

Feuille

d'Exercices 13

Espaces vectoriels normés



NORMES

Soit E un \mathbb{K} -ev. Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une **norme** ssi sont vérifiées les propriétés :

- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$. (homogénéité)
- $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)
- $\forall x \in E, N(x) = 0 \implies x = 0$. (séparation)

Ex 1 Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On définit sur $\mathbb{R}[X], N(P) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)P(x)|$. CNS pour que N soit norme?

Ex 2 \forall Soit E et F \mathbb{R} -ev, $\|\cdot\|$ une norme sur F et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour $x \in E$, on définit $N(x) = \|f(x)\|$. CNS pour que N soit une norme sur E ?

Ex 3 \hookrightarrow Soit E un \mathbb{K} -ev et $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 2 normes sur E .

- 1) Montrez que si les 2 boules-unité fermées sont égales, les normes sont égales. (On rappelle que $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$).
- 2) \star Montrez que si les 2 boules-unité ouvertes sont égales, les normes sont égales (Utilisez Q1 et les ε)

Centrale PSI 2022-2011 (normes sur $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$) $\star \hookrightarrow$

Ex 4 Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

- 1) Soit $h : t \rightarrow f(t)e^t$. Montrez, pour tout $t \in [0, 1]$, $h(t) = \int_0^t (t-u)h''(u) du$ [2011 : Question absente].
- 2) Montrez que N est une norme.
- 3) Montrez il existe $c > 0$ tq $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq cN(f)$. Déterminez le + petit c [2011 : Quest. sur + petit absente]

TPE PSI 2015 (norme et boules)

Ex 5 Pour $u = (x, y)$, on pose $N(u) = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x + ty|$.

- 1) Montrez que $N(u) = \max(|x|, |x + y|)$, puis que N est une norme.
- 2) Soit B la boule unité de N . Trouvez le plus petit disque euclidien contenant B et le plus grand disque euclidien contenu dans B .
- 3) Dessinez la boule-unité (pas dans l'oral initial)

Mines-Ponts PSI 2022 (norme de Frobenius matricielle) $\star \hookrightarrow$

Ex 6 Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \text{tr}(A^T A)$. Montrez, pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AB) \leq N(A)N(B)$

Ex 7 On se place sur $E = M_n(\mathbb{C})$

- 1) Montrez qu'il n'existe pas de norme vérifiant $\forall M, N \in E \quad \|MN\| = \|NM\|$
- 2) En déduire qu'il n'existe pas de norme sur E « invariante par matrices semblables ».

NORMES EQUIVALENTES

N_1, N_2 deux normes sur un ev E sont dites équivalentes ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tq $\forall x \in E, \alpha N_2(x) \leq N_1(x) \leq \beta N_2(x)$

Dimension Finie : Dans un \mathbb{K} -ev de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes

Ex 8 Sur $C^1([0, 1], \mathbb{R})$, $N(f) = \int_0^1 |f|$ $N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'|$.

- 1) \forall Montrez que ce sont des normes sur E et établir $\forall f \in E \quad N(f) \leq N'(f)$
- 2) Prouvez que ces normes ne sont pas équivalentes.

Ex 9 Sur le \mathbb{R} -ev E des suites réelles bornées vérifiant $u_0 = 0$, on définit les normes

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \|u\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|. \text{ Sont-elles équivalentes?}$$

CCINP PSI 2021 (normes équivalentes sur espaces de fonctions)

Ex 10 On note $E = \{f \in \mathcal{C}^1[0,1], f(0) = 0\}$. On pose, pour $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$.

- 1) Montrez N et N' sont des normes sur E .
- 2) Etablir, pour tout $x \in [0,1]$, $e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t)) dt$.
- 3) Montrez il existe deux réels α, β tq $\forall f \in E, \alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f)$.

CCP BQMP 2022->2021-2011 (équivalence de normes sur les polynômes)

Ex 11 On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Pour $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, n désignant le degré de P , on pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^n |a_i|$ $N_\infty(P) = \sup_{0 \leq i \leq n} |a_i|$.

- 1) Démontrez que N_∞ norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admet N_1 norme. [2011 : N_1 aussi et montrez succinctement].
- 2) Démontrez que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1 .
- 3) Démontrez que N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.
- 4) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-ev de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k . On note N'_k (rp. N'_∞) la restriction de N_1 (rp. N_∞) à $\mathbb{R}_k[X]$. Les normes N'_k et N'_∞ sont-elles équivalentes?

*Mines-Ponts PSI 2009 **

Ex 12 Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Si $a = (a_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On pose $N_a(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k |p_k|$

- 1) CNS sur a pour N_a soit une norme sur E .
- 2) Soient $a, b \in (\mathbb{R}^{++})^\mathbb{N}$. Donnez une CNS pour que N_a et N_b soient équivalentes.
- 3) Donnez une CNS sur $a \in (\mathbb{R}^{++})^\mathbb{N}$, pour que $D : P \rightarrow P'$ soit continue.

*Mines-Ponts PSI 2023-2022 (convergence suite de polynômes) **

Ex 13 Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \|P'\|_{\infty[0,1]}$, et E un \mathbb{R} -ev muni de 2 normes N_1 et N_2

- 1) On suppose N_1 et N_2 équivalentes et (u_n) une suite de E qui converge pour N_1 . Montrez que (u_n) converge pour N_2 .
- 2) On suppose qu'une suite (u_n) cvg dans (E, N_1) ssi elle cvg dans (E, N_2) . Montrez N_1 et N_2 équivalentes [2022 : Quest. absente]
- 3) Montrez N_a norme sur $\mathbb{R}[X]$.
- 4) Soient $a, b \in [0,1]$. Montrez N_a et N_b normes équivalentes.
- 5) Pour quelles valeurs de a , la suite des $P_n = (\frac{x}{2})^n$ est-elle convergente pour N_a ?
- 6) En déduire que N_a et N_b ne sont pas équivalentes si $0 \leq a < b$ et $b > 1$. [2022 : Quest. absente]

SUITES DE MATRICES / POLYNÔMES / VECTEURS

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. On dit qu'une suite de vecteurs (M_n) converge ssi il existe $M \in E$ tel que $\|M_n - M\| \rightarrow 0$

- Si $M_n \rightarrow M$, $\|M_n\| \rightarrow \|M\|$ (réciproque fautive sauf $M = 0$)
- $\|M_n\| \rightarrow 0 \iff M_n \rightarrow 0$.
- Si $\|M_n\| \rightarrow +\infty$, la suite (M_n) diverge

Suites-Coordonnées : Soit E un ev de dimension finie et (e_1, \dots, e_p) une base. Soit M_n une suite de vecteurs de E et $M_n = u_{1n}e_1 + \dots + u_{pn}e_p$. Alors la suite (M_n) converge ssi chaque suite-coordonnée réelle $(u_{kn})_n$ converge, et alors $\lim M_n = \lim u_{1n}e_1 + \dots + \lim u_{pn}e_p$

Ex 14 Soit $A \in E = M_n(\mathbb{C})$ tq $\lim A^n = P$. Montrez que P est une (matrice de) projection.

Ex 15 Soit (A_n) une suite de matrices inversibles tq $A_n \rightarrow A$ et $A_n^{-1} \rightarrow B$. Etablir que A est inversible.

Ex 16 Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par $N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n)}(0)|$ et $N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$

1) Montrez que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2) On pose $P_n = \frac{1}{n}X^n$. Etudiez la convergence de la suite (P_n) pour N_1 et N_2 . Qu'en pensez-vous?

Centrale PSI 2021 (suite de matrices diagonalisables) 📖🔗

Ex 17

1) La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables?

2) Soit P de degré n . Montrez P est scindé sur \mathbb{R} ssi il existe $c > 0$ tq, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq c |\operatorname{Im} z|^n$.

3) Soit $(A_k)_k$ une suite de matrices diagonalisables sur \mathbb{R} convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez χ_A scindé sur \mathbb{R} .

Mines-Ponts PSI 2022 (suite de matrices) ✨ 📖

Ex 18

1) Etudiez la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n})$.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tq $N^p = 0$. On pose $A = I_p + N$.

2) Montrez A inversible.

3) Justifiez l'existence et étudiez la suite de matrices (M_n) définie par $M_0 = A$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $M_{n+1} = \frac{1}{2}(M_n + M_n^{-1})$.

Ex 19 On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Etablir $(A - I)^2 = 0$ puis étudiez la suite $A_n = \frac{1}{n}A^n$.

CCINP PSI 2021 (convergence suite de polynômes) ✨

Ex 20

Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt$.

1) Montrez N_a norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrez que, si E est un evn muni d'une norme N , si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $N(x_n) \rightarrow N(x)$.

3) Pour quelles valeurs de a , la suite des $P_n = (\frac{x}{2})^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Ex 21 📖 On pose $B_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = A_n^n$. Etudiez existence et valeur de $\lim B_n$

Ex 22 Soit (a_n) une suite d'un evn E de dimension finie telle que la série $\sum \|a_n\|$ converge. Montrez que la série $\sum a_n$ converge (cad la suite des sommes partielles converge).

Mines-Ponts PSI 2022 (suites convergentes colinéaires) ✨ 📖🔗

Ex 23 Soit E un espace préhilbertien réel.

1) Soient (u_n) une suite à valeurs dans E qui converge vers $u \in E$ et (λ_n) une suite réelle qui converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrez que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge vers λu .

2) On suppose, dans cette question, que E est de dimension finie. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites à valeurs dans E qui convergent vers $u, v \in E$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont colinéaires. Montrez u et v colinéaires.

3) Le résultat de la question précédente demeure t-il vrai si l'on ne suppose plus E de dimension finie?

Centrale PSI 2022 (fermeture des classes de similitude) ✨ ✨🔗

Ex 24

1) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que, si A est semblable à B , $P(A)$ est semblable à $P(B)$

2) Soit $(B_k)_k$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, B_k est semblable à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrez A semblable à B .

3) Est-ce encore vrai si A n'est pas diagonalisable?

CCINP PSI 2023-2021 (limite suite endomorphismes)

Ex 25 Soit E un ev euclidien [2021 : evn] de dim. finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq \|x\|$.

1) Soit $x \in \text{Ker}(f - Id) \cap \text{Im}(f - Id)$. Montrez il existe y tel que $x = f(y) - y$.

2) Déterminez $f^n(y)$ en fonction de x, y et n .

3) En déduire $E = \text{Ker}(f - Id) \oplus \text{Im}(f - Id)$

4) [2021 : Emy ne s'en rappelle plus. Il y a un résultat qui demande alors de démontrer que la suite de vecteurs $\frac{1}{n}(x + f(x) + \dots + f^{n-1}(x))$ a pour limite, lorsque $n \rightarrow +\infty$, la projection de x sur $\text{Ker}(f - Id)$ parallèlement à $\text{Im}(f - Id)$. C'est peut-être cela??]

Mines-Ponts PSI 2023 (suite de matrices) *

Ex 26 Soit $A = \begin{pmatrix} p & q & r \\ q & r & p \\ r & p & q \end{pmatrix}$. On suppose que la suite (A^n) converge. Trouvez sa limite.

Mines-ponts PSI 2013 (Limites de matrices) *

Ex 27 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire avec a pour unique valeur propre. Montrez l'équivalence de :

- (i) $|a| < 1$.
- (ii) $\sum_{k=0}^p M^k$ converge lorsque $p \rightarrow +\infty$.
- (iii) $\lim_{p \rightarrow +\infty} M^p = 0$.

Ex 28 On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit b_0, \dots, b_n $n+1$ réels distincts. Pour $P \in E$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^n |P(b_k)|$.

1) Etablir que N est une norme sur E .

2) Soit (P_m) une suite de polynômes de E tq $P_m = a_{mn}X^n + \dots + a_{m1}X + a_{m0}$. Montrez l'équivalence de

- (i) La suite de polynômes (P_m) converge simplement sur \mathbb{R} .
- (ii) La suite de polynômes (P_m) converge uniformément sur tout segment de \mathbb{R} .
- (iii) $\forall 0 \leq k \leq n$, la suite réelle $(a_{mk})_{m \in \mathbb{N}}$ converge.

Mines-Ponts PSI 2019 (exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ surjective) *

Ex 29

1) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \sum_{k=0}^n \frac{M^k}{k!}$. Montrez que la suite (E_n) est convergente.

2) Montrez que pour tout $A \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{C})$, il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\sum_{k=0}^n \frac{B^k}{k!} \rightarrow A$.

Mines-Ponts PSI 2018 (exponentielle de matrice 2×2) *

Ex 30 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1) Montrez que la série $\sum_k \frac{A^k}{k!}$ converge. On note $\exp(A)$ sa somme.

2) Montrez que $\text{Sp}(\exp(A)) = \exp(\text{Sp}(A))$.

3) Calculez $\exp(A)$ lorsque A est une matrice de rotation.

4) L'application $A \rightarrow \exp(A)$ est-elle injective? surjective?

CONTINUITÉ ET LIMITES

Ex 31 Soit E un espace euclidien. Montrez que $x \rightarrow (x|y)$ est lipschitzienne (donc continue).

Ex 32 Soient f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

1) On suppose f lipschitzienne sur \mathbb{R} . Montrez $\exists A, B \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} |f(x)| \leq A|x| + B$

2) On suppose ici f dérivable sur \mathbb{R} . Etablir f est lipschitzienne sur $\mathbb{R} \iff f'$ est bornée sur \mathbb{R} .

Centrale PSI 2021 (fonction matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) *

Ex 33 Soit $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 .

1) Supposons, dans cette question, qu'il existe $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrez il existe $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$.

2) Supposons, dans cette question, qu'il existe $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$. Montrez, pour tout $t \in \mathbb{R}, A(t)$ est semblable à $A(0)$.

Ex 34 📌 On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme de la convergence en moyenne, cad $N(f) = \int_0^1 |f|$.

1) Etablir que la forme linéaire $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à f associe $f(0)$ n'est pas continue. (*Indication* : On pourra considérer la suite de fonctions f_n définie par f_n est affine par morceaux joignant les points $(0, 1)$ $(1/n, 0)$ $(1, 0)$)

2) En munissant E de la norme infinie usuelle (norme de la convergence uniforme), montrez, à contrario, que l'application linéaire ϕ est continue (*indication* : on pourra montrer lipschitzienne)

Ex 35 Etudiez l'existence de la limite en $(0, 0)$:

$$k(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^2} \quad h(x, y) = \frac{\sinh x - \sinh y}{x - y}$$

Ex 36 Soit f une application linéaire d'un evn $(E, \|\cdot\|_E)$ vers un evn $(F, \|\cdot\|_F)$. Montrez l'équivalence de :

(i) f est continue (ii) f est continue en 0. (iii) f est lipschitzienne. (iv) il existe $k > 0$ tq $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k \|x\|_E$. (v) f est bornée sur la boule-unité.

Mines-Telecom PSI 2022 (continuité fonctions $f(x, y)$)

Ex 37 Etudiez la continuité en $(0, 0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0, 0)$

et définies pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par : $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}$ $g(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ $h(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2 + xy}$

Topologie

Ouvert : $O \subset E$ evn est un **ouvert** ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) Tout élément de O est **intérieur** à O .
- (ii) $\forall x \in O, \exists r > 0$ tq $B(x, r) \subset O$.

Fermé : $F \subset E$ evn est un **fermé** ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- Le complémentaire de F (dans E) est un ouvert de E
- **Caractérisation séquentielle** : pour toute suite d'éléments (f_n) de F convergente (vers un x), alors **nécessairement** $x \in F$.
- Tout élément **adhérent** à F est **dans** F .

Convexité : $C \subset E$ est **convexe** ssi $\forall x, y \in E$, tout le segment $[x, y] = \{tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\} \subset C$

Densité : $A \subset E$ evn est dite **dense dans** E ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- L'adhérence de A contient E : $\overline{A} \supset E$.
- $\forall a \in A, \forall r > 0$, il existe $x \in E$ tq $x \in B(a, r)$ cad $\|x - a\| < r$.
- **Caractérisation séquentielle** : pour tout $x \in E$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x .

Ex 38 📌 Soient f, g continues de E dans F , evns de dim. finies. Montrez $\{x \in E, f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E .

Ex 39 Soit $A = [0, 1[\cup]1, 2[\cup ([3, 4] \cap \mathbb{Q}) \cup \{5\}$.

1) Montrez que ces 7 parties sont 2 à 2 distinctes : $A, \overset{\circ}{A}, \overline{A}, \overset{\circ}{\overline{A}}, \overline{\overset{\circ}{A}}, \overline{\overline{\overset{\circ}{A}}}, \overline{\overline{\overline{\overset{\circ}{A}}}}$

2) Par contre, montrez que $\overline{\overline{\overline{\overset{\circ}{A}}}}$ et $\overline{\overline{\overline{\overline{\overset{\circ}{A}}}}}$ sont égales à 2 des précédentes.

Ex 40 📌 Montrez que $O =]-1, 1[\times \mathbb{R} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |1 < |x| < y^2\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

*Centrale PC 2018 (fermeture matrice 2×2 de valeurs propres de module 1) * * 📌*

Ex 41 Montrez que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont de module 1 est un fermé

Ex 42 Soit A une partie non vide et convexe d'un evn E . Montrez que $\overset{\circ}{A}$ et \overline{A} sont convexes.

Ex 43 Soit E un evn de dimension finie et F un sous-ev (strict) de E . Montrez $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ et $\overline{F} = F$

Mines-Ponts PSI 2022 (adhérence d'un hyperplan) * 

Ex 44 Soient E un evn et F un sev de E .

1) Montrez que l'adhérence de F est un sev de E

2) Que dire de l'adhérence de F lorsque F est un hyperplan? On commencera par le cas E de dimension finie.


3) [Pas dans l'oral : Dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on considère l'hyperplan H des fonctions $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$. En considérant les normes usuelles $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$, établir que H est fermé pour l'une et dense pour l'autre.]

Ex 45 * On va montrer que les seuls ouverts et fermés de E sont \emptyset et E . Soit $U \subset E \neq \emptyset$ ouvert et fermé et $x \in U$. On prend $y \in E$ et on pose $A = \{t \in [0, 1], (1-t)x + ty \in U\}$

1) Montrez que $\sup A$ existe.

2) Montrez par l'absurde $\sup A = 1$ (on utilisera U ouvert et fermé).

3) Conclure

Ex 46  On se place dans $E = M_n(\mathbb{C})$. Montrez l'ens. des matrices diagonalisables est dense dans E (cad $\overline{D} = E$).

Indication : utilisez toute matrice est trigonalisable dans \mathbb{C} .

Ex 47 Soit E un evn et $F \subset E$. Montrez F est un fermé d'intérieur vide ssi $E \setminus F$ est un ouvert dense.

Mines-Ponts PSI 2019-2018 (ouvert union infinie de fermés) *

Ex 48 Soit E un evn de dim. finie et A une partie ouverte de E . Montrez que $U = \bigcup_{a \in A} \overline{B(a, 1)}$ est un ouvert.

Ex 49 

1) Montrez que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite de matrices inversibles.

2) Soit A inversible et B quelconque. Montrez AB et BA ont même polynôme caractéristique. En déduire que cela reste vrai pour A quelconque.

Ex 50 * Montrez que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ de rang $\geq k$ est un ouvert. En déduire que si une suite de matrices (A_n) converge vers A , alors pour n assez grand $\text{rg} A_n \geq \text{rg} A$.

Centrale PSI 2013 (convexité)

Ex 51 Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

Pour $x \in E$, on pose $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$. Soient $R > 0$ et $A(R) = \{x \in E, d(x, A) \leq R\}$.

Montrez que si A est convexe, alors $A(R)$ est convexe et fermé.

XPSI 2023 (fermeture matrices trigonalisables) * 

Ex 52

1) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire avec $n \geq 2$. Montrez que P est scindé dans $\mathbb{R}_n[X]$ ssi $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\text{Im } z|^{\text{deg } P}$

2) Montrez que l'ensemble des matrices trigonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un fermé.

Ex 53 Soit (E, N) un evn et $A \subset E$. On définit $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

1) Montrez que $x \rightarrow d(x, A)$ est continue. (montrez qu'elle est lipschitzienne)

2) On suppose A fermé. Montrez $d(x, A) = 0 \iff x \in A$. Et si A n'est pas fermé?

Ex 54 * Soient A et B deux sous-ensembles d'un evn E de dimension finie. Etudiez les implications : A ouvert ou B ouvert $\implies A + B$ ouvert A fermé et B fermé $\implies A + B$ fermé A compact et B compact $\implies A + B$ compact