

Feuille

d'Exercices 14

Calcul différentiel



DÉRIVÉES PARTIELLES / DIFFÉRENTIELLE

Dérivée Partielle Première en un Point : On dit que f admet une dérivée partielle première par rapport à la i -ième variable en A ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) L'application d'une variable réelle $\varphi : t \rightarrow f(a_0, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n) = f(A + t\vec{e}_i)$ est dérivable en $t = 0$.
- (ii) La i -ième application partielle première en A $f_{i,A}$ est dérivable en $x_i = a_i$.

$$\text{On note alors } \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \varphi'(0) = f'_{i,A}(a_i)$$

Théorème de Schwarz : Si f est de classe C^2 sur U , alors pour toutes variables x_i, x_j , et tout $A \in U$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(A)$$

Ex 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 sur \mathbb{R}^2

1) On pose $\varphi(x) = f(x, x)$ et $\psi(x) = f(x^2, \sin(x))$. Donnez la dérivée de φ et ψ en tout réel x en fonction des dérivées partielles premières de f .

2) On pose $g(x, y) = f(y, x)$ et $h(x, y) = f(-x, x + y^2)$. Donnez les dérivées partielles premières de g et h en fonction de celles de f

Ex 2 * Soit E un \mathbb{R} -ev euclidien de dim. 3. On considère une forme bilinéaire φ sur E .

1) Montrez la différentielle de φ existe en tout point $M(x, y)$ de E^2 et vérifie $d\varphi(x, y).(h, k) = \varphi(x, k) + \varphi(h, y)$

2) En déduire les différentielles de $g : x \rightarrow \omega \wedge x$ et $h : x \rightarrow \|x\|^2$.

Ex 3 Soit $g C^2$ sur $] -1, 1[$ et $f(x, y) = g\left(\frac{\cos x}{\cosh y}\right)$. Calculez le Laplacien de f , cad $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$.

Vérifiez $\Delta f(x, y) = \frac{1}{\cosh^2 y}(-2ug'(u) + (1 - u^2)g''(u))$ avec $u = \frac{\cos x}{\cosh y}$.

Mines-Telecom PSI 2022 (continuité fonctions $f(x, y)$)

Ex 4 Etudiez la continuité en $(0, 0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0, 0)$ et

définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par : $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ $h(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2 + xy}$

*CCINP PSI 2023-2021 (theoreme de schwarz) **

Ex 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

1) Montrez que f est continue

2) Exprimez les dérivées partielles de f .

3) Montrez f est de classe C^1 .

4) Calculez $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire?

CCINP PSI 2021 (étude fonction de \mathbb{R}^2)

Ex 6 Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$. On définit $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x + y}$ si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ et $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in F$.

1) Montrez $f C^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus F$ et vérifie $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 3f$.

2) Montrez f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ et calculez-les.

3) f est-elle continue en $(0, 0)$?

Ex 7 Montrez que l'application f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 $f(x, y) = \frac{e^{xy} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x, y) = y$ si $x = 0$. (On pourra remarquer $\frac{e^{xy} - 1}{x} = y \frac{e^{xy} - 1}{xy}$)

Ex 8 * Montrez que f définie par $f(x, y) = \frac{y^4}{x^2 + y^2 - xy}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 . Ce prolongement est-il C^2 ?

EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Ex 9 ☞ Résoudre pour $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 sur U et $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ avec U ouvert convexe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = y e^x \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y e^x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

CCP PSI 2010 🧑

Ex 10 Soit $f \in C^2$ sur $(\mathbb{R}^{++})^2$. En utilisant le changement de variables $u = \ln x$ $v = \ln y$, cherchez les applications solutions de l'équation $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

Ex 11 Résoudre les EDP suivantes avec le changement de variables indiqué :

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 - y^2 && \text{sur } \{x < y\} \quad u = x + y \quad v = xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial y} - f &= 0 && g = f e^y \quad u = x + y \quad v = x - y \end{aligned}$$

Mines-Ponts PC 2019 (EDP premier ordre en 2 variables)

Ex 12

1) Déterminez les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$ telles que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = af$ avec $a \in \mathbb{R}$.

2) Déterminez les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$ telles que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y} \sqrt{x^3 + y^3}$

Centrale PSI 2021 (EDP d'ordre 1) *

Ex 13 Soient $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $S(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = g(x, y)\}$.

1) Montrez que $S(g)$ n'a que des points réguliers.

2) On cherche les fonctions g telles que ∇g soit constamment orthogonal à $(2, 1)$ ou, ce qui revient au même, tq $(E) 2 \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$.

(i) Montrez que l'endomorphisme $\varphi : (x, y) \rightarrow (x - 2y, y)$ de \mathbb{R}^2 est inversible.

(ii) Pour h de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 , on pose $f = h \circ \varphi^{-1}$. Calculez les dérivées partielles de f . En déduire les solutions de (E).

Centrale PSI 2022 (edp premier ordre de \mathbb{R}^2) *

Ex 14 Soient $\varphi : (x, y) \rightarrow (xy, x + y)$ et $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{++2}, y > x > 0\}$

1) Montrez que $\varphi(V) = \{(p, s) \in \mathbb{R}^{++2}, s^2 > 4p\}$ et que V est un ouvert. Justifiez φ de classe C^1 . On admet que φ réalise une bijection de V sur $\varphi(V)$ et que sa réciproque est de classe C^1 .

2) Soit f de classe C^1 vérifiant l'équation (E) $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 - y^2$. Montrez que $g = f \circ \varphi^{-1}$ vérifie $\frac{\partial g}{\partial s}(p, s) = s$.

3) Montrez que f de classe C^1 est solution de E ssi il existe une fonction $K : \mathbb{R}^{++} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tq $f : (x, y) \rightarrow \frac{1}{2}(x + y)^2 + K(xy)$

Ex 15 * Montrez que la fonction $(x, y) \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(ny)}{\sqrt{n}}$ est de classe C^1 sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}$

Point Critique : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 avec U ouvert. $A \in U$ est dit **point critique** de f ssi toutes les dérivées partielles en A sont nulles (ce qui équivaut à $df(A) = 0$ ou $\vec{\nabla}f(A) = 0$)

Condition nécessaire d'Extrema : Soit f de classe C^1 définie sur un **ouvert** U , et A un extremum local ou global de f . Alors A est un **point critique**.

Condition Suffisante d'Extrema :

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 avec U **ouvert** et $A \in U$ un **point critique**. Alors

- Si $H_f(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, cad A **symétrique définie positive**, A est un **minimum** strict (au moins) local.
- Si $-H_f(A) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, cad A **symétrique définie négative**, A est un **maximum** strict (au moins) local.
- Si $H_f(A)$ n'est ni positive, ni négative, cad possède des vp > 0 et < 0 , A n'est **pas** un extremum local.

Ex 16 ☞ Etudiez les extrema de $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 8)(x^2 + y^2)$ sur \mathbb{R}^2

Ex 17 La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow x^3 + x^2 + y^3 - xy$ possède-t-elle un extremum en $(0, 0)$?

CCP PSI 2012 (extrema sur \mathbb{R}^2) ☞

Ex 18 Etudiez les extrema de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow xe^y + ye^x$.

Mines-Ponts PSI 2022 (extrema sur un triangle) * ☞

Ex 19 Soient $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{+2}, x + y \leq 1\}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Montrez que la fonction $f : (x, y) \rightarrow x^a y^b (1 - x - y)^c$ admet des extrema sur D et les calculer.

CCINP 2023 ☞ | Mines-Ponts PSI 2021 | Centrale PSI 2014 (extrema sur un ouvert de \mathbb{R}^2) ☞

Ex 20 On considère $f : (x, y) \rightarrow y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

- 1) Déterminez les points critiques [2014, 2021 : Question absente].
- 2) Trouvez les Extrema de f en précisant leur nature locale ou globale [2021 : uniquement local.]

Mines-Ponts PSI 2022 (extrema sur \mathbb{R}^2)

Ex 21 Déterminez les extrema sur \mathbb{R}^2 de $f : (x, y) \rightarrow (x^2 - 4y^2)(x^2 - 4y^2 - 8)$

Ex 22 Déterminez les extrema locaux de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow x^3 - z^3 + 3y^2 - 6xy - 9x + 12z$. Précisez s'ils sont globaux.

CCP PSI 2013 (minimum lié à un endomorphisme symétrique positif) ☞

Ex 23 Soit f un endomorphisme symétrique de \mathbb{R}^n euclidien de vp strictement positives.

- 1) Prouvez qu'il existe une base orthonormée \mathcal{B} dans laquelle la matrice est diagonale.
- 2) Prouvez que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle f(x), x \rangle$ est strictement positif.
- 3) Soit u un vecteur fixé de \mathbb{R}^n . Montrez que g définie par $g(x) = \frac{1}{2} \langle f(x), x \rangle - \langle u, x \rangle$ est de classe \mathcal{C}^1 et exprimez les dérivées partielles de g en fonction des vecteurs de la base B . Montrez que g admet un unique point critique en c et qu'il est un minimum global.

Centrale PSI 2022 (extremas liés à un triangle) *

Ex 24

Soit $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \geq 0, y \geq 0, x + y + z = \frac{\pi}{2}\}$ On définit $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \sin x \sin y \sin z$ et on note g la restriction de f à D .

- 1) Montrez que g atteint un maximum sur D .
- 2) En paramétrant D grâce à ses 2 premières variables, déterminer l'ens. A des triplets de D en lesquels g atteint son maximum.
- 3) Soient $(a, b, c) \in A, M = g(a, b, c), V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = M\}$. Montrez D est inclus dans le plan tangent à V en (a, b, c) .