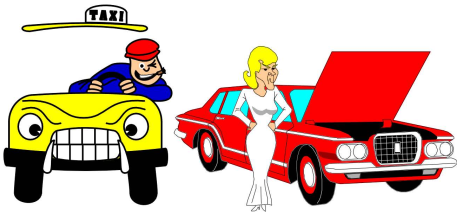
Feuille d'Exercices 14
Calcul différentiel



Dérivées Partielles / Différentielle

Dérivée Partielle Première en un Point : On dit que f ***admet une dérivée partielle première*** par rapport à la i-ième variable ***en*** A ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
(i) L'application d'***une variable réelle*** $\phi : t \to f(a_0,\dots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\dots,a_n) = f(A+t\vec{e_i})$ est ***dérivable en*** $t=0$.
(ii) La i-ième ***application partielle première*** en A $f_{i,A}$ est ***dérivable*** en $x_i = a_i$.

$$\text{On note alors } \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \phi'(0) = f'_{i,A}(a_i)$$

Théorème de Schwarz : Si f est de classe C^2 sur U, alors pour toutes variables x_i, x_j, et tout $A \in U$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)$$

Ex 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$

1) On pose $\phi(x) = f(x,x)$ et $\psi(x) = f(x^2, \sin(x))$. Donnez la dérivée de ϕ et ψ en tout réel x en fonction des dérivées partielles premières de f.

2) On pose $g(x,y) = f(y,x)$ et $h(x,y) = f(-x, x+y^2)$. Donnez les dérivées partielles premières de g et h en fonction de celles de f

Ex 2 ✷ Soit E un $\mathbb{R}$-ev euclidien de dim. 3. On considère une forme bilinéaire ϕ sur E.

1) Montrez la différentielle de ϕ existe en tout point $M(x,y)$ de E^2 et vérifie $d\phi(x,y).(h,k) = \phi(x,k) + \phi(h,y)$

2) En déduire les différentielles de $g : x \to \omega \wedge x$ et $h : x \to \|x\|^2$.

Ex 3 Soit g C^2 sur $]-1,1[$ et $f(x,y) = g\left(\dfrac{\cos x}{\cosh y}\right)$. Calculez le Laplacien de f, cad $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.
Vérifiez $\Delta f(x,y) = \dfrac{1}{\cosh^2 y}\big(-2ug'(u) + (1-u^2)g''(u)\big)$ avec $u = \dfrac{\cos x}{\cosh y}$.

Mines-Telecom PSI 2022 (continuité fonctions $f(x,y)$)
Ex 4 Etudiez la continuité en $(0,0)$ de chacune des fonctions suivantes, supposées nulles en $(0,0)$ et définies pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par : $f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2}$ $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $h(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2+xy}$

CCINP PSI 2024[2] -2023-2021 (theoreme de Schwarz) ✷
Ex 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1) Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2) Déterminez les dérivées partielles premières de f.

3) Montrez f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

4) Calculez $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Qu'en déduire?

CCINP PSI 2023-2021 (étude fonction de $\mathbb{R}^2$)
Ex 6 Soit $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y=0\}$. On définit $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x+y}$ si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ et $f(x,y) = 0$ si $(x,y) \in F$.

1) Montrez F C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus F$ et vérifie $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 3f$.

2) Montrez $f$admet des dérivées partielles en $(0,0)$ et calculez-les.

3) f est-elle continue en $(0,0)$?

Ex 7 Montrez que l'application f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ $f(x,y)=\dfrac{e^{xy}-1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(x,y)=y$ si $x=0$. (*On pourra remarquer* $\dfrac{e^{xy}-1}{x}=y\,\dfrac{e^{xy}-1}{xy}$)

Ex 8 ✷Montrez que f définie par $f(x,y)=\dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Ce prolongement est-il C^2 ?

Equations aux Dérivées Partielles

Ex 9 Résoudre pour $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ C^2 sur U et $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *avec U ouvert convexe*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=y\,e^x \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,e^x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=0$$

CCP PSI 2010

Ex 10 Soit f C^2 sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$. En utilisant le changement de variables $u=\ln x$ $v=\ln y$, cherchez les applications solutions de l'équation $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+x\dfrac{\partial f}{\partial x}-y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$

Ex 11 Résoudre les EDP suivantes avec le changement de variables indiqué :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-y^2 \qquad \text{sur } \{x<y\} \quad u=x+y \ v=xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-2\frac{\partial f}{\partial y}-f=0 \qquad g=f\,e^y \ u=x+y \ v=x-y$$

Mines-Ponts PC 2019 (EDP premier ordre en 2 variables)

Ex 12

1) Déterminez les $f\in\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R}\right)$ telles que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=af$ avec $a\in\mathbb{R}$.

2) Déterminez les $f\in\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*},\mathbb{R}\right)$ telles que $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3}$

Centrale PSI 2021 (EDP d'ordre 1) ✷

Ex 13 Soient $g\in\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\right)$ et $S(g)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ z=g(x,y)\right\}$.

1) Montrez que $S(g)$ n'a que des points réguliers.

2) On cherche les fonctions g telles que ∇g soit constamment orthogonal à $(2,1)$ ou, ce qui revient au même, tq (E) $2\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}=0$.

(i) Montrez que l'endomorphisme $\phi:(x,y)\longrightarrow(x-2y,y)$ de $\mathbb{R}^2$ est inversible.

(ii) Pour h de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, on pose $f=h\circ\phi^{-1}$. Calculez les dérivées partielles de f. En déduire les solutions de (E).

Centrale PSI 2022 (edp premier ordre de $\mathbb{R}2$) ✷

Ex 14 Soient $\phi:(x,y)\longrightarrow(xy,x+y)$ et $V=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{+*\,2},\ y>x>0\right\}$

1) Montrez que $\phi(V)=\left\{(p,s)\in\mathbb{R}^{+*\,2},\ s^2>4p\right\}$ et que V est un ouvert. Justifiez ϕ de classe C^1. On admet que ϕ réalise une bijection de V sur $\phi(V)$ et que sa réciproque est de classe C^1.

2) Soit f de classe C^1 vérifiant l(équation (E) $x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2-y^2$. Montrez que $g=f\circ\phi^{-1}$ vérifie $\frac{\partial g}{\partial s}(p,s)=s$.

3) Montrez que f de classe C^1 est solution de E ssi il existe une fonction $K:\mathbb{R}^{+*}\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1 tq $f:(x,y)\longrightarrow\frac{1}{2}(x+y)^2+K(xy)$

Ex 15 ✷ Montrez que la fonction $(x,y)\to\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cos(ny)}{\sqrt{n}}$ est de classe C^1 sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$

Extrema

Point Critique : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 avec U ouvert. $A \in U$ est dit ***point critique*** de f ssi toutes les dérivées partielles en A sont nulles (ce qui équivaut à $df(A) = 0$ ou $\vec{\nabla} f(A) = 0$)

Condition nécessaire d'Extrema : Soit f de classe C^1 définie sur un ***ouvert*** U, et A un extremum local ou global de f. Alors A est un ***point critique***.

Condition Suffisante d'Extrema :
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec U ***ouvert*** et $A \in U$ un ***point critique***. Alors
- Si $H_f(A) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, cad A ***symétrique définie positive***, A est un ***minimum*** strict (au moins) local.
- Si $-H_f(A) \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, cad A ***symétrique définie négative***, A est un ***maximum*** strict (au moins) local.
- Si $H_f(A)$ n'est ni positive, ni négative, cad possède des vp > 0 et < 0, A n'est ***pas*** un extremum local.

Ex 16 ✌ Etudiez les extrema de $f(x,y) = (x^2+y^2-8)(x^2+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2$

Ex 17 La fonction $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longrightarrow x^3 + x^2 + y^3 - xy$ possède-t-elle un extremum en $(0,0)$?

CCP PSI 2012 (extrema sur $\mathbb{R}^2$) ✍
Ex 18 Etudiez les extrema de $f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \to x e^y + y e^x$.

Mines-Ponts PSI 2024-2022 (extrema sur un triangle) ✷✍
Ex 19 Soient $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{+\,2}, x+y \leq 1\right\}$ et $a,b,c \in \mathbb{R}^+$. Montrez que la fonction $f : (x,y) \longrightarrow x^a y^b (1-x-y)^c$ admet des extrema sur D et les calculer.

CCINP 2024-2023 | Mines-Ponts PSI 2021 | Centrale PSI 2014 (extrema sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$) ✍
Ex 20 On considère $f : (x,y) \longrightarrow y\left(x^2 + (\ln y)^2\right)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

1) Déterminez les points critiques [**2014,2021 :** Question absente] .

2) Trouvez les Extrema de f en précisant leur nature locale ou globale [**2021 :** uniquement local.]

Mines-Ponts PSI 2022 (extrema sur $\mathbb{R}^2$)
Ex 21 Déterminez les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de $f : (x,y) \longrightarrow (x^2-4y^2)(x^2-4y^2-8)$

Ex 22 Déterminez les extrema locaux de $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow x^3 - z^3 + 3y^2 - 6xy - 9x + 12z$. Précisez s'ils sont globaux.

CCP PSI 2013 (minimum lié à un endomorphisme symétrique positif) ✍
Ex 23 Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ euclidien de vp strictement positives.

1) Prouvez qu'il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ dans la quelle la matrice est diagonale.

2) Prouvez que $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $< f(x), x >$ est strictement positif.

3) Soit u un vecteur fixé de $\mathbb{R}^n$. Montrez que g définie par $g(x) = \frac{1}{2} < f(x), x > - < u, x >$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimez les dérivées partielles de g en fonction des vecteurs de la base B. Montrez que g admet un unique point critique en c et qui est un minimum global.

Centrale PSI 2022 (extremas liés à un triangle) ✷
Ex 24
Soit $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \geq 0, y \geq 0, x+y+z = \frac{\pi}{2}\right\}$ On définit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \longrightarrow \sin x \sin y \sin z$ et on note g la restriction de f à D.

1) Montrez que g atteint un maximum sur D.

2) En paramétrant D grâce à ses 2 premières variables, déterminer l'ens. A des triplets de D en lesquels g atteint son maximum.

3) Soient $(a,b,c) \in A$, $M = g(a,b,c)$, $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = M\right\}$. Montrez D est inclus dans le plan tangent à V en (a,b,c).