = o(\frac{1}{t^2})$. Il vient l'intégrabilité de f_x sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x = 0$, $f_0 \sim_{+\infty} \frac{1}{t}$, dont l'intégrale de **Riemann**[4] $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est divergente. Pour $x < 0$, on a $\lim_{t\to+\infty} f_x(t) = +\infty$ par croissances comparées. On en déduit la non-intégrabilité de f_x sur $\mathbb{R}_+$. Finalement $\mathrm{Def} f = \mathbb{R}_+^*$.

Q2) On va démontrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème ***étendu*** C^n pour une intégrale à paramètre sur tout segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$. $(x,t) \to \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}$ est bien C^∞ sur $\mathbb{R}^2$, donc les dérivées partielles par rapport à x existent bien à tout ordre.

- $\forall\, 0 \le k \le n, \forall\, x \in [a,b]$, $t \to \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \dfrac{(-t)^k e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- $\forall\, 0 \le k \le n, \forall\, t \in \mathbb{R}_+$, $t \to \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \dfrac{(-t)^k e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}$ est continue sur $[a,b]$.
- ***Hypothèse de Domination***
  $\forall\, 0 \le k \le n, \forall\, t \in \mathbb{R}_+ , \forall\, x \in [a,b]$, $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \le \dfrac{b^k e^{-ta}}{\sqrt{1+t^2}} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ (car $a > 0$), donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Q3)

$$\left|f(x)\right| \le \int_0^{+\infty} \left|\frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t^2}}\right| \mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{e^{-tx}}{-x}\right]_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

CCP PSI 2012

ENONCÉ 102

1) Déterminez les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \left|\ln(1-t)\right|^\alpha \mathrm{d}t$ soit convergente. Calculez la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.

2) La série $\sum I_n$ est-elle convergente ?

Odlt 19183

Q1) La fonction $f_n : t \to t^n|\ln(1-t)|^\alpha$ est continue et positive sur $]0,1[$. $f_n(t) \sim_0 \frac{1}{t^{-n-\alpha}}$. Par comparaison à une intégrale de **Riemann**[4], il en résulte f_n intégrable sur $]0,1/2]$ ssi $\alpha > -n-1$. En utilisant $\lim_{t\to1} \sqrt{1-t} f_n(t) = 0$, par croissances comparées, il vient $f_n(t) = o_1(\frac{1}{(1-t)^{1/2}})$, d'où l'intégrabilité sur $[1/2,1[$, pour tout α réel. Conclusion : I_n converge (absolument) ssi $\alpha > -n-1$, donc la suite (I_n) existe ssi $\alpha > -1$.

Pour $0 \le t < 1$ fixé, $f_n(t) \to 0$, et d'autre part, l'hypothèse de domination est vérifiée puisque $|f_n(t)| \le t|\ln(1-t)|^\alpha$, intégrable sur $]0,1[$, puisque c'est f_1. Le théorème de convergence dominée de **Lebesgue**[5] s'applique : $\lim I_n = 0$.

4. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.
5. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

Q2) De l'inégalité de convexité bien connue $\ln t \leq t-1$, il vient $\ln(1-t) \leq -t$, puis pour $0<t<1$, $|\ln(1-t)| \geq |t|$ et :

$$I_n = \int_0^1 t^n \left|\ln(1-t)\right|^\alpha \mathrm{d}t \geq \int_0^1 t^n\, t^\alpha\, \mathrm{d}t = \frac{1}{n+\alpha+1}$$

Du critère de comparaison d'une série positive au terme général d'une série harmonique divergente, il résulte que la série $\sum I_n$ diverge.

Mines Nancy PSI 2012

Enoncé 111 Résoudre le système différentiel : $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -3x+5y-5z \\ y' & = & -4x+6y-5z \\ z' & = & -4x+4y-3z \end{array}\right.$.

RMS 123-1036

$$X' = AX \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -5 \\ -4 & 6 & -5 \\ -4 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Un calcul du polynôme caractéristique χ_A de A par la méthode de **Sarrus**[6] amène $\chi_A(\lambda) = -\lambda^3+7\lambda-6$ de racine évidente 1, puis $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3)$. Les 3 valeurs propres étant distinctes, la matrice A est diagonalisable.

On calcule les espaces propres, **sachant que** ce sont des droites :

Espace Propre $\mathbf{E(1)}$ ***associé à 1 « par le système »***

$$X=(x,y,z) \in E(1) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -3x+5y-5z & = & x \\ -4x+6y-5z & = & y \\ -4x+4y-3z & = & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -4x+5y & = & 5z \\ -4x+4y & = & 4z \\ z & = & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & z \\ z & = & z \end{array}\right. \Longleftrightarrow E(1) = \mathrm{Vect}\,(0,1,1)$$

Espace Propre $\mathbf{E(2)}$ ***associé à 2 « par les colonnes »***

$$A-2I = \begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ -4 & 4 & -5 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

On remarque $C_1 = -C_2$ ou $C_1+C_2+0C_3 = 0$ qui amène $(A-2I)(1,1,0) = (0,0,0)$, puis $\mathrm{Vect}\,(1,1,0) \subset E(2) = \mathrm{Ker}\,(A-2I)$.

Comme on sait que $E(2)$ est une droite, on a l'égalité.

On trouve par une méthode analogue $E(-3) = \mathrm{Vect}\,(1,1,1)$.

Méthode 1 :

On sait d'après le cours qu'un système fondamental de solutions est :

$$\left(e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{d'où} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e^{2t} + \gamma e^{-3t} \\ \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{-3t} \\ \alpha e^t + \gamma e^{-3t} \end{pmatrix}$$

6. **Sarrus Pierre-Frédéric** : français (1798-1861). Connu pour la méthode de calcul éponyme du déterminant d'ordre 3.

Méthode 2 :

On diagonalise effectivement la matrice :

$$A = PDP^{-1} \qquad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

puis $X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff Y' = DY$, en posant $Y = P^{-1}X = (u, v, w) \iff X = PY$.

$$Y' = DY \iff \left\{ \begin{array}{ccc} u & = & u \\ v' & = & 2v \\ w' & = & -3w \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} u & = & \alpha e^t \\ v & = & \beta e^{2t} \\ w & = & \gamma e^{-3t} \end{array} \right. \qquad X = PY = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{2t} \\ \gamma e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta e^{2t} + \gamma e^{-3t} \\ \alpha e^t + \beta e^{2t} + \gamma e^{-3t} \\ \alpha e^t + \gamma e^{-3t} \end{pmatrix}$$

TPE PSI 2012

ENONCÉ 114 On munit l'espace $\ell_\infty(\mathbb{C})$ des suites bornées de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\Delta : (u_n)_{n\geq 0} \in \ell_\infty(\mathbb{C}) \to (u_{n+1} - u_n)_{n\geq 0}$. Montrez que Δ est un endomrophisme continu. Calculez sa norme subordonnée.

RMS 123-990

Il est clair que Δ est un endomorphisme de $\ell_\infty(\mathbb{C})$. $\|\Delta(u_n)\|_\infty = \|u_{n+1} - u_n\|_\infty \leq \|u_{n+1}\|_\infty + \|u_n\|_\infty \leq 2\|u_n\|_\infty$.

Ceci établit la continuité de Δ et aussi $|||\Delta||| \leq 2$.

Pour démontrer l'inégalité réciproque, on considère la suite $v_n = (-1)^n$ qui est bien une suite complexe bornée.

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\Delta(v_n)| = |(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2$, il vient $\|\Delta(v_n)\|_\infty = 2$ et $\|v_n\|_\infty = 1$.

De la définition $|||\Delta||| = \sup\limits_{(u_n)\neq(0)} \dfrac{\|\Delta(u_n)\|_\infty}{\|u_n\|_\infty}$, on tire $|||\Delta||| \geq \dfrac{\|\Delta(v_n)\|_\infty}{\|v_n\|_\infty} = 2$, puis finalement $|||\Delta||| = 2$