Feuille d'Exercices 13

Espaces vectoriels normés

Normes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev. Une application $N : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est une ***norme*** ssi sont vérifiées les propriétés :
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$. (homogénéité)
- $\forall x, y \in E,\ N(x+y) \le N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)
- $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$. (séparation)

Ex 1 Soit $f \in \mathscr{C}^0\big(\left[0,1\right], \mathbb{R}\big)$. On définit sur $\mathbb{R}[X]$, $N(P) = \sup\limits_{x \in [0,1]} \big|f(x)P(x)\big|$. CNS pour que N soit norme?

Ex 2 ✌ Soit E et F 2 $\mathbb{R}$-ev, $\|.\|$ une norme sur F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour $x \in E$, on définit $N(x) = \|f(x)\|$. CNS pour que N soit une norme sur E?

Ex 3 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $\|.\|_1, \|.\|_2$ 2 normes sur E.

1) Montrez que si les 2 boules-unité fermées sont égales, les normes sont égales. (On rappelle que $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$).

2) ✷ Montrez que si les 2 boules-unité ouvertes sont égales, les normes sont égales (Utilisez Q1 et les ε)

Centrale PSI 2022-2011 (normes sur $\mathscr{C}^2\big([0,1], \mathbb{R}\big)$) ✷

Ex 4 Soit $E = \big\{f \in \mathscr{C}^2\big(\left[0,1\right], \mathbb{R}\big), f(0) = f'(0) = 0\big\}$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1) Soit $h : t \longrightarrow f(t)e^t$. Montrez, pour tout $t \in \left[0,1\right]$, $h(t) = \int_0^t (t-u)h''(u)\,\mathrm{d}u$ [**2011 :** Question absente] .

2) Montrez que N est une norme.

3) Montrez il existe $c > 0$ tq $\forall f \in E,\ \|f\|_\infty \le cN(f)$. Déterminez le + petit c [**2011 :** Quest. sur + petit absente]

TPE PSI 2015 (norme et boules)

Ex 5 Pour $u = (x,y)$, on pose $N(u) = \sup\limits_{0 \le t \le 1} \Big|x + ty\Big|$.

1) Montrez que $N(u) = \max(|x|, |x+y|)$, puis que N est une norme.

2) Soit B la boule unité de N. Trouvez le plus petit disque euclidien contenant B et le plus grand disque euclidien contenu dans B.

3) Dessinez la boule-unité (pas dans l'oral initial)

Mines-Ponts PSI 2022 (norme de Frobenius matricielle) ✷

Ex 6 Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \operatorname{tr}(AA^{\mathrm{T}})$. Montrez, pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $N(AB) \le N(A)N(B)$

Ex 7 On se place sur $E = M_n(\mathbb{C})$

1) Montrez qu'il n'existe pas de norme vérifiant $\forall M, N \in E \quad \|MN\| = \|NM\|$

2) En déduire qu'il n'existe pas de norme sur E « *invariante par matrices semblables* ».

Normes Equivalentes

N_1, N_2 deux normes sur un ev E sont dites équivalentes ssi il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tq $\forall x \in E,\ \alpha N_2(x) \le N_1(x) \le \beta N_2(x)$

Dimension Finie : Dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension ***finie***, ***toutes*** les normes sont équivalentes

Ex 8 Sur $C^1([0,1], \mathbb{R})$, $N(f) = \displaystyle\int_0^1 |f| \quad N'(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'|$.

1) ✌Montrez que ce sont des normes sur E et établir $\forall f \in E \quad N(f) \le N'(f)$

2) Prouvez que ces normes ne sont pas équivalentes.

Ex 9 Sur le $\mathbb{R}$-ev E des suites réelles bornées vérifiant $u_0 = 0$, on définit les normes $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \|u\|_1 = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$. Sont -elles équivalentes?

CCINP PSI 2021 (normes équivalentes sur espaces de fonctions) ✍

Ex 10 On note $E = \{f \in \mathscr{C}^1[0,1],\ f(0)=0\}$. On pose, pour $f \in E$, $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f+f'\|_\infty$.

1) Montrez N et N' sont des normes sur E.

2) Etablir, pour tout $x \in [0,1]$, $e^x f(x) = \int_0^x e^t(f(t)+f'(t))\,\mathrm{d}t$.

3) Montrez il existe deux réels α, β tq $\forall f \in E,\ \alpha N'(f) \leq N(f) \leq \beta N'(f)$.

CCP BQMP 2022->2021-2011 (équivalence de normes sur les polynômes)

Ex 11 On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

Pour $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, n désignant le degré de P, on pose $N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i|$ $\quad N_\infty(P) = \sup_{0\leq i\leq n} |a_i|$.

1) Démontrez que N_∞ norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admet N_1 norme. [**2011 :** N_1 aussi et montrez succinctement] .

2) ~~Démontrez que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.~~

3) Démontrez que N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

4) On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-ev de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' (rp. N_∞') la restriction de N_1 (rp. N_∞) à $\mathbb{R}_k[X]$. Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

Mines-Ponts PSI 2009 ✷

Ex 12 Soit $E = \mathbb{C}[X]$. Si $a = (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $P = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On pose $N_a(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k |p_k|$

1) CNS sur a pour N_a soit une norme sur E.

2) Soient $a, b \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$. Donnez une CNS pour que N_a et N_b soient équivalentes.

3) Donnez une CNS sur $a \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$, pour que $D : P \to P'$ soit continue.

Mines-Ponts PSI 2022 (convergence suite de polynômes) ✷

Ex 13 Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \|P'\|_{\infty\,[0,1]}$.

1) Soit E un ev muni de 2 normes équivalentes N_1 et N_2, (u_n) une suite de E qui converge pour N_1. Montrez que (u_n) converge pour N_2.

2) Montrez N_a norme sur $\mathbb{R}[X]$.

3) Soient $a, b \in [0,1]$. Montrez N_a et N_b normes équivalentes.

4) Pour quelles valeurs de a, la suite des $P_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Suites de Matrices / Polynômes / Vecteurs

Soit $(E, \|.\|)$ un evn. On dit qu'une suite de vecteurs (M_n) ***converge*** ssi il existe $M \in E$ tel que $\|M_n - M\| \longrightarrow 0$

- Si $M_n \longrightarrow M$, $\|M_n\| \longrightarrow \|M\|$ (réciproque fausse sauf $M = 0$)
- $\|M_n\| \longrightarrow 0 \iff M_n \longrightarrow 0$.
- Si $\|M_n\| \longrightarrow +\infty$, la suite (M_n) ***diverge***

Suites-Coordonnées : Soit E un ev de dimension finie et $(e_1, \dots, e_p)$ une base. Soit M_n une suite de vecteurs de E et $M_n = u_{1n}e_1 + \dots + u_{pn}e_p$. Alors la suite $M_n)$ ***converge*** ssi chaque ***suite-coordonnée*** réelle $(u_{kn})_n)$ converge, et alors $\lim M_n = \lim u_{1n} e_1 + \dots + \lim u_{pn} e_p$

Ex 14 ✌Soit $A \in E = M_n(\mathbb{C})$ tq $\lim A^n = P$. Montrez que P est une (matrice de) projection.

Ex 15 ✌Soit (A_n) une suite de matrices inversibles tq $A_n \to A$ et $A_n^{-1} \to B$. Etablir que A est inversible.

Ex 16 Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par $N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |P^{(n)}(0)|$ et $N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$

1) Montrez que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

2) On pose $P_n = \frac{1}{n} X^n$. Etudiez la convergence de la suite (P_n) pour N_1 et N_2. Qu'en pensez-vous ?

Centrale PSI 2021 (suite de matrices diagonalisables) ☜

Ex 17

1) La matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Est-elle limite d'une suite de matrices diagonalisables ?

2) Soit P de degré n. Montrez P est scindé sur $\mathbb{R}$ ssi il existe $c > 0$ tq, $\forall z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq c|\operatorname{Im} z|^n$.

3) Soit $(A_k)_k$ une suite de matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ convergeant vers $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez χ_A scindé sur $\mathbb{R}$.

Mines-Ponts PSI 2022 (suite de matrices) ✷ ☜

Ex 18

1) Etudiez la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right)$.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tq $N^p = 0$. On pose $A = I_p + N$.

2) Montrez A inversible.

3) Justifiez l'existence et étudiez la suite de matrices (M_n) définie par $M_0 = A$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ M_{n+1} = \frac{1}{2}\left(M_n + M_n^{-1}\right)$.

Ex 19 On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Etablir $(A-I)^2 = 0$ puis étudiez la suite $A_n = \frac{1}{n} A^n$.

CCINP PSI 2021 (convergence suite de polynômes) ✷

Ex 20

Soient $a \in \mathbb{R}$ et, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|\,\mathrm{d}t$.

1) Montrez N_a norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrez que, si E est un evn muni d'une norme N, si $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$, alors $N(x_n) \longrightarrow N(x)$.

3) Pour quelles valeurs de a, la suite des $P_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n$ est-elle convergente pour N_a ?

Ex 21 On pose $B_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 1 \end{pmatrix}^n = A_n^n$. Etudiez existence et valeur de $\lim B_n$

Ex 22 Soit (a_n) une suite d'un evn E de dimension finie telle que la série $\sum \|a_n\|$ converge. Montrez que la série $\sum a_n$ converge (cad la suite des sommes partielles converge).

Mines-Ponts PSI 2022 (suites convergentes colinéaires) ✷ ☜

Ex 23 Soit E un espace préhilbertien réel.

1) Soient (u_n) une suite à valeurs dans E qui converge vers $u \in E$ et (λ_n) une suite réelle qui converge vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrez que la suite $(\lambda_n u_n)$ converge vers λu.

2) On suppose, dans cette question, que E est de dimension finie. Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites à valeurs dans E qui convergent vers $u, v \in E$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n sont colinéaires. Montrez u et v colinéaires.

3) Le résultat de la question précédente demeure t-il vrai si l'on ne suppose plus E de dimension finie ?

Centrale PSI 2022 (fermeture des classes de similitude) ✷ ✷ ✍

Ex 24

1) Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez que, si A est semblable à B, $P(A)$ est semblable à $P(B)$

2) Soit $(B_k)_k$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}, B_k$ est semblable à une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Montrez A semblable à B.

3) Est-ce encore vrai si A n'est pas diagonalisable ?

Mines-ponts PSI 2013 (Limites de matrices) ✷

Ex 25 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire avec a pour unique valeur propre. Montrez l'équivalence de :

(i) $|a| < 1$. **(ii)** $\sum_{k=0}^{p} M^k$ converge lorsque $p \to +\infty$. **(iii)** $\lim_{p \to +\infty} M^p = 0$.

Ex 26 On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$. Soit $b_0, \ldots, b_n$ n+1 réels distincts. Pour $P \in E$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(b_k)|$.

1) ✌Etablir que N est une norme sur E.

2) ✷ Soit (P_m) une suite de polynômes de E tq $P_m = a_{mn} X^n + \cdots + a_{m1} X + a_{m0}$. Montrez l'équivalence de

(i) La suite de polynômes (P_m) converge simplement sur $\mathbb{R}$.

(ii) La suite de polynômes (P_m) converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

(iii) $\forall\, 0 \leq k \leq n$, la suite réelle $(a_{mk})_{m \in \mathbb{N}}$ converge.

Mines-Ponts PSI 2019 (exponentielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ surjective) ✷

Ex 27

1) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$. Montrez que la suite (E_n) est convergente.

2) Montrez que pour tout $A \in \mathcal{G}l_2(\mathbb{C})$, il existe $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\sum_{k=0}^{n} \frac{B^k}{k!} \longrightarrow A$.

Mines-Ponts PSI 2018 (exponentielle de matrice 2×2) ☜ ✷

Ex 28 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

1) Montrez que la série $\sum_k \frac{A^k}{k!}$ converge. On note $\exp(A)$ sa somme.

2) Montrez que $\mathrm{Sp}\left(\exp(A)\right) = \exp\left(\mathrm{Sp}(A)\right)$.

3) Calculez $\exp(A)$ lorsque A est une matrice de rotation.

4) L'application $A \longrightarrow \exp(A)$ est-elle injective? surjective?

Continuité et limites

Ex 29 ✌Soit E un espace euclidien. Montrez que $x \longrightarrow \left(x \mid y\right)$ est lipschitzienne (donc continue).

Ex 30 ✌Soient f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1) On suppose f lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrez $\exists A, B \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}\quad |f(x)| \leq A|x| + B$

2) On suppose ici f dérivable sur $\mathbb{R}$. Etablir f est lipschitzienne sur $\mathbb{R} \Longleftrightarrow f'$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Centrale PSI 2021 (fonction matricielle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) ✷ ☜

Ex 31 Soit $A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de classe C^1.

1) Supposons, dans cette question, qu'il existe $S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ de classe C^1 telle que $S^{-1}(t)A(t)S(t) = A(0)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrez il existe $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$.

2) Supposons, dans cette question, qu'il existe $B : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ continue telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, A'(t) = B(t)A(t) - A(t)B(t)$. Montrez, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $A(t)$ est semblable à $A(0)$.

Ex 32 On munit $E = \mathcal{C}^0\left(\,[0,1]\,, \mathbb{R}\right)$ de la norme de la convergence en moyenne, cad $N(f) = \int_0^1 |f|$.

1) Etablir que la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{R}$ qui à f associe $f(0)$ n'est pas continue. (*Indication* : On pourra considérer la suite de fonctions f_n définie par f_n est affine par morceaux joignant les points $(0,1)$ $(1/n,0)$ $(1,0)$)

2) En munissant E de la norme infinie usuelle (norme de la convergence uniforme), montrez, à contrario, que l'application linéaire φ est continue (*indication :* on pourra montrer lipschitzienne)

Ex 33 Etudiez l'existence de la limite en $(0,0)$:

$$k(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^2} \qquad h(x,y) = \frac{\sinh x - \sinh y}{x-y}$$

Ex 34 Soi f une application linéaire d'un evn $(E, \|.\|_E)$ vers un evn $(F, \|.\|_F)$. Montrez l'équivalence de :

(i) f est continue ***(ii)*** f est continue en 0. ***(iii)*** f est lipschitzienne. ***(iv)*** il existe $k > 0$ tq $\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$. ***(v)*** f est bornée sur la boule-unité.

Mines-Telecom PSI 2022 (continuité fonctions $f(x,y)$)

Ex 35 Etudiez la continuité en $(0,0)$ de chacune des fonctions suivantes, toutes supposées nulles en $(0,0)$ et définies pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par : $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$ $\quad g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ $\quad h(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^2+y^2+xy}$

Topologie

Ouvert : $O \subset E$ evn est un ***ouvert*** ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
- **(i)** Tout élément de O est ***intérieur*** à O.
- **(ii)** $\forall x \in O, \exists r > 0$ tq $B(x,r) \subset O$.

Fermé : $F \subset E$ evn est un ***fermé*** ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
- Le complémentaire de F (dans E) est un ouvert de E
- ***Caractérisation séquentielle :*** pour toute suite d'éléments (f_n) de F convergente (vers un x), alors ***nécessairement*** $x \in F$.
- Tout élément ***adhérent*** à F est ***dans*** F.

Convexité : $C \subset E$ est ***convexe*** ssi $\forall x, y \in E$, tout le segment $[x,y] = \{\, tx + (1-t)y,\ t \in [0,1]\,\} \subset C$

Densité : $A \subset E$ evn est dite ***dense dans*** E ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
- L'adhérence de A contient E : $\overline{A} \supset E$.
- $\forall a \in A, \forall r > 0$, il existe $x \in E$ tq $x \in B(a,r)$ cad $\|x-a\| < r$.
- ***Caractérisation séquentielle :*** pour tout $x \in E$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

Ex 36 ✌Soient f, g continues de E dans F, evns de dim. finies. Montrez $\{x \in E,\ f(x) = g(x)\}$ est un fermé de E.

Ex 37 Soit $A = [0,1[\ \cup\ ]1,2[\ \cup ([3,4] \cap \mathbb{Q}) \cup \{5\}$.

1) Montrez que ces 7 parties sont 2 à 2 distinctes : $A,\ \mathring{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}},\ \overline{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}}$

2) Par contre, montrez que $\overline{\mathring{\overline{\mathring{A}}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{\overline{A}}}}$ sont égales à 2 des précédentes.

Ex 38 ✌Montrez que $O =]-1,1[\ \times \mathbb{R} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |1 < |x| < y^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Centrale PC 2018 (fermeture matrice 2×2 de valeurs propres de module 1) ✷

Ex 39 Montrez que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres sont de module 1 est un fermé

Ex 40 Soit A une partie non vide et convexe d'un evn E. Montrez que $\mathring{A}$ et $\overline{A}$ sont convexes.

Ex 41 Soit E un evn de dimenssion finie et F un sous-ev de E. Montrez $\mathring{F} = \emptyset$ et $\overline{F} = F$

Mines-Ponts PSI 2022 (adhérence d'un hyperplan) ✷ ✍

Ex 42 Soient E un evn et F un sev de$E$.

1) Montrez que l'adhérence de F est un sev de E

2) Que dire de l'adhérence de F lorsque F est un hyperplan? On commencera par le cas E de dimension finie.

3) [**Pas dans l'oral :** Dans $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, on considère l'hyperplan H des fonctions $f \in E$ vérifiant $f(0) = 0$. En considérant les normes usuelles $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$, établir que H est fermé pour l'une et dense pour l'autre.]

Ex 43 On se place dans $E = M_n(\mathbb{C})$. Montrez l'ens. des matrices diagonalisables est dense dans E (cad $\overline{D} = E$).
Indication : utilisez toute matrice est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

Ex 44 Soit E un evn et $F \subset E$. Montrez F est un fermé d'intérieur vide ssi $E \setminus F$ est un ouvert dense.

Mines-Ponts PSI 2019-2018 (ouvert union infinie de fermés) ✷

Ex 45 Soit E un evn de dim. finie et A une partie ouverte de E. Montrez que $U = \bigcup_{a\in A} \overline{B(a,1)}$ est un ouvert.

Ex 46

1) Montrez que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite de matrices inversibles.

2) Soit A inversible et B quelconque. Montrez AB et BA ont même polynôme caractéristique. En déduire que cela reste vrai pour A quelconque.

Ex 47 ✷ Montrez que l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ de rang $\geq k$ est un ouvert. En déduire que si une suite de matrices (A_n) converge vers A, alors pour n assez grand $\operatorname{rg} A_n \geq \operatorname{rg} A$.

Centrale PSI 2013 (convexité)

Ex 48 Soit A une partie non vide d'un espacez vectoriel normé E de dimension finie.
Pour $x \in E$, on pose $d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$. Soient $R > 0$ et $A(R) = \Big\{x \in E,\ d(x,A) \leq R\Big\}$.
Montrez que si A est convexe, alors $A(R)$ est convexe et fermé.

Ex 49 Soit (E,N) un evn et $A \subset E$. On définit $d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x - a\|$.

1) Montrez que $x \to d(x,A)$ est continue. (*montrez qu'elle est lipschitzienne*)

2) On suppose A fermé. Montrez $d(x,A) = 0 \iff x \in A$. Et si A n'est pas fermé?

Ex 50 ✷ Soient A et B deux sous-ensembles d'un evn E de dimension finie. Etudiez les implications : A ouvert ou B ouvert $\Longrightarrow A+B$ ouvert A fermé et B fermé $\Longrightarrow A+B$ fermé A compact et B compact $\Longrightarrow A+B$ compact