Quelques corrections sur les Equations Différentielles

Ex 3 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\|.\|_1, \|.\|_2$ 2 normes sur E.

1) Montrez que si les 2 boules-unité fermées sont égales, les normes sont égales. (On rappelle que $\|\frac{x}{\|x\|}\| = 1$).

2) ✷ Montrez que si les 2 boules-unité ouvertes sont égales, les normes sont égales (Utilisez Q1 et les ε)

1) Soit $x \in E$, alors $\|\frac{x}{\|x\|_1}\|_1 = 1$. Il suit $y = \frac{x}{\|x\|_1} \in \overline{B}_1(0,1)$, donc $\in \overline{B}_2(0,1)$, par égalité des boules unités fermées. Il vient alors $\|y\|_2 \le 1$ donc $\|\frac{x}{\|x\|_1}\|_2 = \frac{1}{\|x\|_1}\|x\|_2 \le 1$ ou encore $\|x\|_2 \le \|x\|_1$. Par symétrie des hypothèses, on a également $\|x\|_1 \le \|x\|_2$, d'où l'égalité.

2) Soit $x \in E$, alors $\|\frac{x}{\|x\|_1+\varepsilon}\|_1 = \frac{1}{\|x\|_1+\varepsilon}\|x_1\| < 1$, ***pour tout*** $\varepsilon > 0$. Il suit $y = \frac{x}{\|x\|_1+\varepsilon} \in B_1(0,1)$, donc $\in B_2(0,1)$, par égalité des boules unités ouvertes. Il vient alors $\|y\|_2 < 1$ donc $\|\frac{x}{\|x\|_1+\varepsilon}\|_2 = \frac{1}{\|x\|_1+\varepsilon}\|x\|_2 \le 1$ ou encore $\|x\|_2 < \|x\|_1 + \varepsilon$. Comme cette propriété est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\|x\|_2 \le \|x\|_1$. On conclut comme plus haut.

Centrale PSI 2022-2011 (normes sur $\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$) ✷

Ex 4 Soit $E = \{f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R}), f(0) = f'(0) = 0\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1) Soit $h : t \longrightarrow f(t)e^t$. Montrez, pour tout $t \in [0,1]$, $h(t) = \int_0^t (t-u)h''(u)\,du$ [**2011 :** Question absente] .

2) Montrez que N est une norme.

3) Montrez il existe $c > 0$ tq $\forall f \in E$, $\|f\|_\infty \le cN(f)$. Déterminez le + petit c [**2011 :** Quest. sur + petit absente]

1) Je remplace t par x. On écrit $k(x) = x\int_0^x h'' - \int_0^x xh''(u)\,du$. Par continuité des fonctions-intégrande (hC^2), on applique le théorème fondamental de l'analyse : k est dérivable sur $[0,1]$ et $k'(x) = \int_0^x h'' + xh''(x) - xh''(x) = \int_0^x h''$. De même k' est dérivable sur $[0,1]$ et $k''(x) = h''(x)$, puis comme $k'(0) = 0 = f'(0) + f(0) = h'(0)$, $k'(x) = h'(x)$ sur $[0,1]$ ***parce que*** $[0,1]$ est un intervalle. De même, comme $k(0) = f(0) = 0 = h(0)$, il suit $k(x) = h(x)$ sur $[0,1]$.

2) N est une norme sur E car :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in E$, $N(\lambda f) = \|(\lambda f) + 2(\lambda f)' + (\lambda f)''\|_\infty = \|\lambda(f + 2f' + f'')\|_\infty = |\lambda|\|f + 2f' + f''\|_\infty = |\lambda|N(f)$, en appliquant la propriété d'homogénéité de la norme $\|.\|_\infty$.
- $\forall f, g \in E$, $N(f+g) = \|(f+g) + 2(f+g)' + (f+g)''\|_\infty = \|f + 2f' + f'' + g + 2g' + g''\|_\infty \le \|f + 2f' + f''\|_\infty + \|g + 2g' + g''\|_\infty + N(f) + N(g)$ en appliquant l'inégalité triangulaire de $\|.\|_\infty$
- Si $N(f) = 0$, $\|f + 2f' + f''\|_\infty = 0$, donc $f + 2f' + f'' = 0$ sur $[0,1]$. L'équation différentielle s'intègre en $f(x) = \alpha e^x + \beta x e^x$. La résolution de $f(0) = f'(0) = 0$ amène $\alpha = \beta = 0$. Calcul aisé par un système mais que l'on peut obtenir plus élégamment en écrivant le dl en 0 à l'ordre 1 qui est nul par hypothèse et vaut aussi $\alpha + (\alpha + \beta)x + o(x)$. On arrive à $f = 0$.

3)

$$|e^x f(x)| \overset{(1)}{\overbrace{=}} \left|\int_0^x (x-u)\big(e^u f(u)\big)''\,\mathrm{d}u\right| \overset{(2)}{\overbrace{\le}} \int_0^x \left|(x-u)\big(e^u f(u)\big)''\,\mathrm{d}u\right| = \int_0^x (x-u)e^u\big|f(u)+2f'(u)+f''(u)\big|\,\mathrm{d}u$$

$$\overset{(3)}{\overbrace{\le}} \|f+2f'+f''\|_\infty \int_0^x (x-u)e^u\,\mathrm{d}u \quad\Longrightarrow\quad |f(x)| \le \|f+2f'+f''\|_\infty\ e^{-x}\int_0^x (x-u)e^u\,\mathrm{d}u$$

- **(1)** Question Q1
- **(2)** Propriété usuelle d'une fonction intégrable sur I $\left|\int_I f\right| \le \int_I |f|$.
- **(3)** Croissance de l'intégrale.

Si on ne cherche pas le meilleur c, on majore simplement, sur $[0,1]$, $e^{-x}\int_0^x (x-u)e^u\,\mathrm{d}u$ par $1\times\int_0^1(1-u)e^u\,\mathrm{d}u = C$. On a alors $\|f\|_\infty \le C\|f+2f'+f''\|_\infty$

Si on cherche le meilleur C, il y a une idée qui est de chercher à chaque inégalité quelles sont les fonctions qui vérifient l'égalité et de prendre alors une fonction commune (mais ce n'est pas toujours possible et il faut alors penser aux suites de fonctions qui prennent l'égalité à la limite). On a l'égalité en (2) pour une fonction de signe constant, soit, in fine, $f+2f'+f''$ de signe constant sur $[0,1]$. Pour (3) on a l'égalité avec $\|.\|_\infty$ si on prend une constante. Conclusion c'est possible pour une fonction (non nulle) vérifiant $f(x)+2f'(x)+f''(x)=1$ (on peut résoudre mais c'est inutile, on trouverait $-(x+1)e^{-x}+1)$). Il reste la majoration finale, on aura l'égalité en prenant le sup sur $[0,1]$ de $e^{-x}\int_0^x(x-u)e^u\,\mathrm{d}u = e^{-x}(e^x - x-1) = 1-e^{-x}(x+1)$. Le sup est en $x=1$ et donne la valeur de $1-\frac{2}{e}$ qui est alors le meilleur C.

Mines-Ponts PSI 2022 (norme de Frobenius matricielle) ✷

Ex 6 Pour $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A)=\mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}}A)$. Montrez, pour tous $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AB)\le N(A)N(B)$

On montre que la norme euclidienne canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est une norme matricielle ou norme d'algèbre ou norme sous-multiplicative, cad vérifie $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$ (je rappelle que toute norme sur les matrices vérifie $\|AB\|\le k\|A\|\|b\|$ par continuité de l'application bilinéaire en dimension finie $(A,B)\longrightarrow AB$)

Méthode 1 :

$$N(AB)^2 = \sum_{1\le i,j\le n}[AB]_{ij}^2 = \sum_{1\le i,j\le n}\Big(\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\Big)^2 \overset{(1)}{\overbrace{\le}} \sum_{1\le i,j\le n}\Big(\sum_{k=1}^n a_{ik}^2\times\sum_{l=1}^n b_{lj}^2\Big)$$

$$\overset{(2)}{\overbrace{=}} \sum_{1\le i,j\le n}\ \sum_{1\le k,l\le n} a_{ik}^2 b_{lj}^2 = \sum_{1\le i,j,k,l\le n} a_{ik}^2 b_{lj}^2 \overset{(3)}{\overbrace{=}} \sum_{1\le i,k\le n} a_{ik}^2 \times \sum_{1\le j,l\le n} b_{lj}^2 = N(A)^2\ N(B)^2$$

- **(1)** Inégalité de Cauchy-Schwarz appliqué au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ (la somme sur k).
- **(2)** On applique $\sum_{i\in I}a_i\times\sum_{j\in J}b_j = \sum_{(i,j)\in I\times J}a_i b_j$ (sommes finies)
- **(3)** Comme précédent

Méthode 2 : On sait que $A^{\mathrm{T}}A\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, donc $A^{\mathrm{T}}A = PDP^{\mathrm{T}}$ avec $P\in\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ et D de coefficients diagonaux $\lambda_i\ge 0$. Il vient alors $N(A)^2 = \mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{tr}\,D = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

$$N(AB)^2 = \mathrm{tr}\,(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AB) = \mathrm{tr}\,(B^{\mathrm{T}}PDP^{\mathrm{T}}B) \overset{(1)}{\overbrace{=}} \mathrm{tr}\,(P^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}PD) \overset{(2)}{\overbrace{=}} \mathrm{tr}\,(CD) = \sum_{i=1}^n [CD]_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n C_{ik}D_{ki} \overset{(3)}{\overbrace{\le}} \sum_{i=1}^n C_{ii}\lambda_i \overset{(4)}{\overbrace{\le}} \sum_{i=1}^n C_{ii}\times\sum_{i=1}^n\lambda_i = \mathrm{tr}\,(C)\,\mathrm{tr}\,(D) = \mathrm{tr}\,(BB^{\mathrm{T}})\,\mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}}A) = N(B)^2N(A)^2$$

- **(1)** Trace invariante par commutation. Regardez bien quelles matrices on a commuté.
- **(2)** On pose $C = P^{\mathrm{T}} BB^{\mathrm{T}} P$ qui est symétrique et même $\in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (semblable à BB^{T}), donc de vp ≥ 0.
- **(3)** $D_{ik} = 0$ pour $i \neq k$.
- **(4)** Immédiat par positivité car il manque les double produits en plus à droite. Je rappelle que $C_{ii} \geq 0$ car $C \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Cela provient de $C_{ii} = (E_i)^{\mathrm{T}} C E_i$ où E_i est le i-ème vecteur de la base canonique de R^n.

CCINP PSI 2021 (normes équivalentes sur espaces de fonctions)

Ex 10 On note $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^1 \left[0,1\right],\ f(0) = 0 \right\}$. On pose, pour $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1) Montrez N et N' sont des normes sur E.

2) Etablir, pour tout $x \in [0,1]$, $e^x f(x) = \int_0^x e^t (f(t) + f'(t))\,\mathrm{d}t$.

3) Montrez il existe deux réels α, β tq $\forall f \in E,\ \alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f)$.

1) On applique les propriétés connues de norme de $\|.\|_\infty$ sur les fonctions continues : à noter que f et f' sont bien continues par l'hypothèse C^1 de l'énoncé. N est une norme car c'est clairement une application dans $\mathbb{R}^+$ et elle vérifie les 3 propriétés :

- Pour $f, g \in E,\ N(f+g) = \|f+g\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g)$
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}, f \in E,\ N(\lambda f) = \|\lambda f\|_\infty + \|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty + |\lambda| \|f'\|_\infty = |\lambda| N(f)$
- Supposons $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = 0$. On en déduit $\|f\|_\infty = \|f'\|_\infty = 0$ puis $f = f' = 0$ sur $\left[0,1\right]$, en particulier on a bien f identiquement nulle.

Pour N', je ne démontre que la 3ᵉ propriété, dite de « *séparation* ». Si $N'(f) = 0$, alors $f + f' = 0$ sur $\left[0,1\right]$. L'équation différentielle s'intègre immédiatement en $f(x) = Ce^{-x}$. On se sert alors de l'hypothèse supplémentaire $f(0) = 0$ qui amène $C = 0$.

2)

$$\forall x \in \left[0,1\right],\ \int_0^x e^t \big(f(t) + f'(t)\big)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(e^t f(t)\big)'\,\mathrm{d}t = e^x f(x) - e^0 f(0) = e^x f(x)$$

3) On a immédiatement $N'(f) = \|f + f'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty = N(f)$. Pour l'autre inégalité, on utilise **Q2** :

$$\begin{aligned}\left|e^x f(x)\right| &= \left|\int_0^x e^t \big(f(t) + f'(t)\big)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^x e^t \left|f(t) + f'(t)\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x e^t \|f + f'\|_\infty\,\mathrm{d}t \\ &= \|f + f'\|_\infty \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t = \|f + f'\|_\infty\ (e^x - 1) \leq (e-1)\ N'(f)\end{aligned}$$

Comme, pour $x \in \left[0,1\right]$, $\left|f(x)\right| \leq \left|e^x f(x)\right|$, il suit $\|f\|_\infty \leq (e-1) N'(f)$. Ensuite on écrit :

$$\|f'\|_\infty = \|f' + f - f\|_\infty \leq \|f + f'\|_\infty + \|f\|_\infty \leq N'(f) + (e-1) N'(f) = e\ N'(f)$$

On termine, en ajoutant les 2 dernières inégalités : $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq (e-1) N'(f) + e N'(f) = (2e-1) N'(f)$

CCP BQMP 2022->2021-2011 (équivalence de normes sur les polynômes)

Ex 11 On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.
Pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, n désignant le degré de P, on pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ $N_\infty(P) = \sup_{0\le i\le n} |a_i|$.

1) Démontrez que N_∞ norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admet N_1 norme. [**2011 :** N_1 aussi et montrez succinctement] .

2) ~~Démontrez que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.~~

3) Démontrez que N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

4) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-ev de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' (rp. N_∞') la restriction de N_1 (rp. N_∞) à $\mathbb{R}_k[X]$. Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

Cet exercice fait partie de la banque d'exos CCINP 2021 MP, n°38.

Vous pouvez regarder la correction fournie par le concours : Banque CCINP MP 2021 avec corrigés

Mines-Ponts PSI 2022 (convergence suite de polynômes) ✷

Ex 13 Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \|P'\|_{\infty\,[0,1]}$.

1) Soit E un ev muni de 2 normes équivalentes N_1 et N_2, (u_n) une suite de E qui converge pour N_1. Montrez que (u_n) converge pour N_2.

2) Montrez N_a norme sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Soient $a, b \in [0,1]$. Montrez N_a et N_b normes équivalentes.

4) Pour quelles valeurs de a, la suite des $P_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

1) Question de cours. Je ne redémontre pas ici.

2) L'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates, je vous laisse les traiter. Quant à la séparation, si $N_a(P) = 0$, par positivité on a $P(a) = 0$ et $\|P'\|_\infty = 0$ soit $P' = 0$ sur $[0,1]$, ce qui entraîne P constante-nulle sur $[0,1]$ et donc sur $\mathbb{R}$ (infinité de racines), c'est bien le polynôme nul.

3) De l'égalité $P(b) = P(a) + \int_a^b P'$, on tire $|P(b)| \le |P(a)| + \|P'\|_\infty$ (***Attention !*** pour $0 \le a, b \le 1$ car c'est la norme sup sur $[0,1]$). Il suit alors $N_b(P) \le |P(a)| + 2\|P'\|_\infty \le 2N_a(P)$. Par symétrie des lettres, on tire $N_a(P) \le 2N_b(P)$, d'où l'équivalence des 2 normes.

4) On a $N_a(P_n) = \left|\frac{a}{2}\right|^n + \frac{n}{2^n}$.

- Si $|a| < 2$, $\lim N_a(P_n) = 0$, soit $\lim P_n = 0$ pour la norme N_a.
- Si $|a| > 2$, $\lim N_a(P_n) = +\infty$ donc la suite (P_n) diverge pour la norme N_a (rappel : si x_n converge vers x pour la norme $\|.\|$, alors $\|x_n\|$ converge vers $\|x\|$)
- Si $a = \pm 2$, $\lim N_a(P_n) = 1$. On ne peut conclure (par cette méthode!) quant à la convergence de cette suite. Seulement : si elle converge, elle converge vers un polynôme de norme 1. On constate $N_a(P_n - 1) = \left|\left(\frac{a}{2}\right)^n - 1\right| + \frac{n}{2^n} \longrightarrow 1$ si $a = 2$, soit la suite (P_n) converge vers le polynôme-constant 1 pour N_a. Si $a = -2$, on constate que la sous-suite (P_{2n}) converge vers 1 et la sous-suite (P_{2n+1}) vers -1, il n'y a donc pas de limite.

Ex 14 Soit $A \in E = M_n(\mathbb{C})$ tq $\lim A^n = P$. Montrez que P est une (matrice de) projection.

On écrit $A^{2n}=A^n\times A^n$. $A^{2n}\longrightarrow P$ en tant que sous-suite de la suite convergente (A^n) et le produit de 2 suites de matrices convergeant vers le produit des limites (on peut considérer que c'est du cours), il vient par passage à la limite et unicité de la limite $P=P\times P$, soit P (matrice de) projection.

Centrale PSI 2021 (suite de matrices diagonalisables) ☜

Ex 17

1) La matrice $T=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ est-elle diagonalisable ? Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables ?

2) Soit P de degré n. Montrez P est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $c>0$ tq, $\forall z\in\mathbb{C}$, $\left|P(z)\right|\geq c\left|\operatorname{Im} z\right|^n$.

3) Soit $(A_k)_k$ une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ convergeant vers $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez χ_A scindé sur $\mathbb{R}$.

1) Comme matrice triangulaire, on a que la seule vp de T est 1. Par suite on sait qu'elle est diagonalisable ssi $T=1I_3$, ce qui n'est pas le cas. En posant $T_n=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1+\frac{1}{n}&2\\0&0&1+\frac{2}{n}\end{pmatrix}$, on a clairement $\lim T_n=T$ (car chaque suite-coefficient réelle de T_n tend trivialement vers le coefficient de même indice de T). Les matrices T_n sont diagonalisables car possèdent 3 vp distinctes en dimension 3.

Remarque : Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice est limite d'une suite de matrices diagonalisables (l'ensemble des matrices diagonalisables est ***dense*** dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Par contre, dans $\mathbb{R}$, seules les matrices trigonalisables réelles sont limites d'une suite de matrices diagonalisables réelles.

2) Soit P un polynôme de degré n vérifiant $|P(z)|\geq c|\Im\mathrm{m}\, z|^n$, pour tout zz complexe. Si z est une racine de P, il suit $\operatorname{Im} z=0$, soit z réelle.

Réciproquement, si P est scindé sur $\mathbb{R}$, $P=\prod_{i=1}^n(X-a_i)$ avec a_i réel (éventuellement confondus). Par suite $|P(z)|=\prod_{i=1}^n|z-a_i|$. Or, via $z=x+iy$, $|z-a_i|^2=(x-a_i)^2+y^2\geq y^2$ (ce sont des réels !). Il suit $|P(z)|\geq\prod_{i=1}^n|y|=|\Im\mathrm{m}\, z|^n$.

Remarque : Cette condition est une condition ***fermée*** : par le supérieur ou ***égal*** et la continuité des fonctions par rapport à z. Il suit que l'ensemble des polynômes ***de degré n et scindés sur*** $\mathbb{R}$ est un fermé.

3) Soit (A_k) une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ convergent vers A réelle. les polynômes χ_{A_k} sont donc scindés sur $\mathbb{R}$ (***Attention !*** ce n'est pas équivalent à diagonalisable !). Comme $\chi_{A_k}=\det(XI_n-A_k)$, que l'application det est continue (polynôme homogène de degré n en les n^2 coefficients de la matrice), et que $A_k\longrightarrow A$, il suit $\chi_{A_k}\longrightarrow\chi_A$. Par la condition de fermeture de la remarque plus haut, il vient que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Remarque : On vient de montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables (noté D) contient les matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$ (χ scindé), je vous laisse y réfléchir. La réciproque étant immédiate (c'est à peu près Q1), il suit qu'on vient (presque) de prouver que l'adhérence des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des matrices trigonalisables sur $\mathbb{R}$(ou que cet ensemble D est dense « *dedans* », ce qui est équivalent)

Ex 21 On pose $B_n=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{n}\\\frac{1}{n}&1\end{pmatrix}^n=A_n^n$. Etudiez existence et valeur de $\lim B_n$

$$B_n=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{n}\\ \frac{1}{n} & 1\end{pmatrix}^n=\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^n\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}} & -\frac{1}{n\sqrt{1+1/n^2}}\\ \frac{1}{n\sqrt{1+1/n^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}\end{pmatrix}^n=\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^n R_n^n$$

$$\overbrace{=}^{\textbf{(1)}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^n Rot(\theta_n)^n\overbrace{=}^{\textbf{(2)}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)^n Rot(n\theta_n)\overbrace{\longrightarrow}^{\textbf{(3)}}1\times Rot(1)=\begin{pmatrix}\cos 1 & -\sin 1\\ \sin 1 & \cos 1\end{pmatrix}$$

- **(1)** La matrice R_n est orthogonale, car (C_1,C_2) est une BON (pour R^2 euclidien canonique). Comme son déterminant vaut 1, c'est une matrice de rotation d'angle (de mesure) θ_n (c'est du cours) en posant $\cos\theta_n=\frac{1}{\sqrt{1+1/n^2}}$ et $\sin\theta_n=\frac{1}{n\sqrt{1+1/n^2}}$.
- **(2)** Le produit d'une rotation d'angle θ et d'une autre d'angle θ' est une rotation d'angle $\theta+\theta'$
- **(3)** On a $\tan\theta_n=\frac{1}{n}$ et comme le cosinus et sinus sont positifs, l'angle est dans $[0\frac{\pi}{2}]$, on peut donc écrire $\theta_n=\arctan\frac{1}{n}$, puis $n\theta_n\sim n\frac{1}{n}=1$. ***Attention !*** , on applique aussi la ***continuité*** de $\theta\longrightarrow Rot(\theta)=\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ (pour permettre la limite à l'intérieur!) qui découle du fait que les 4 applications-coordonnées le sont.

  Quant à la 1re quantité, elle est égale à $\exp\left(\frac{n}{2}\ln(1+\frac{1}{n^2})\right)=\exp\left(\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)\right)=\exp(o(1))\longrightarrow e^0=1$

Mines-Ponts PSI 2022 (suites convergentes colinéaires) ✷ ☜

Ex 23 Soit E un espace préhilbertien réel.

1) Soient (u_n) une suite à valeurs dans E qui converge vers $u\in E$ et (λ_n) une suite réelle qui converge vers $\lambda\in\mathbb{R}$. Montrez que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge vers λu.

2) On suppose, dans cette question, que E est de dimension finie. Soient $(u_n),(v_n)$ deux suites à valeurs dans E qui convergent vers $u,v\in E$. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n et v_n sont colinéaires. Montrez u et v colinéaires.

3) Le résultat de la question précédente demeure t-il vrai si l'on ne suppose plus E de dimension finie ?

1) On écrit $\lambda_n u_n-\lambda u=(\lambda_n-\lambda)u_n+\lambda(u_n-u)$. La suite (u_n) est bornée car convergente. Puis

$$0\le\|\lambda_n u_n-\lambda u\|\le|\lambda_n-\lambda|\,\|u_n\|+|\lambda|\,\|u_n-u\|\le M\,|\lambda_n-\lambda|+|\lambda|\,\|u_n-u\|\xrightarrow{n\to+\infty}0$$

2) Notons que si on écrit $u_n=\lambda_n v_n$, il n'est pas simple de prouver directement que la suite (λ_n) converge (en plus (x,y) colinéaires n'équivaut pas à $x=\lambda y$). L'ev étant de dimension finie, on le rapporte à une base $(e_1,\dots,e_p)$. Par suite $u_n=\sum_{k=1}^p x_{kn}e_k$ et $v_n=\sum_{k=1}^p y_{kn}e_k$. La convergence des suites (u_n) et (v_n) amènent (équivalent en fait) à la convergence des $2p$ suites-coordonnées réelles $(x_{kn})_n$ et $(y_{kn})_n$ vers, respectivement α_k et β_k. On sait alors $u=\sum_{k=1}^p\alpha_k e_k$ et $v=\sum_{k=1}^p\beta_k e_k$. La condition (u_n,v_n) colinéaires s'écrit comme nullité des $p-1$ déterminants 2×2 (vu en cours) $\det\left(\left(\begin{smallmatrix}x_{kn} & y_{kn}\\ x_{k+1,n} & y_{k+1,n}\end{smallmatrix}\right)\right)=0$, pour $1\le k\le p-1$. Cette condition étant un polynôme en les 4 variables, on peut passer à la limite « *à l'intérieur* », soit $\det\left(\left(\begin{smallmatrix}\alpha_k & \beta_k\\ \alpha_{k+1} & \beta_{k+1}\end{smallmatrix}\right)\right)=0$, ce qui traduit la colinéarité de u et v

Remarque : En fait, plus généralement, la condition $\{\operatorname{rg}(M)\le m\}$, pour m fixé, est une ***fermé*** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ce n'est pas si facile à démontrer, mais ceci donnerait une autre réponse à cet exo avec $m=1$

3) On part de $v_n=\lambda_n u_n$. Si $u_n\longrightarrow 0$, évidemment v et u sont colinéaires. Sinon, $u\neq 0$. Montrons que u_n n'est pas orthogonal à u àpcr : $(u_n|u)\longrightarrow(u|u)=\|u\|^2\neq 0$ par continuité de $y\longrightarrow(y|u)$, application linéaire 1-lipschitzienne donc continue ((immédiat, démontré en exo même en dimension infinie). On peut alors effectuer le rapport $\lambda_n=\frac{(v_n|u)}{(u_n|u)}$ suite réelle convergeant vers $\frac{(v|u)}{\|u\|^2}$. On termine alors en utilisant Q1.

Centrale PSI 2022 (fermeture des classes de similitude) ✷ ✷

Ex 24

1) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que, si A est semblable à B, $P(A)$ est semblable à $P(B)$

2) Soit $(B_k)_k$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}, B_k$ est semblable à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrez A semblable à B.

3) Est-ce encore vrai si A n'est pas diagonalisable ?

1) En posant $Q = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et si $A = PBP^{-1}$, $A^k = PB^kP^{-1}$ puis :

$$Q(A) = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k = \sum_{k=0}^{p} a_k PB^kP^{-1} = P \sum_{k=0}^{p} a_k B^k \, P^{-1} = P\, Q(B)\, P^{-1}$$

2) Si on essaye d'utiliser $B_k = P_k A P_k^{-1}$, on va être « *embêté* » car il est guère possible de conclure que la suite (P_k) converge. En plus une limite de matrices inversibles n'est pas nécessairement une matrice inversible (l'ensemble n'est pas fermé, je vous laisse y réfléchir). Il faut procéder autrement.

A est diagonalisable donc annule un polynôme P scindé à racines simples que l'on peut prendre égal à $\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ où les λ_i sont ***les vp distinctes*** de A. Comme les matrices B_k sont semblables à A, d'une part elles ont nécessairement les mêmes vp distinctes (ce n'est pas suffisant) et d'autre part elles sont diagonalisables. On en déduit $P(B_k) = 0$. L'application $M \longrightarrow P(M)$ étant continue car chacune des n^2 applications-coefficients est un polynôme en les n^2 coefficients de M. Il vient alors $P(B) = 0$. Donc B est diagonalisable mais malheureusement on ne peut en déduire que B a les mêmes vp que A et de toute façon ce ne serait pas suffisant pour conclure)

On utilise parallèlement le polynôme caractéristique de A noté χ_A. Comme les B_k sont semblables à A elles ont même polynôme caractéristique. Considérons l'application $\chi : M \longrightarrow \chi_M = \det(XI - M)$. Elle est continue car chacun des coefficients du polynôme dépend continûment de M, ce sont des polynômes en ses coefficients. Comme $\chi(B_k) = \chi_A = \chi(A)$, en passant à la limite on a $\chi_B = \chi_A$. B a donc les mêmes vp que A, avec la même multiplicité, et est diagonalisable, donc est semblable à la (une) même matrice diagonale que A, donc est semblable à A.

Remarque : Si on enlève l'hypothèse A diagonalisable, la conclusion (peut) est en défaut. Le lecteur s'en convaincra en considérant la suite $B_k = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, toutes semblables à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, non diagonalisable, alors que $\lim B_k$ n'est pas semblable à A.

Centrale PSI 2021 (fonction matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) ✷ ✷ ☜

Ex 31 Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1.

1) Supposons, dans cette question, qu'il existe $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrez il existe $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$.

2) Supposons, dans cette question, qu'il existe $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$. Montrez, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

1) On suppose $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$ ce qui s'écrit aussi $A(t)S(t) = S(t)A(0)$. Comme ces applications (d'une variable réelle) sont C^1 sur $\mathbb{R}$, on peut dériver et il vient $A'S + AS' = S'A_0$ puis :

$$A' = S'A_0S^{-1} - AS'S^{-1} = S'(S^{-1}AS)S^{-1} - AS'S^{-1} = S'S^{-1}A - AS'S^{-1}$$

L'application définie par $B(t) = S'(t)S^{-1}(t)$ convient. Elle est ***continue*** sur $\mathbb{R}$.

2) Réciproquement, on suppose ici que $A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$ avec $B : t \in \mathbb{R} \longrightarrow B(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue. On considère le système différentiel $X' = B(t)X$. Il n'est pas à coefficients constants. D'après le théorème de Cauchy (ce n'est plus vraiment au programme), il existe une unique solution $C_i(t)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, vérifiant la condition initiale $C_i(0) = E_i$ où E_i est le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose la « *matrice* » par blocs en colonnes $S(t) = [C_1(t)\dots C_n(t)]$. alors S est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, produit par blocs, $S'(t) = B(t)[C_1(t)\dots C_n(t)] = B(t)S(t)$. On a $S(0) = I_n$ et S inversible pour tout t car

$$\begin{aligned}
\big(\det S(t)\big)' &= \det_\varepsilon\big(C_1(t),\dots,C_n(t)\big)' \overbrace{=}^{(1)} \sum_{i=1}^n \det_\varepsilon\big(C_1(t),\dots,C_{i-1}(t),C_i'(t),C_{i+1}(t),\dots,C_n(t)\big)\\
&= \sum_{i=1}^n \det_\varepsilon\big(C_1(t),\dots,C_{i-1}(t),B(t)C_i(t),C_{i+1}(t),\dots,C_n(t)\big) \overbrace{=}^{(2)} \operatorname{tr}(B(t))\det_\varepsilon\big(C_1(t),\dots,C_{i-1}(t),C_i(t),C_{i+1}(t),\dots,C_n(t)\big)\\
&= \operatorname{tr}(B(t))\det(S(t)) \quad\Longrightarrow\quad \det(S(t)) = \det(S(0))\exp\left(\int_0^t \operatorname{tr}(B(s))\,ds\right) \neq 0
\end{aligned}$$

- **(1)** Par n-linéarité, $\det(f_1,\dots,f_n)' = \sum_{i=1}^n \det(f_1,\dots,f_{i-1},f_i',f_{i+1},\dots,f_n)$. c'est du cours. c'est la généralisation de : pour toute application bilinéaire B en dimension finie, $(B(f,g))' = B(f',g) + B(f,g')$.
- **(2)** On démontre que $(x_1,\dots,x_n) \longrightarrow \sum_{i=1}^n \det_\varepsilon(x_1,\dots,x_{i-1},u(x_i),x_i,\dots,x_n)$ est une forme n-linéaire alternée. Elle est par conséquent colinéaire à $\det_\varepsilon$ (qui est ***la forme n-linéaire alternée*** prenant la valeur 1 sur la base canonique ε). Le facteur de colinéarité est $\operatorname{tr} u$.

Reste à vérifier $AS = SA_0$. On écrit :

Ex 32 On munit $E = \mathscr{C}^0\big(\,[0,1]\,,\mathbb{R}\big)$ de la norme de la convergence en moyenne, cad $N(f) = \int_0^1 |f|$.

1) Etablir que la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ qui à f associe $f(0)$ n'est pas continue. (*Indication* : On pourra considérer la suite de fonctions f_n définie par f_n est affine par morceaux joignant les points $(0,1)$ $(1/n,0)$ $(1,0)$)

2) En munissant E de la norme infinie usuelle (norme de la convergence uniforme), montrez, à contrario, que l'application linéaire φ est continue (*indication :* on pourra montrer lipschitzienne)

---

1) Comme E est de dimension infinie, la forme linéaire $\varphi : f \in E \longrightarrow 0$ n'est pas nécessairement continue. En plus sa continuité peut dépendre de la norme choisie sur E. On choisit d'abord la norme 1, norme de la convergence en moyenne, notée ici N. L'énoncé nous donne une suite de fonctions (f_n) et de prouver que φ n'est pas continue, ce qui nous laisse supposer que l'on va utiliser la caractérisation de la limite (ou de la continuité). Rappelons-la :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \text{Pour toute suite } (x_n) \text{ tq } x_n \longrightarrow a,\ f(x_n) \longrightarrow f(a)$$

Ici la suite va (probablement) vérifier $f_n \longrightarrow f$ pour la norme N (f qu'il faudra déterminer) et $\varphi(f_n) = f_n(0)$ ***ne tend pas vers*** $f(0)$. Il n'y a pas besoin de préciser la norme à l'espace d'arrivée, car on est dans $\mathbb{R}$, toutes les normes sont équivalentes, on n'en parle même pas ...(sinon on prend la valeur absolue).

Pour trouver vers quelle fonction converge la suite de fonctions (f_n) pour la norme N on peut toujours commencer par regarder la suite réelle $N(f_n)$ comme je vous l'ai déjà expliqué. Ici c'est une aire, je ne vous fais pas le dessin, on voit que c'est un triangle-rectangle de hauteur 1 et de largeur $\frac{1}{n}$, soit $N(f_n) = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0$. On en déduit que $f_n \longrightarrow 0$ ***pour la norme*** N. On a aussi $\varphi(f_n) = f_n(0) = 1$ d'après les données de l'énoncé et $\varphi(f) = f(0) = 0$. La preuve est donc acquise.

2) On munit ici E de la norme $\|\|_\infty$. Pour montrer qu'une application linéaire f est continue (norme $\|.\|$), on essaye en général de montrer $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. C'est ce que l'on va faire ici, attention aux deux normes différentes au départ et à l'arrivée : $|\varphi(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$, inégalité immédiate! La preuve est donc teminée.

On répond proprement à la question en montrant φ lipschitzienne, on applique simplement la linéarité de φ :

$$\forall\, f, g \in E,\ \left|\varphi(f) - \varphi(g)\right| = \left|\varphi(f-g)\right| \leq \|f-g\|_\infty$$

Ex 38 Montrez que $O = \left]-1,1\right[\, \times \mathbb{R} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |1 < |x| < y^2\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On pose $O_1 = \left]-1,1\right[\, \times \mathbb{R} = \left]-1,1\right[\, \times \left]-\infty, +\infty\right[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ comme produit d'intervalles ouverts. On pose $O_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |1 < |x| < y^2\right\}$. O_2 est l'***intersection*** des 2 ouverts $U_1 = \left\{(x,y),\ f(x,y) > 0\right\}$ et $U_2 = \left\{(x,y),\ g(x,y) > 0\right\}$ avec les 2 fonctions ***continues*** sur $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = |x| - 1$ et $g(x,y) = y^2 - |x|$. O_2 est donc un ouvert et par suite O aussi comme union ***finie*** des 2 ouverts O_1 et O_2.

a

Centrale PC 2018 (fermeture matrice 2×2 de valeurs propres de module 1) ✷ ✷

Ex 39 Montrez que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont de module 1 est un fermé

Il faut essayer de trouver une caractérisation pour qu'un polynôme de degré 2 unitaire (polynôme caractéristique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$) aie 2 racines de module 1. On procède par analyse-synthèse mais on procède « *simultanément* », cad on essaie de remonter à chaque CN trouvée.

Méthode 1 : Soit le polynôme $X^2 + aX + b$. Si les 2 racines z, z' sont de module 1, alors $|b| = |zz'| = 1$. Evidemment ce n'est pas suffisant. Si on regarde la somme $S = -a = z + z'$. On peut écrire $|a| \leq |z| + |z'| = 2$. Mais ce n'est pas encore suffisant, car 2 et $\frac{-1}{2}$ vérifie ces 2 conditions. On a l'idée de considérer $|z| + \frac{1}{|z|}$ (on a $|z'| = \frac{1}{|z|}$). Si on étudie $f(x) = x + \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^+$, on s'aperçoit que $f(x) = 2 \iff x = 1$. On a donc trouvé une CNS. Le problème est maintenant d'exprimer $|z| + |z'|$ en fonction des coefficients du polynôme, c'est difficile simplement. En fait une meilleure alternative est de considérer plutôt $|z|^2 + |z'|^2$. On a toujours $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2 \iff x = 1$ (pour $x \geq 0$) mais, par contre, cette quantité s'exprime facilement en fonction des coefficients du polynôme. En effet, on sait, $|z|^2 + |z'|^2 = \frac{1}{2}\left(|z+z'|^2 + |z-z'|^2\right)$, en se rappelant $|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2\Re\mathrm{e}\,(a\overline{b})$. On utilise $z + z' = -a$ et $(z-z')^2 = z^2 + z'^2 - 2zz' = (z+z')^2 - 4zz'$. Via $b = \det M$ et $a = -\operatorname{tr}(M)$, L'ensemble cherché est donc l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $|\det(M)| = 1$ et $4 = |\operatorname{tr}(M)|^2 + |\operatorname{tr}(M)^2 - 4\det(M)|$. Ces 2 conditions sont ***fermées*** par continuité de $|.|$, de l'application $M \longrightarrow \det(M)$ (polynôme homogène de degré n en les n^2 variables-coefficients de M) et $M \longrightarrow \operatorname{tr}(M)$ (application linéaire en dimension finie).

Méthode 2 : Voici une méthode beaucoup plus générale : elle « *marche* » en dimension n et pour tout ensemble F fermé ... C'est-à-dire que l'ensemble E des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que toutes ses valeurs propres (ou de tous les polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ tq toutes ses racines) appartiennent à un fermé F est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

On rappelle que toute norme sur un ev induit une distance d par $d(x,y) = \|x - y\|$ et qu'on peut définir alors la distance d'un vecteur à un ensemble quelconque A par $d(x,A) = \inf_{a\in A} d(x,a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$ (ici, c'est la valeur absolue). Montrons que l'ensemble cherché est ***caractérisé*** par $\forall\, z \in \mathbb{C},\ |\chi_A(z)| \geq d^n(z,F)$ avec $\chi_A(z) = \prod_{i=1}^n (z - a_i)$

Si $M \in E$, $a_i \in F$ donc $\forall\, 1 \le i \le n$, $|z - a_i| \ge d(z,F)$. Le résultat suit. Réciproquement, si une racine a_i n'est ***pas*** élément de F, pour $z = a_i$, $\chi_A(a_i) = 0$ et $d(a_i, F) > 0$. L'inégalité n'est pas vérifiée. On termine en observant que $M \longrightarrow \chi_M(z) = \det(zI - M)$ est continue (à z fixé). La propriété devant être réalisée pour tout z, c'est une intersection (infinie!) de fermés, $\cap_{z\in\mathbb{C}} C_z$ avec $C_z = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), |\chi_M(z)| - d^n(z,F) \ge 0\right\}$. (Comme on raisonne à z fixé, $d(z,F)$ est une constante, sinon, pour info, $x \longrightarrow d(x,A)$ est continue car lipschitzienne, regardez l'exo 49 si cela vous intéresse).

Remarque : Dans ma démonstration, je ne me suis servi nulle part de l'hypothèse F fermé. Il y a donc une erreur de raisonnement. Voyez-vous où elle se situe ?

Ex 41 Soit E un evn de dimension finie et F un sous-ev (strict) de E. Montrez $\mathring{F} = \emptyset$ et $\overline{F} = F$

Soit F un sous-ev strict de E, donc $F \neq E$. On peut « *comprendre* » que son intérieur est vide, cad qu'il n'a aucun point ***intérieur*** : tout boule centrée en un point du sev, le plus gros étant un hyperplan, tout boule donc « *débordera* » de l'ev, mais il faut le démontrer proprement... Soit H un hyperplan tq $H \supset F$ et $a \not\in H$. On sait alors $H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E$. Munissons E d'une norme quelconque $\|.\|$ (puisqu'elles sont touts équivalentes et définissent la même topologie). Soit $A \in F$ quelconque et$R > 0$ quelconque. Montrons la boule $B(A,R) \not\subset F$. Il ***suffit*** de démontrer $B(A,R) \not\subset H$. Considérons le vecteur $u = A + \dfrac{R}{2\|a\|}a$. On a bien $u \in B(A,R)$ car :

$$\|u - A\| = \left\|\frac{R}{2\|a\|}\,a\right\| = \frac{R}{2\|a\|}\,\|a\| = \frac{R}{2} < R$$

et $u \not\in H$ (donc $\not\in F$) car sinon, par stabilité, comme $A \in H$, on aurait $a \in H$. Absurde.

Montrons ici que tout sev F de dimension finie est un fermé ou autrement dit $\overline{F} = F$. Le plus simple est d'utiliser la caractérisation séquentielle d'un fermé. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base $(e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ de E et soit une suite (f_n) d'éléments de F convergente (dans E à priori). Montrons qu'elle converge ***dans*** F. On écrit $f_n = a_{1n}e_1 + \cdots + a_{pn}e_p + 0e_{p+1} + \cdots + 0e_n$. Comme elle converge,ces n suites-coordonnées rélles convergent etr donc $\lim f_n = \lim a_{1n}e_1 + \cdots + \lim a_{pn}e_p$ qui est bien un élément de F par combinaison linéaire d'une base de F.

Remarque : Attention ! un sev de dimension infinie n'est pas toujours un fermé et cela peut aussi dépendre de la norme choisie. On pourra consulter l'exercice 42.

Ex 43 On se place dans $E = M_p(\mathbb{C})$. Montrez l'ens. des matrices diagonalisables est dense dans E (cad $\overline{D} = E$).
Indication : utilisez toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

On utilise la caractérisation séquentielle : pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on montre qu'il existe une suite de matrices diagonalisables convergeant vers M. M est trigonalisable dans $\mathbb{C}$, donc $M = PTP^{-1}$ avec P inversible et

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & & * & \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_p \end{pmatrix} \qquad T_n = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{a}{n} & & * & \\ 0 & a_2 + \frac{2a}{n} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a_p + \frac{pa}{n} \end{pmatrix}$$

En considérant les suites coefficients de T_n, on a que T_n converge vers T, puis par ***continuité*** de l'application $M \longrightarrow PMP^{-1}$ (car linéaire en dimension finie), que la suite PT_nP^{-1} converge vers M. Reste à vérifier que les T_n sont diagonalisables. Elles le sont car ses valeurs propres (qui sont les coefficients diagonaux) sont tous distincts par le choix d'un « *bon* » a. Il faut le prouver proprement. Si $a_i = a_j, a_i + \frac{ia}{n} \neq a_j + \frac{ja}{n}$. On considère alors l'ensemble d'entiers $J \subset [\![1; p]\!]$ contenant tous les indices des a_i distincts entre eux. Cet ensemble est ***fini*** et donc $m = \inf_{i,j \in J, i \neq j} |a_i - a_j|$ existe et $m > 0$. Tout $a < \frac{m}{p}$ convient.

Ex 46

1) Montrez que toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est limite de matrices inversibles.

2) Soit A inversible et B quelconque. Montrez AB et BA ont même polynôme caractéristique. En déduire que cela reste vrai pour A quelconque.

1) Soit $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ quelconque. Alors immédiatement la suite $M - \frac{1}{n}I$ converge vers M. Elles sont inversibles ssi $\frac{1}{n}$ n'est pas vp de M (cours). C'est possible dès que n est plus grand que $\max\left\{1/|\lambda|, \lambda \neq 0 \in \mathrm{Sp}_C M\right\}$, ensemble fini, donc le max aussi.

2) ***Méthode 1 :*** Si A est inversible, on écrit $AB = A(BA)A^{-1}$. AB et BA étant semblables ont même polynôme caractéristique. Dans le cas géhéral, soit A_n une suite de matrices inversibles convergeant vers A. On a alors $\det(\lambda I - A_nB) = \det(\lambda I - BA_n)$. ***Attention !*** à bien justifier le passage à la limite « *à l'intérieur* » par la continuité. L'application $M \longrightarrow \det(M)$ est continue comme polynôme homogène de degré p en les p^2 coefficients m_{ij}. L'Application $M \longrightarrow \lambda I - BM$ est continue car chacune des p^2 applications-coordonnées l'est (à λ fixé), ce sont des polynômes en les m_{ij}. Le passage à la limite amène alors $\det(\lambda I - AB) = \det(\lambda I - BA)$

Méthode 2 : On cherche à construire un produit de matrices triangulaires par blocs qui donne $AB - \lambda I$ et $BA - \lambda I$ sur la diagonale en les commutant car $\det(MN) = \det(NM)$ et triangulaires permet un calcul facile des dets. Après une petite analyse :

$$MN = \begin{pmatrix} A & \lambda I \\ I & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \lambda I \\ I & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB - \lambda I & 0 \\ B & \lambda I \end{pmatrix} \qquad NM = \begin{pmatrix} B & \lambda I \\ I & -A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \lambda I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA - \lambda I & \lambda B \\ 0 & \lambda I \end{pmatrix}$$

$\det(MN) = \det(NM)$ donne, les matrices étant triangulaires paar blocs, le produit des dets des blocs diagonaux, soit $\det(AB - \lambda I)\lambda^n = \det(BA - \lambda I)\lambda^n$, soit l'égalité demandée pour $\lambda \neq 0$. Pour $\lambda = 0$, le cours nous donne le $\det(AB) = \det(BA)$

Mines-Ponts PSI 2022 (adhérence d'un hyperplan) ✷

Ex 42 Soient E un evn et F un sev de$E$.

1) Montrez que l'adhérence de F est un sev de E

2) Que dire de l'adhérence de F lorsque F est un hyperplan ? On commencera par le cas E de dimension finie.

3) [**Pas dans l'oral :** Dans $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on considère l'hyperplan H des fonctions $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$. En considérant les normes usuelles $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$, établir que H est fermé pour l'une et dense pour l'autre.]

1) On rappelle $F \subset \overline{F}$. Il y a égalité ssi F est un fermé.

- $0 \in \overline{F}$ car $0 \in F$.
- On utilise la caractérisation séquentielle de l'adhérence. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $f, f' \in \overline{F}$, donc il existe 2 suites d'éléments de F (f_n) et (f'_n) convergeant vers f et f'. Par propriété des limites des suites de vecteurs :

$$\alpha f + \beta f' = \alpha \lim f_n + \beta \lim f'_n = \lim \alpha f_n + \beta f'_n$$

  Comme $\alpha f_n + \beta f'_n \in F$ par stabilité du sev F par + et ., il suit $\alpha f + \beta f' \in \overline{F}$

$\overline{F}$ est donc un sev de E (contenant F) (et un fermé de E).

Remarque : Si F est de dimension finie, $\overline{F} = F$ (facile à démontrer si F est un sev d'un ev de dimension finie, traité en exo 41). Donc tout sev de dimension finie est un ***fermé***. C'est (peut-être) faux pour un sev de dimension infinie.

2) La particularité d'un hyperplan est que c'est le plus grand (au sens de l'inclusion) ***sev strict*** de E. Même en dimension infinie (ce n'est pas stricto-sensu au programme). Donc si H est un hyperplan et F un sev contenant H, ou $F = H$ ou $F = E$ (même en dimension infinie). En dimension finie, il suffit d'utiliser un argument de dimension.

Donc, pour en revenir à la question, ou $\overline{H} = H$, ou $\overline{H} = E$. Ceci se traduit, ***topologiquement***, par ***ou*** un hyperplan est fermé ***ou*** il est dense dans E. Ce résultat peut dépendre de la norme qui structure différemment les evs de dimension infinie. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (cours) et donc définissent la même topologie : H étant fermé, comme tout sev de dimension finie, $\overline{H} = H$.

3) H est un hyperplan comme noyau d'une forme linéaire non nulle (même en dimension infinie). Ici E est l'ev des fonctions réelles continues sur $[0;,1]$

Munissons E ici de la norme usuelle infinie, norme de la convergence uniforme pour rappel. Supposons $(f_n) \in H$ convergeant ***uniformément*** vers f, donc il y a en particulier convergence simple donc $f(0) = \lim f_n(0) = \lim 0 = 0$. soit $f \in H$. Par la caractérisation séquentielle d'un fermé, H est ici un fermé.

Munissons ici E de la norme 1, norme de la convergence en moyenne, cad $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. On montre que H n'est pas fermé, (il sera donc ***dense*** dans E), par la caractérisation séquentielle : on trouve une suite (f_n) vérifiant $f_n(0) = 0$, ainsi que $\|f_n - f\|_1 \longrightarrow 0$ ***mais*** $f(0) \neq 0$. On construit f_n, affine par morceaux, de la façon suivante : on joint (par des segments de droites) $(0,0)$ à $(\frac{1}{n}, 1)$ puis à $(1,0)$. on considère $f(x) = x$. Faites un dessin pour visualiser ! On a

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/n} |nt - t|\,\mathrm{d}t + \int_{1/n}^1 \left|\frac{1}{1-\frac{1}{n}}(1-t) - t\right|\mathrm{d}t = \frac{n-1}{2n^2} + \frac{n-1}{2n^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

On a bien $f_n(0) = 0$ et $f(0) = 1 \neq 0$.

Ex 49 Soit (E, N) un evn et $A \subset E$. On définit $d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$.

1) Montrez que $x \to d(x, A)$ est continue. (*montrez qu'elle est lipschitzienne*)

2) On suppose A fermé. Montrez $d(x, A) = 0 \iff x \in A$. Et si A n'est pas fermé ?

1) Pour tous vecteurs $x, y \in E$ et $a \in A$, $\|a - x\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|$ par inégalité triangulaire. On raisonne proprement pour gérer l'inf, qui est le plus grand des minorants.
$d(x, A)$, inf sur $a \in A$, étant un minorant des $\|x - a\|$, il vient $d(x, A) \leq \|x - y\| + \|y - a\|$, puis $d(x, A) - \|x - y\| \leq \|y - a\|$. De la même manière $d(x, A) - \|x - y\|$ est un minorant de tous les $\|y - a\|$ pour tous les a (car ***il n'y a pas de*** a dans l'expression), l'inf étant le plus grand des minorants, il vient $d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A)$ qui s'écrit encore $d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|$. Du choix quelconque de x, y on a également $d(y, A) - d(x, A) \leq \|x - y\|$ qui amène alors à $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$ qui n'est rien d'autre que l'application 1-lipschitzienne.

2) On va montrer directement $d(x, A) = 0 \iff x \in \overline{A}$, ce qui répondra à la question posée puisque A est fermé ssi $A = \overline{A}$.
Supposons $d(x, A) = 0$. Donc pour tout entier n, par caractérisation de l'inf, il existe $a_n \in A$ tq $\|x - a_n\| \leq \frac{1}{n}$. Il suit que (a_n) est une suite d'éléments de A convergeant vers x. Par caractérisation séquentielle de l'adhérence, $x \in \overline{A}$.
Supposons $x \in \overline{A}$. Par caractérisation séquentielle, il existe une suite (a_n) d'éléments de A tq $\lim a_n = x$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit l'existence d'un élément de A, a_n, tq $\|x - a_n\| < \varepsilon$. Il suit $d(x, A) < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$ donc, d'où $d(x, A) = 0$.