Quelques corrections sur les Equations Différentielles

CCINP BQMP 2023->2021 (équation différentielle d'ordre 1) ✌

Ex 2 Soient les deux équations différentielles : $2xy' - 3y = 0 \quad (H) \quad 2xy' - 3y = \sqrt{x} \ (E)$

1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Cet exercice fait partie de la banque d'exos CCINP MP, n°42.

Vous pouvez regarder la correction fournie par le concours : Banque CCINP MP 2023 avec corrigés

Ex 3 ✷ Cherchez les solutions sur $\mathbb{R}$ de $|x|y' + (x-1)y = x^2$

On cherche d'abord les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, là où $|x|$ ne s'annule pas.

Sur $\mathbb{R}^{+*}$, on intègre $xy' + (x-1)y = x^2$. L'équation homogène s'intégre en :

$$y = C\exp\left(\int_{.}^{x} \frac{1-t}{t}\,dt\right) = C\exp\left(\ln x - x\right) = Cxe^{-x}$$

Pour trouver une solution particulière, on peut appliquer la méthode de la variation de la constante, mais on peut aussi remarquer que x convient. La solution générale sur $\mathbb{R}^{+*}$ est donc $\boxed{y = Cxe^{-x} + x}$

Sur $\mathbb{R}^{-*}$, on intègre $-xy' + (x-1)y = x^2$. L'équation homogène s'intègre similairement en $y = C\frac{1}{x}e^x$. on trouve une solution particulière par la méthode de la variation de la constante, soit sous la forme $y = C(x)\frac{1}{x}e^x$ qui est solution sur $\mathbb{R}^{-*}$ ssi :

$$-xC'(x)\frac{1}{x}e^x + C(x) \times 0 = x^2 \iff C'(x) = -x^2e^{-x} \iff C(x) = -\int_{.}^{x} t^2e^{-t}\,dt$$

Plutôt que d'effectuer 2 ipp, il est un peu plus efficace de chercher une primitive de la forme $(at^2 + bt + c)e^{-t}$:

$$((at^2 + bt + c)e^{-t})' = e^{-t}\big(-at^2 + (2a-b)t + b - c\big) = t^2e^{-t} \iff \left\{\begin{array}{ccc} -a & = & 1 \\ 2a-b & = & 0 \\ b-c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} a & = & -1 \\ b & = & -2 \\ c & = & -2 \end{array}\right.$$

On termine par $C(x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$. La solution générale sur $\mathbb{R}^{-*}$ est $\boxed{C\frac{1}{x}e^x + x + 2 + \frac{2}{x}}$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont ***nécessairement*** obtenues par ***recollement*** C^1 de solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ et de solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$. En effet, si y est solution sur $\mathbb{R}$, elle est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc $\forall x > 0, y = Cxe^{-x} + x$ et elle est solution sur $\mathbb{R}^{-*}$, soit $\forall x < 0, y = D\frac{1}{x}e^x + x + 2 + \frac{2}{x}$ et comme elle est C^1 sur $\mathbb{R}$, elle est continue, dérivable et C^1 « *en* » 0.

$\lim_{0_+} y = \lim_{0_+} Cxe^{-x} + x = 0$ et $\lim_{0_-} y = \lim_{0_-} D\frac{1}{x}e^x + x + 2 + \frac{2}{x}$ est finie ssi $D = -2$, et alors elle vaut 0, car un petit dl (développement asymptotique en fait) en 0 (textbf*à gauche* donne :

$$y(x) = D\frac{1}{x}\big(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\big) + x + 2 + \frac{2}{x} = (D+2)\frac{1}{x} + (D+2) + (\frac{D}{2}+1)x^2 + o(x^2)$$

Conclusion : toutes les solutions à droite (tout C) se recollent ***par continuité*** avec la seule solution à gauche définie par $D=-2$ et $y(0)=0$

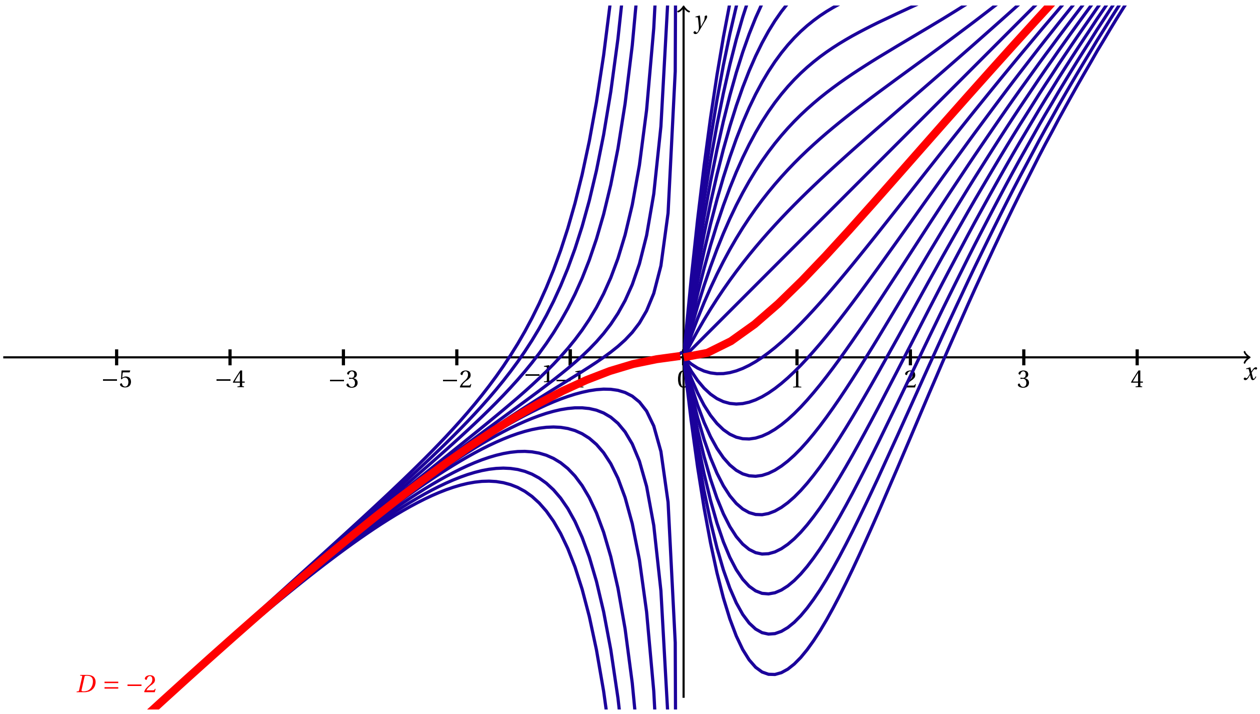
Etudions la dérivabilité en 0 de ces recollements. On effectue cette fois un petit dl ***à droite*** en 0 qui donne, à l'ordre 1, $y(x)=(C+1)x+o(x)$. Le recollement est dérivable ssi la dérivée à droite est égale à dérivée à gauche, cad ssi $C+1=\frac{D}{2}+1=0$ ssi $C=-1$. C'est alors la fonction $-xe^{-x}+x$ recollée en 0 avec $-2\frac{1}{x}e^{x}+x+2+\frac{2}{x}$ (voir dessin courbe en rouge)

Reste à vérifier que ce recollement vérifie l'équation différnetielle, mais en 0 seulement :

$$\left[|x|y'+(x-1)y-x^2\right](x=0)=0\times 0+(-1)\times 0-0^2=0$$

On note que l'ensemble des solutions ***sur*** $\mathbb{R}$est réduit à une seule fonction. C'est un translaté de l'ev nul.

Je vous représente sur un dessin quelques solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ et $\mathbb{R}^{+*}$ où l'on peut constater qu'il y a effectivement (visuellement) un seul recollement possible par dérivabilité et plusieurs par continuité :



Ex 4 ✌ Soit $a:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ continue et intégrable. Etablir que les solutions de $y'-a(t)y=0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

Equation différentielle linéaire. Solutions sur $\mathbb{R}^+$, puisque le coefficient « *dominant* » 1 ne s'annule pas et a est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

Les solutions vérifient $\forall t\in\mathbb{R}^+,\ y(t)=C\exp\left(\int_0^t a(u)\,\mathrm{d}u\right)$. On écrit :

$$\left|y(t)\right|=\left|C\right|\exp\left(\int_0^t a(u)\,\mathrm{d}u\right)\overset{(1)}{\leq}\left|C\right|\exp\left|\int_0^t a(u)\,\mathrm{d}u\right|\overset{(2)}{\leq}\left|C\right|\exp\left(\int_0^t\left|a(u)\right|\,\mathrm{d}u\right)\overset{(3)}{\leq}\left|C\right|\exp\left(\int_0^{+\infty}\left|a(u)\right|\,\mathrm{d}u\right)\overset{(4)}{<}+\infty$$

- **(1)** Croissance de l'exponentielle et inégalité $y\leq|y|$ valable pour tout réel y.
- **(2)** Croissance de l'intégrale, pour toute fonction f intégrable sur I : $\left|\int_I f\right|\leq\int_I|f|$
- **(3)** Croissance de exponentielle et, par ***positivité*** de $|a(u)|$, croissance de $x\longrightarrow\int_0^x|a(u)|\,\mathrm{d}u$

- **(4)** Intégrabilité de a sur $\mathbb{R}^+$

Méthode alternative : On pouvait aussi dire que $y(t)$ est ***continue*** (car C^1, c'est du cours) sur $\mathbb{R}^+$ et la limite est ***finie*** en $+\infty$ puisque $\lim_{+\infty} y(t) = C\exp\left(\int_0^t a(u)\,\mathrm{d}u\right)$, par ***intégrabilité***.
Ce résultat est limite-cours et devrait être redémontré : si $\lim_{+\infty} y = \ell$ ***fini***, propriété de limite, il existe $A > 0$ tq sur $\left[A, +\infty\right[$, $|y(t)| \leq |\ell| + 1$ (***Attention!*** aux valeurs absolues) Puis sur le ***segment*** $[0, A]$, par ***continuité***, y est bornée par M (borne atteinte d'ailleurs). Finalement $y(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par $\max(M, |\ell|+1)$

CCP PSI 2007 (équation fonctionnelle avec dérivée)

Ex 5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -f(\alpha - x)$

Analyse :

On peut commencer par remarquer que l'ensemble des solutions forme un $\mathbb{R}$-ev (sev de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est immédiat). On remarque aussi que, ***si*** f C^1 est solution, f' est C^1, donc f est C^2 (par récurrence, on a même f C^∞). On ***peut*** redériver :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = --f'(\alpha - x) = f'(\alpha - x) = -f(\alpha - (\alpha - x)) = -f(x)$$

f est donc solution ***sur*** $\mathbb{R}$ de $y'' + y = 0$ qui s'intègre immédiatement en $y = A\cos x + B\sin x = A\cos(x + \phi)$, en utilisant plutôt l'écriture avec le déphasage, plus pratique pour la réciproque.

Synthèse :

Réciproquement, f convient ssi, en se rappelant $\sin x = \sin y$ ssi $x = y$ ou $x = \pi - y$ à 2π près, pour tout x :

$-A\sin(x+\phi) = -A\cos(\alpha - x + \phi) = -A\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha + x - \phi) \iff \forall x, x + \phi \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha + x - \phi\,[\mathbf{mod}\,2\pi]$ ***ou*** $\pi - x - \phi \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha + x - \phi\,[\mathbf{mod}\,2\pi]$

La première « *égalité* » fournit $2\phi \equiv \frac{\pi}{2} - \alpha\,[\mathbf{mod}\,2\pi]$ soit $\phi = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi$, la deuxième amène à $2x$ égal à une constante, à 2π près, ce qui évidemment est impossible.

Conclusion : Les solutions sont les $A\cos\left(x + \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$, qui forment bien un $\mathbb{R}$-ev de dimension 1.

Mines-Ponts PSI 2024-2022 | Centrale PSI 2018 (équation différentielle d'ordre 1) ✷

Ex 7

1) Montrez que l'équation $(E) : x^2y' + y = x^2$ n'admet pas de solution développable en série entière.

2) Cherchez les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$

3) Montrez il existe une unique solution tendant vers 0 en 0^+ [**2022 :** précisez les solutions qui admettent une limite finie en 0.]

1) L'équation homogène associée s'intègre immédiatement sur $\mathbb{R}^{+*}$ en $y = Ce^{1/x}$. Méthode de variation de la constante :

$$x^2C'(x)e^{1/x} + C(x) \times 0 = x^2 \iff C'(x) = e^{-1/x} \iff C(x) = \int_1^x e^{-1/t}\,dt$$

Cette fonction-intégrande n'a pas de primitive qui s'exprime par des fonctions connues (de votre programme en tous cas). La solution générale ***sur*** $\mathbb{R}^{+*}$ est donc $\boxed{y = Ce^{1/x} + e^{1/x}\int_1^x e^{-1/t}\,dt}$

Comme deux solutions ***distinctes*** diffèrent d'un $ke^{1/x}$ (avec $k \neq 0$), qui a pour limite $\pm\infty = \text{signe}(k)\infty$ en 0_+, il y a ***unicité*** d'une solution qui a une limite finie en 0_+

Reste à établir l'existence pour un certain C. On peut commencer par remarquer que $e^{-1/t}$ est ***intégrable*** en 0, puisque on peut prolonger par continuité, $\lim_{0_+} e^{-1/t} = e^{-\infty} = 0$. En écrivant $y = e^{1/x}\left(C + \int_1^x e^{-1/t}\,dt\right)$, on voit que la seule constante possible est celle qui donne la nullité du second membre en 0, soit $C = -\int_1^0 e^{-1/t}\,dt$ ce qui, au passage, reprouve l'unicité.

$$0 \leq |y(x)| = \left| e^{1/x} \int_0^x e^{-1/t}\,dt \right| \leq e^{1/x} x e^{-1/x} = x$$

On a utilisé $t \longrightarrow e^{-1/t}$ croissante sur $[0, x]$, soit majorable par $e^{-1/x}$. Cet encadrement établit l'existence d'une limite finie et nulle en 0 de cette solution.

2) Si une solution est développable en série entière, elle a en particulier une limite finie en 0_+. Il en existe donc au plus une, par restriction à droite, celle de la question 1. Comme il est « *difficile* » de développer $e^{-1/t}$ en série entière en 0_+ dans l'intégrale (impossible en fait, car toutes ses dérivées n-i-èmes en 0 sont nulles, je vous laisse y réfléchir), on va tout simplement chercher les séries entières solutions de (E), par la méthode usuelle.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon R est solution sur $]-R, R[$, sachant qu'on peut y dériver terme à terme, ssi :

$$x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = x^2 \iff a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} x^n\big((n-1)a_{n-1} + a_n\big) = x^2$$

Ceci équivaut, par unicité du DSE, à $a_0 = 0$, $0a_0 + a_1 = 0$, $a_1 + a_2 = 1$ et $\forall n \geq 3, a_n = -(n-1)a_{n-1}$. Ceci équivaut encore à $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_n = (-1)^n(n-1)!$. Comme le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 3}(-1)^n(n-1)!x^n$ est nul (par d'Alembert), aucune solution n'est développable en série entière.

Ex 14 Résoudre $(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x+1)y = 0$ (E) en effectuant le changement de fonction inconnue $z = (1+e^x)y$

Equation différentielle linéaire. Comme $1+e^x$ ne s'annule pas, on recherche les solutions sur $\mathbb{R}$ et, $z = (1+e^x)y$ ssi $y = \frac{1}{1+e^x}z$. y est C^2 sur $\mathbb{R}$ ssi z est C^2 sur $\mathbb{R}$. On calcule, en utilisant la formule de Leibniz pour le calcul de la dérivée seconde, c'est un peu plus efficace que de redériver y' :

$$y' = \frac{1}{1+e^x}z' + \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}z$$

$$y'' = \left(\frac{1}{1+e^x}z\right)'' = 1\,\frac{1}{1+e^x}z'' + 2\left(\frac{1}{1+e^x}\right)'z' + 1\left(\frac{1}{1+e^x}\right)''z = \frac{1}{1+e^x}z'' - 2\frac{e^x}{(1+e^x)^2}z' + \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}z$$

Je ne vous ai pas mis le détail de $\left(\frac{1}{1+e^x}\right)''$. Puis, y est solution ***sur*** $\mathbb{R}$ ssi z est solution ***sur*** $\mathbb{R}$ de :

$$(1+e^x)\Big(\frac{1}{1+e^x}z'' - 2\frac{e^x}{(1+e^x)^2}z' + \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}z\Big) + 2e^x\Big(\frac{1}{1+e^x}z' + \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}z\Big) + (2e^x+1)\Big(\frac{1}{1+e^x}z'\Big) = 0$$

$$\iff \frac{1+e^x}{1+e^x}z'' + \Big(-2\frac{(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^2} + \frac{2e^x}{1+e^x}\Big)z' + \Big(\frac{e^x(e^x-1)(1+e^x)}{(1+e^x)^3} + \frac{-2e^{2x}}{(1+e^x)^2} + \frac{2e^x+1}{1+e^x}\Big)z = 0$$

$$\iff z'' + 0z' + \frac{e^x(e^x-1) - 2e^{2x} + (2e^x+1)(1+e^x)}{(1+e^x)^2}\,z = 0 \iff \boxed{z'' + z = 0}$$

Cette dernière équation s'intègre immédiatement en $z = A\cos x + B\sin x$, puis $\boxed{y = \frac{1}{1+e^x}(A\cos x + B\sin x)}$

On a bien une structure de $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 des solutions ***sur*** $\mathbb{R}$.

Ex 16 Chercher les séries entières solutions puis résoudre sur $]-1,1[$: $4(1-t^2)y''-4ty'+y=0$.

$y(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, de rayon de convergence R, est ***solution sur*** $]-R,R[$ ssi, sachant qu'on peut y dériver terme à terme,

$$\begin{aligned}
&\forall t\in\,]-R,R[\,,\ 4(1-t^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}-4t\sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0\\
&\iff 4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2}-4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n}-4\sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0\\
&\iff 4\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^{n}-4\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n}-4\sum_{n=0}^{+\infty} na_n t^{n}+\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n=0\\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(4(n+2)(n+1)a_{n+2}-4n(n-1)a_n-4na_n+a_n\Big)t^n=0\\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(4(n+2)(n+1)a_{n+2}-(4n^2-1)a_n\Big)t^n=0
\end{aligned}$$

Par unicité du DSE, il vient l'identification des coefficients avec 0 et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=\dfrac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)}a_n$.
On résout alors les termes pairs jusqu'à a_0, qui est ***indéterminé par ces conditions***, et les termes impairs jusqu'à a_1, qui est indéterminé lui aussi par ces conditions :

$$a_{2n+2}=\frac{(4n+1)(4n-1)}{4(2n+2)(2n+1)}a_{2n}=\frac{(4n+1)(4n-1)(4n-3)(4n-5)}{4^2(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)}a_{2n-2}=\cdots=\frac{(4n+1)(4n-1)(4n-3)(4n-5)\dots1\times(-1)}{4^{n+1}(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)\dots2\times1}a_0$$

On a utilisé le ***dernier terme*** $a_2=\frac{1\times-1}{4\times2\times1}a_0$. A noter qu'il serait plus rigoureux de le vérifier par récurrence. On l'écrit sous forme de factorielles, en « *rajoutant* » en haut les termes pairs manquants et en les « *enlevant* » en bas (***Attention!*** on ramène à a_{2n}, on décale d'abord n de -1) :

$$a_{2n}=\frac{-(4n-3)!}{(4n-4)\dots(4)(2)\,4^n(2n)!}a_0=\frac{-(4n-3)!}{2^{2n-1}(2n-2)!\,4^n(2n)!}a_0=\frac{-4(4n-3)!}{(2n-2)!4^{2n}(2n)!}a_0$$

On vérifie que la série entière $a_0\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}t^{2n}$ existe bien en vérifiant $R\neq0$ par d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|t^2|\frac{(4n+1)!4^{2n}(2n-2)!(2n)!}{(4n-3)!4^{2n+2}(2n)!(2n+2)!}=|t^2|\frac{(4n+1)(4n)(4n-1)(4n-2)}{16(2n)(2n-1)(2n+2)(2n+1)}\sim|t^2|\frac{4^4n^4}{16\times16n^4}\xrightarrow{n\to+\infty}|t|^2$$

On en déduit que le rayon vaut $R=\sqrt{1}$, soit la série entière ***est solution sur*** $]-1,1[$. Calcul analogue pour les termes impairs, je ne mets pas les détails, on trouve les séries entières $a_1\sum_{n=1}^{+\infty}\dots t^{2n+1}$, de rayon 1.

Conclusion : comme l'ev trouvé est de dimension 2 (et l'équation est homogène d'ordre 2), ***toutes*** les solutions ***sur*** $]-1,1[$ sont trouvées et sont, donc, toutes développables en série entière.

Remarque : Si on reprend la récurrence des termes pairs, qui va de 2 en 2, il peut être intéressant de la faire aller de 1 en

1, comment? En divisant par 2 … Pourquoi faire? Regardez et essayez de suivre …

$$a_{2n+2}=\frac{(4n+1)(4n-1)}{4(2n+2)(2n+1)}a_{2n}=\frac{\overbrace{(2n+\frac{1}{2})(2n-\frac{1}{2})}^{\xrightarrow{-1}}}{(2n+2)(2n+1)}a_{2n}=\frac{(2n+\frac{1}{2})(2n-\frac{1}{2})(2n-\frac{3}{2})(2n-\frac{5}{2})}{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)}a_{2n-2}$$

$$=\cdots=\frac{\overbrace{(2n+\frac{1}{2})(2n-\frac{1}{2})(2n-\frac{3}{2})(2n-\frac{5}{2})\ldots\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}}^{2n+2\text{ termes}}}{(2n+2)(2n+1)(2n)(2n-1)\ldots 2\times 1}a_0=\frac{(-1)^{2n+2}(-2n-\frac{1}{2})(-2n+\frac{1}{2})(-2n+\frac{3}{2})(-2n+\frac{5}{2})\cdots-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{(2n+2)!}a_0$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times\ldots(-2n+\frac{5}{2})(-2n+\frac{3}{2})(-2n+\frac{1}{2})(-2n-\frac{1}{2})}{(2n+2)!}a_0$$

$$\Longrightarrow a_{2n}=\frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}\times\ldots(-2n+\frac{5}{2})(-2n+\frac{3}{2})}{(2n)!}a_0=\frac{\frac{1}{2}\times-\frac{1}{2}\times-\frac{3}{2}\times\ldots(\frac{1}{2}-2n+2)(\frac{1}{2}-2n+1)}{(2n)!}a_0=\boxed{\binom{1/2}{2n}a_0}$$

On a utilisé le coefficient binomial « *étendu* » (qui n'est pas au programme) mais qui est bien pratique pour reconnaître certaines expressions : ici on reconnaît donc, d'après la formule du binôme généralisé (dont je vous ai déjà parlé en cours), $(1+t)^{1/2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/2}{n}t^n$, la ***partie paire*** de cette fonction (car il n'y a que les $2n$), soit $\frac{1}{2}\big(f(t)+f(-t)\big)=\frac{1}{2}\big(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\big)$. Bref, les solutions sont, en fait, ***sur*** $]-1,1[$:

$$a_0\frac{1}{2}\big(\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}\big)+a_1\frac{1}{2}\big(\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}\big)=\frac{a_0+a_1}{2}\sqrt{1+t}+\frac{a_0-a_1}{2}\sqrt{1-t}=\boxed{A\sqrt{1+t}+B\sqrt{1-t}}$$

CCINP PSI 2022-2021 (équation différentielle linéaire d'ordre 2)

Ex 17 On considère l'équation différentielle $(E) : (x^2-1)y''+2xy'-2y=0$ sur $]-1,1[$.

1) Déterminez les solutions polynomiales de (E).

2) Trouvez une équation différentielle (E') vérifiée par $x\longrightarrow z(x)=\frac{1}{x}y(x)$.

3) Cherchez a,b,c tq $\frac{2-4x^2}{x(x^2-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$.

4) Résoudre (E'). En déduire toutes les solutions de (E) sur $]-1,1[$.

1) Je rappelle qu'il faut prêter immédiatement attention si le « *coefficient dominant* » s'annule, ici x^2-1, cela pourrait mettre en défaut les théorèmes. On se ***place donc ic***i sur un des intervalles $]-\infty,-1[$ ***ou*** $]-1,1[$ ***ou*** $]1,+\infty[$.

Une méthode pourrait être de chercher d'abord toutes les séries entières $\sum a_nx^n$ solutions puis de déterminer celles telles que a_n est nul à partir d'un certain rang, mais c'est en général peu efficace. Procédons comme suit : cherchons d'abord les degrés (éventuels) des polynômes solutions en raisonnant sur le terme de plus haut degré du polynôme solution : a_nx^n (donc $a_n\neq 0$).

- Le terme de plus haut degré de $(X^2-1)P''(X)$ est $n(n-1)a_nX^n$.
- Le terme de plus haut degré de $2XP'(X)$ est $2na_nX^n$.
- Le terme de plus haut degré de $-2P(X)$ est $-2a_nX^n$

Par conséquent, on a $n(n-1)a_nX^n+2a_nX^n-2a_nX^n=(n^2+n-2)a_nX^n=0$. Ceci amène $n=1$. On cherche alors les polynômes solutions sous la forme $aX+b$ et on arrive (je ne mets pas les détails ici) à aX.

2) Je rappelle la méthode de Lagrange, qui est que lorsque l'on connaît une solution f de ***l'équation homogène*** d'une équation différentielle linéaire du 2e ordre (comme ici), alors on effectue le changement de variable $y=fz$ dans l'équation complète ***avec second membre***. Ceci aboutira à une équation incomplète du 2e ordre, un 1er ordre en z', qui elle, est « *résolvable* » par double intégration. Cette méthode n'est pas stricto-sensu au programme; il est néanmoins mieux, pour un élève ambitieux, de la connaître. A noter que l'énoncé, ici, vous la donne, cad donne le changement de variables, mais à l'envers….

$$\begin{aligned} y &= xz & \times(-2) \\ y' &= xz' + z & \times 2x \\ y'' &= xz'' + 2xz' & \times(x^2-1) \end{aligned}$$

On note que ce changement de fonction inconnue nécessite, pour un raisonnement propre, « *d'enlever* » 0. On se place donc sur l'un des 4 intervalles $]-\infty,-1[$ ***ou*** $]-1,0[$ ***ou*** $]0,1[$ ***ou*** $]1,+\infty[$. y est donc solution de (E) ***sur un de ces intervalles*** ssi z y est solution de :

$$(x^2-1)(xz''+2xz')+2x(xz'+z)-2xz=0 \iff x(x^2-1)\big(z'\big)' + (4x^2-2)\,z' = 0 \quad (E')$$

3) $\dfrac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \dfrac{-2}{x} + \dfrac{-1}{x-1} + \dfrac{-1}{x+1}$

4) Une première intégration ((E') équation différentielle linéaire du 1$^{\text{er}}$ ordre en z') en :

$$\begin{aligned} z' &= C\,\exp\Big(\int \frac{2-4x^2}{x(x^2-1)}\,dx\Big) = C\,\exp\Big(\int\Big(\frac{-2}{x}+\frac{-1}{x-1}+\frac{-1}{x+1}\Big)\,dx\Big) \\ &= C\,\exp\Big(-2\ln|x| - \ln|x-1| - \ln|x+1|\Big) = C\,\frac{1}{x^2\,|x^2-1|} \end{aligned}$$

Justifions proprement que l'on peut « *enlever* » la valeur absolue : sur chacun des 4 intervalles (d'où leur importance ici aussi) le signe de x^2-1 est constant. On a donc $C\times$ un signe constant qui est une constante quelconque. On l'appellera C aussi par commodité. Pour une 2$^{\text{e}}$ intégration, on re-décompose en éléments simples, ici c'est un peu plus dur (racine multiple) je mets un peu plus de détails :

$$\frac{1}{x^2\,(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1}$$

en $\times x^2$ puis valeur en $x=0$, on trouve $b=-1$. Méthode usuelle identique pour $(x-1)$ et $(x+1)$, on arrive à $c=\frac{1}{2}$ et $d=-\frac{1}{2}$. Pour trouver la dernière valeur, on pourrait prendre une valeur, $x=2$ étant le plus simple mais on va utiliser la méthode efficace : on $\times x$ et on prend la limite en $+\infty$: $0 = a+0+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$, soit $a=0$.

$$z' = C\Big(\frac{-1}{x^2}+\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1/2}{x+1}\Big) \quad\Longrightarrow\quad z = C\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|\Big) + D$$

Ne pas oublier de mettre des valeurs absolues lorsque l'on primitive en ln.

Finalement $\boxed{y = C\Big(1+\frac{1}{2}x\ln\Big|\frac{x-1}{x+1}\Big|\Big) + Dx}$

Attention! que ces solutions ne sont valides, à priori, que sur l'un des 4 intervalles $]-\infty,-1[$ ***ou*** $]-1,0[$ ***ou*** $]0,1[$ ***ou*** $]1,+\infty[$ (ou les sous-intervalles). On retrouve bien une structure de $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

Ensea PSI 2021 (série entière solution équation différentielle)

Ex 19 Déterminez les solutions de $xy''-(x+1)y'+y=0$ (E) développables en série entière.

Equation différentielle linéaire. Solutions « *immédiates* » sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon R est solution sur $\left]-R,R\right[$ ssi, sachant qu'on peut y dériver terme à terme :

$$\begin{aligned}
& x\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - (x+1)\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
\iff & \sum_{n=-1}^{+\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=-1}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\
\iff & \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)(n-1)a_{n+1} - (n-1)a_n\Big) x^n = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} 0x^n \\
\iff & \forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(n-1)a_{n+1} - (n-1)a_n = 0
\end{aligned}$$

On a utilisé l'***unicité d'un DSE*** pour identifier les coefficients de part et d'autre de l'égal.

Attention! à ne pas « *enlever* » le $n-1$. Il faut distinguer proprement ce cas $n=1$. On regarde les cas suivants :

- $n=0$ donne $a_1 - a_0 = 0$
- $n=1$ donne rien ...
- $\forall n \geq 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1}a_n$. Le dernier est $a_3 = \frac{1}{3}a_2$. Il « *manque donc un 2* » dans la factorielle et $a_{n+1} = \frac{2}{(n+1)!}a_2$

On a donc 2 indéterminée a_0 et a_2. C'est ***important*** car c'est, in fine, ce qui donne la dimension de l'ev trouvé. Les séries entières solutions sur $\left]-R,R\right[$ ou mieux, les fonctions développables en série entière sont :

$$a_0(1+x) + a_2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n!}x^n = a_0(1+x) + 2a_2\Big(e^x - 1 - x\Big) = A(x+1) + Be^x$$

Le rayon de convergence est bien $R \neq 0$ car clairement $R = +\infty$.

Remarque : A-t-on trouvé ***toutes*** les solutions? La structure de $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 nous amène que l'on a bien trouvé toutes les solutions ***mais seulement sur*** $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$. Sur $\mathbb{R}$, il y a celles-là, mais il « *pourrait* » y en avoir d'autres, les différents recollements (jusqu'à la double dérivabilité) de ***ces*** solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ (2 constantes A et B) et ***ces*** solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ (2 autres constantes A' et B'), la dimension maximum étant donc de 4 (puisque au maximum 4 indéterminées possibles et d'ailleurs au minimum 2). Mais ces autres recollements, s'ils existent, ne seront pas développables en série entière. Vous suivez? En fait, il n'y en a pas d'autres...

Ex 20 Résoudre $y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{y}{(1+x^2)^2} = 0$ (E) avec le changement de variable $t = \arctan x$

Equation différentielle linéaire. Solutions immédiatement ***sur*** $\mathbb{R}$ car les coefficients y sont continues et le coefficient « *dominant* » 1 ne s'y annule pas. Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont en fait C^∞ car les coefficients le sont.

$t = \arctan x \implies x = \tan t$ (la réciproque est fausse). On a donc aussi, parallèlement au changement de variable, un changement de fonction inconnue : $y^*(t) = y(x) = y(\tan t)$ ssi $y(x) = y^*(\arctan x)$.

y C^2 solution ***sur*** $\mathbb{R}$ de (E) ***ssi*** z C^2 solution ***sur*** $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ de (E') que l'on va calculer ci-après.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy^*}{dt}\frac{dt}{dx}=\boxed{\frac{1}{1+x^2}\frac{dy^*}{dt}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+x^2}\frac{dy^*}{dt}\right]=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{1+x^2}\right]\frac{dy^*}{dt}+\frac{1}{1+x^2}\frac{d}{dx}\left[\frac{dy^*}{dt}\right]$$

$$=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\frac{dy^*}{dt}+\frac{1}{1+x^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{dy^*}{dt}\right]\frac{dt}{dx}=\boxed{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\frac{dy^*}{dt}+\frac{1}{(1+x^2)^2}\frac{d^2y^*}{dt^2}}$$

On obtient donc l'équation (E') vérifiée par $y^*(t)$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$:

$$\left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\frac{dy^*}{dt}+\frac{1}{(1+x^2)^2}\frac{d^2y^*}{dt^2}\right)+\frac{2x}{1+x^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\frac{dy^*}{dt}\right)+\frac{1}{(1+x^2)^2}y^*=0$$

$$\iff\frac{1}{(1+x^2)^2}\frac{d^2y^*}{dt^2}+\frac{1}{(1+x^2)^2}y^*=0\iff\boxed{\frac{d^2y^*}{dt^2}+y^*=0\ (E')}$$

Cette équation homogène à coefficients constatns s'intègre immédiatement en $y^*(t)=A\cos t+B\sin t$, puis $y(x)=A\cos(\arctan x)+B\sin(\arctan x)$ mais ***Attention!*** ces quantités « *s'arrangent* », vu en Sup (ainsi que par exemple aussi $\sin(\arccos x),\cos(\arcsin x)\dots$). On trouve 2 équations vérifiées par $C=\cos(\arctan x)$ et $S=\sin(\arctan x)$:

$$\left\{\begin{array}{ccc}\frac{S}{C}&=&\tan(\arctan)=x\\ S^2+C^2&=&1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ccc}S&=&xC\\ (1+x^2)C^2&=&1\end{array}\right.$$

Attention! à ne pas tricher (le + automatiquement) : ceci amène $C=\pm\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et, ***comme*** arctan est ***à valeurs*** dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et cos ***positif*** sur cet intervalle, c'est bien un +

Finalement les solutions ***sur*** $\mathbb{R}$ de (E) sont $\boxed{y(x)=A\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}+B\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

Mines-Ponts PSI 2022 (équation différentielle d'ordre 2)

Ex 21 Considérons l(équation différentielle $(E): y''=(x^2-1)y$.

1) Montrez que si y solution de (E) vérifie $y(0)=0$ (rp. $y'(0)=0$), alors y est impaire (rp. paire).

2) Trouvez le réel $a\in\mathbb{R}$ pour lequel la fonction $x\longrightarrow e^{ax^2}$ est solution de (E).

3) Soit $f: x\longrightarrow u(x)e^{-x^2/2}$. Montrez f solution de E ssi u solution d'une équation différentielle à trouver.

4) Exprimez l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de $v: x\longrightarrow\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1) Posons $z(x)=-y(-x)$. Alors $z'(x)=y'(-x)$, $z''(x)=-y''(-x)$ et $z(0)=0$, $z'(0)=y'(0)$. Par le théorème de Cauchy, comme le « *coefficient dominant* » de y'' qui est 1 ne s'annule pas, il y a unicité ***sur*** $\mathbb{R}$ d'une solution aux conditions initiales données. z et y vérifient les mêmes C.I. Montrons que z vérifie (E) :

$$z''(x)-(x^2-1)z(x)=-y''(-x)-(x^2-1)(-y(-x))=-\left[y''-(1-x^2)y\right](-x)=0$$

On en déduit $z(x)=-y(-x)=y(x)$ soit y impaire. Raisonnement analogue pour $y'(0)=0$

2)

$$y''-(1-x^2)y=\left(2axe^{ax^2}\right)'-(x^2-1)e^{ax^2}=e^{ax^2}\left(2a+(2ax)^2-(x^2-1)\right)=e^{ax^2}\left((4a^2-1)x^2+2a+1\right)$$

$a=-\frac{1}{2}$ convient.

3) On reconnaît dans ce changement de fonction inconnue la méthode de Lagrange qui va ramener à une équation différnetielle du 1er ordre en u'. On pose $y = u e^{-x^2/2}$. On calcule $y' = e^{-x^2/2}(u' - xu)$, $y'' = e^{-x^2/2}\big(u'' - 2xu' + (x^2-1)u\big)$

$$0 = y'' - (x^2-1)y = e^{-x^2/2}\big(u'' - 2xu' + (x^2-1)u - (x^2-1)u\big) \Longleftrightarrow u'' - 2xu' = 0\ (F)$$

4) (F) s'intègre en $u' = C\exp\left(\int 2x\,dx\right) = Ce^{x^2}$ puis $u = C\int_0^x e^{t^2}\,dt + D$

Finalement les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont $y = Ce^{-x^2/2}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + De^{-x^2/2}$

Remarque : On obtient bien une structure de $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

Centrale PSI 2019 (série entière solution équation différentielle 2e ordre) ✷

Ex 23 On considère l'équation différentielle $(E) : (1+x^2)y'' + xy' - y = 0$

1) Justifiez il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = \sqrt{2}$ et $y'(0) = 0$.

2) Déterminez les solutions de (E) développables en série entière.

3) En posant $x = \sinh t$, résoudre (E).

1) C'est le théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'applique bien sur $\mathbb{R}$ car le « *coefficient dominant* » $x^2+1 \neq 0$ sur $\mathbb{R}$.

2) $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon R, est dérivable terme à terme sur $\left]-R,R\right[$ et est solution de (E) sur $\left]-R,R\right[$ ssi

$$\begin{aligned}
&(1+x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
\Longleftrightarrow &\sum_{n=-2}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + x^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0\\
\Longleftrightarrow &\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} + n(n-1)a_n + na_n - a_n\Big] = \sum_{n=0}^{+\infty} 0x^n
\end{aligned}$$

De l'unicité du DSE, il suit $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2-1)a_n = 0$, puis $a_{n+2} = \dfrac{-(n-1)}{n+2}a_n$ ***car on a bien*** $n \neq -2$ et $n \neq -1$. Ensuite, en considérant les termes d'indice pair dont le « *dernier* » est $a_2 = \frac{1}{2}a_0$, il vient :

$$a_{2n+2} = \frac{-(2n-1)}{2n+2)}a_{2n} = \frac{(-1)^2(2n-1)(2n-3)}{(2n+2)(2n)}a_{2n-2} = \cdots = \frac{(-1)^{n+1}\,(2n-1)!!}{(2n+2)!!}a_0$$

Puis en décalant, et en revenant à la factorielle :

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n\,(2n-3)!!}{(2n)!!}a_0 = \frac{(-1)^n\,(2n-1)!!}{(2n-1)\,2^n\,n!}a_0 = \frac{(-1)^n\,(2n)!}{2^n n!(2n-1)\,2^n\,n!}a_0 = \frac{(-1)^n(2n)!}{(2n-1)\,2^{2n}\,(n!)^2}$$

Pour les impairs, ***Attention!***, regardez bien la récurrence,elle donne $a_3 = 0$ puis, par récurrence tous les $a_{2n+1} = 0$. Seul a_1 est quelconque. Finalement l'ensemble des solutions développables en série entière est

$$a_0\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(2n-1)\,2^{2n}\,(n!)^2}x^{2n} + a_1\,x$$

Le rayon est non nul à cause du x… D'autre part,c'est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, on a donc trouvé ***toutes les solutions***. Autrement dit, toutes les solutions de cette équation différentielle sont développables en série entière…

3) Je n'ai pas le temps de vous faire un beau diagramme de composition (pour « *voir* ») : on a $y^*(t) = y(x)$. Je tâcherais de le faire pour le pdf du 25 juin. On passe au côté technique avec $x = \sinh t$:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy^*}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy^*}{dt}\,\frac{1}{dt/dx} = \frac{1}{\cosh t}\,\frac{dy^*}{dt}\\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\cosh t}\,\frac{dy^*}{dt}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\cosh t}\,\frac{dy^*}{dt}\right]\frac{dt}{dx}\\ &= \frac{1}{\cosh t}\left[\frac{-\sinh t}{\cosh^2 t}\,\frac{dy^*}{dt} + \frac{1}{\cosh t}\,\frac{d^2y^*}{dt^2}\right]\end{aligned}$$

y est solution sur $\mathbb{R}$ de (E) ssi y^* est solution sur $\sinh^{-1}(\mathbb{R})$ de

$$(1+\sinh^2 t)\Big(\frac{-\sinh t}{\cosh^3 t}\,\frac{dy^*}{dt} + \frac{1}{\cosh^2 t}\,\frac{d^2y^*}{dt^2}\Big) + \sinh t\Big(\frac{1}{\cosh t}\,\frac{dy^*}{dt}\Big) - y^*(t) = 0 \iff \frac{d^2y^*}{dt^2} - y^* = 0$$

On a immédiatement $y^*(t) = A\cosh(t) + B\sinh(t)$; puis sin étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $t = \sinh^{-1}(x)$ (c'est argsh) mais à priori ce n'est pas au programme). En tous cas $\sinh t = \sin(\sinh^{-1}(x) = x$ et

$$\cosh t = +\sqrt{1+\sinh^2(\sinh^{-1}(x))} = \sqrt{1+x^2} \quad + \text{car } \cosh \geq 0$$

Finalement $y(x) = A\sqrt{1+x^2} + Bx$. On peut en déduire le DSE de $\sqrt{1+x^2}$ qui d'ailleurs est au programme. Je vous laisse y réfléchir.

Ex 27 ✷ Soient $y'' + \phi(x)y = 0$ (E) une équation différentielle avec $\phi 2\pi$-périodique et C^∞ sur $\mathbb{R}$ et f_0, f_1 les solutions vérifiant les CI : $f_0(0) = 1$ $f_0'(0) = 0$ et $f_1(0) = 0$ $f_1'(0) = 1$

1) Soit y une solution; montrez $y(x+2\pi)$ solution sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire il existe des constantes $w_{00}, w_{10}, w_{01}, w_{11}$ que l'on déterminera en fonction de π, f_0, f_1 telles que $f_0(x+2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x)$ et $f_1(x+2\pi) = w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x)$.

3) Montrez que (E) admet des solutions 2π-périodiques non nulles ssi la matrice $W = \left(\begin{smallmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11}\end{smallmatrix}\right)$ admet 1 pour valeur propre.

1) Pour éviter des erreurs / biais de raisonnement, pososns expliciteement $z(x) = y(x+2\pi)$, alors immédiatement $z'(x) = y'(x+2\pi)$ et $z''(x) = y''(x+2\pi)$ puis :

$$z''(x) + \phi(x)z(x) = y''(x+2\pi) + \phi(x)y(x+2\pi) = y''(x+2\pi) + \phi(x+2\pi)y(x+2\pi) = 0$$

On a utilisé la 2π-périodicité de ϕ

2) Montrons que la famille (f_0, f_1) est libre, ce sera alors une base des solutions sur $\mathbb{R}$, puisque le cours nous donne que c'est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2. Soient α, β 2 réels tq $\alpha f_0 + \beta f_1 = 0$. Alors la valeur en 0 et la valeur de la dérivée en 0 amènenet respectivment $\alpha = 0$ et $\beta = 0$.

Par suite, d'après la question Q1, comme $f_0(x+2\pi)$ et $f_1(x+2\pi)$ sont des solutions, il existe bien 4 constantes (les coordonnées dans la base!) tq

$$f_0(x+2\pi) = w_{00}f_0(x) + w_{10}f_1(x) \qquad f_1(x+2\pi) = w_{01}f_0(x) + w_{11}f_1(x)$$

3) Il est plus « *raisonnable* » de ne pas procéder directement par équivalences, souvent « *trichées* », et de prouver séparément les deux implications.

Si (E) admet une solution 2π-périodique y non nulle, en utilisant (f_0, f_1) base, on a $y = \alpha f_0 + \beta f_1$, puis :

$$y(x) = y(x+2\pi) = \alpha f_0(x+2\pi) + \beta f_1(x+2\pi) = (\alpha w_{00} + \beta w_{01}) f_0(x) + (\alpha w_{10} + \beta w_{11}) f_1(x)$$

L'unicité des coordonnées dans un base impose :

$$\begin{cases} \alpha &= \alpha w_{00} + \beta w_{01} \\ \beta &= \alpha w_{10} + \beta w_{11} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

1 est donc vp de W car le vecteur $[\alpha, \beta)^{\mathrm{T}}$ est non nul par hypothèse de non nullité de y

Si $W = \begin{pmatrix} w_{00} & w_{01} \\ w_{10} & w_{11} \end{pmatrix}$ admet 1 comme valeur propre, soit $U = (\alpha, \beta)$ un vecteur propre associé non nul. Alors la fonction $y(x) = \alpha f_0(x) + \beta f_1(x)$ est bien solution de (E), combinaison linéaire de la base des solutions, et est 2π-périodique. Je vous laisse vérifier ce dernier point.

$$\begin{cases} x' &= y - z \\ y' &= 2x + y + z \\ z' &= -2x - y - z \end{cases}$$

$$\text{On pose} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad (S) \iff X' = AX$$

On cherche à diagonaliser A, en espérant qu'elle le soit…

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 1 & -1 \\ 2 & 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^3 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)$$

Il y a 3 vp : 0, 2 et -2. Comme les valeurs propres sont ***toutes distinctes*** (ou les multiplicités toutes égales à 1), A est ***diagonalisable*** et les 3 espaces propres sont des droites.

Calcul de $E(2) = \operatorname{Ker}(2I_3 - A)$

$$AX = 2X \iff \begin{cases} 0 &= 2x - y + z \\ 0 &= -2x + y - z \\ 0 &= 2x + y + 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= -z \\ z &= z \end{cases} \qquad E(2) = \operatorname{Vect}(-1, -1, 1)$$

On calcule aussi $E(0) = \operatorname{Vect}(-1, 1, 1) \quad E(-2) = \operatorname{Vect}(1, -1, 1)$

On diagonalise explicitement : comme on a $E(0) \oplus E(2) \oplus E(-2) = \mathbb{R}^3$, la réunion des 3 bases de chacun des espaces propres nous donne une base de $\mathbb{R}^3$ et en considérant P, la matrice de passages, par la formule de changement de bases, on a :

$$P=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\quad \text{d'où } P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}=D$$

$$X'=AX \iff X'=PDP^{-1}X \iff P^{-1}X'=DP^{-1}X \iff \left(P^{-1}X\right)'=D\left(P^{-1}X\right)$$

$$\iff Y'=DY \iff \left\{\begin{array}{ccc}u'&=&0\\v'&=&2v\\w'&=&=-2w\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc}u&=&a\\v&=&be^{2t}\\w&=&ce^{-2t}\end{array}\right.$$

$$\iff X=PY=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-1&-1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\be^{2t}\\ce^{2-t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a-be^{2t}+ce^{-2t}\\a-be^{2t}-ce^{-2t}\\a+be^{2t}+ce^{-2t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix}$$

On peut remarquer que l'on a bien un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, sev des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$X(t)=a\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-e^{2t}\\-e^{2t}\\e^{2t}\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}e^{-2t}\\-e^{-2t}\\e^{-2t}\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{ccc}x'&=&x+8y+e^t\\y'&=&2x+y+e^{-3t}\end{array}\right.$$

Avec $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}e^t\\e^{-3t}\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&8\\2&1\end{pmatrix}$ le système s'écrit $X'=AX+B$

On diagonalise immédiatement A, je ne mets aucuns détails. On pose $P=\begin{pmatrix}-2&2\\1&1\end{pmatrix}$ et on a $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-3&0\\0&5\end{pmatrix}=D$

Puis $X'=PDP^{-1}X+B \iff P^{-1}X'=DP^{-1}X+P^{-1}B \iff Y'=DY+C$, via $Y=P^{-1}X=\binom{u}{v}$ et $C=P^{-1}B$ que l'on calcule :

$$A'=PA \iff \left\{\begin{array}{ccc}-2a+2b&=&a'\\a+b&=&b'\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc}a&=&-\frac14a'+\frac12b'\\b&=&\frac14a'+\frac12b'\end{array}\right. : P^{-1}=\frac14\begin{pmatrix}-1&2\\1&2\end{pmatrix}\quad C=P^{-1}B=\frac14\begin{pmatrix}-e^t+2e^{3t}\\e^t+2e^{3t}\end{pmatrix}$$

$$Y'=DY+C \iff \left\{\begin{array}{ccc}u'&=&-3u+\dfrac14(-e^t+2e^{3t})\\v'&=&5v+\dfrac14(e^t+2e^{3t})\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc}u&=&ae^{-3t}+\dfrac1{12}e^{3t}-\dfrac1{16}e^t\\v&=&be^{5t}-\dfrac14e^{3t}-\dfrac1{16}e^t\end{array}\right.$$

Je mets les détails uniquement pour la 1$^{\text{re}}$ ligne :

Résolution de l'homogène : $u'=-3u$ ssi $u=ae^{-3t}$

Recherche d'une solution particulière : on cherche sous la forme $u(t)=a(t)e^{-3t}$, solution (sur $\mathbb{R}$) ssi $a'(t)e^{-3t}+a(t)\times 0=\frac14(-e^t+2e^{3t})$ ssi $a'(t)=\frac14(-e^{4t}+2e^{6t})$. En particulier, $a(t)=-\frac1{16}e^{4t}+\frac1{12}e^{6t}$ puis $u(t)=-\frac1{16}e^t+\frac1{12}e^{3t}$

$$\text{On termine : }\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=X=PY=\begin{pmatrix}-2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ae^{-3t}+\dfrac1{12}e^{3t}-\dfrac1{16}e^t\\be^{5t}-\dfrac14e^{3t}-\dfrac1{16}e^t\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}-2ae^{-3t}+2be^{5t}-\dfrac23e^{3t}=x\\ae^{-3t}+be^{5t}-\dfrac16e^{3t}-\dfrac18e^t=y\end{pmatrix}}$$

CCINP PSI 2022 (système différentiel 3×3 d'ordre 2) ✌

Ex 31 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et le système différentiel $\left\{ \begin{array}{rcl} x'' & = & -x+3y-2z \\ y'' & = & -3x+5y-2z \\ z'' & = & -3x+4y-z \end{array} \right.$

1) Etudiez la diagonalisabilité de A

2) Résoudre le système différentiel

1) On calcule le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & +2 \\ 3 & \lambda-5 & 2 \\ 3 & -4 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda-2)(\lambda-1)$$

A d'ordre 3 a 3 vp distinctes et est donc diagonalisable

2) On calcule les 3 espaces propres qui sont des droites. Je ne mets pas de détails ici. $E(1) = \mathrm{Vect}(2,2,1)$ $E(2) = \mathrm{Vect}(1,3,3)$ $E(0) = \mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Vect}(1,1,1)$. On note f_1, f_2, f_0 les vecteurs sus-nommés dans l'ordre. On sait alors que $E(1) \oplus E(2) \oplus E(0) = \mathbb{R}^3$ et que $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_0)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En posant :

$$P = P_{\varepsilon}^{\mathscr{F}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et avec la formule de changement de bases } P^{-1}AP = D\mathrm{iag}(1,2,0) = D$$

En posant $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$, le système différentiel s'écrit matriciellement $X'' = AX$ puis :

$$X'' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X'' = DP^{-1}X \iff (P^{-1}X)''D\,(P^{-1}X)$$

On pose $Y = P^{-1}X = (u\ v\ w)^{\mathrm{T}}$. Le nouveau système s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'' & = & u \\ v'' & = & 2v \\ w'' & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} u & = & Ae^t + A'e^{-t} \\ v & = & Be^{\sqrt{2}t} + B'e^{-\sqrt{2}t} \\ w & = & Ct + C' \end{array} \right.$$

$$\text{Finalement } X = PY = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^t + A'e^{-t} \\ Be^{\sqrt{2}t} + B'e^{-\sqrt{2}t} \\ Ct + C' \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2Ae^t + 2A'e^{-t} + Be^{\sqrt{2}t} + B'e^{-\sqrt{2}t} + Ct + C' \\ 2Ae^t + 2A'e^{-t} + 3Be^{2t} + 3B'e^{-\sqrt{2}t} + Ct + C' \\ Ae^t + A'e^{-t} + 3Be^{2t} + 3B'e^{-\sqrt{2}t} + Ct + C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}}$$

Remarques

- Je rappelle que $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ est une notation pratique mais légèrement abusive, puisqu'en fait on considère une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $t \longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) & y(t) & z(t) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$
- L'ensemble solution peut s'écrire $t \longrightarrow A \begin{pmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} + A' \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^{\sqrt{2}t} \\ 3e^{\sqrt{2}t} \\ 3e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} + B' \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t} \\ 3e^{-\sqrt{2}t} \\ 3e^{-\sqrt{2}t} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} + C' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  On a donc une structure de $\mathbb{R}$-ev de dimension 6, sev des fonctions C^{∞} de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

  Ceci se généralise aux systèmes différentiels quelconques $n \times n$ à coefficients constants. L'ordre 1 (rp. l'ordre 2) donne un sev de dimension n (rp. $2n$). Un élève « *ambitieux* » devrait le retenir.

Ex 32 Soit le système différentiel avec $x, y \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} x'' + y' + 6x &= 0 \\ y'' - x' + 6y &= 0 \end{cases}$ avec les C.I. $x'(0) = y'(0) = 0$.

1) ✷ Montrez que l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 (sans résoudre).

2) Résoudre. On pourra poser $z = x + iy$.

1) Considérons l'application définie sur $Sol(S)$ par $\phi : X = \binom{x}{y} \longrightarrow (x(0), y(0)) \in \mathbb{R}^2$. ϕ est clairement linéaire et elle est ***bijective***, car pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz (ou Cauchy linéaire), pour une équation différentielle d'ordre 2 (un système linéaire d'ordre 2 dans $\mathbb{R}$ est une équation linéaire différentielle linéaire d'ordre 2 dans $\mathbb{R}^n$), il ***existe une unique*** solution X de S vérifiant les conditions initiales $X(0) = (a, b)$ et $X'(0) = (0, 0)$. C'est donc un isomorphisme et $\dim Sol(S) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

2) On pose $z = x + iy$ et :

$$z'' = x'' + iy'' = -y' + ix' - 6(x + iy) = iz' - 6z$$

L'équation différentielle ***complexe*** à coefficients constants $z'' - iz' + 6z = 0$, d'équation caractéristique associée $X^2 - iX + 6$ de racines $3i$ et $-2i$ (je ne mets pas les détails) a pour solutions (:

$$z(t) = Ae^{3it} + Be^{-2it} \qquad z'(0) = 3iAe^{3i0} - 2iBe^{-2i0} = 0 \Longleftrightarrow 3A = 2B$$

Attention! Les constantes A et B sont ***complexes***. On « *change* » A en $2A$ par commodité calculatoire…

$$z(t) = 2(a + ib)e^{3it} + 3(a + ib)e^{-2it} \quad \Longrightarrow \begin{cases} x &= 2a\cos(3t) - 2b\sin(3t) + 3a\cos(2t) + 3b\sin(2t) \\ y &= 2b\cos(3t) + 2a\sin(3t) + 3b\cos(2t) - 3a\sin(2t) \end{cases}$$

On a bien un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2, sev des fonctions $C^\infty\big(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\big)$:

$$t \to X(t) = a\ t \to \begin{pmatrix} 2\cos(3t) + 3\cos(2t) \\ 2\sin(3t) - 3\sin(2t) \end{pmatrix} + b\ t \to \begin{pmatrix} 3\sin(2t) - 2\sin(3t) \\ 2\cos(3t) + 3\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Centrale PC (système différentiel à matrice antisymétrique) ✷

Ex 36 On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique. On considère le système $X' = AX$.

1) Montrez que si n est impair, le système a des solutions constantes non nulles.

2) Montrez que si n est impair, chaque courbe intégrale évolue dans un hyperplan.

3) On ne suppose plus de condition sur n. Montrez que le produit scalaire de deux solutions est constant.

4) Toujours sans condition sur n, montrez que les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}$.

1) Une solution constante $X(t) = X_0$ est solution ssi $X'(t) = 0 = AX_0$. Il en existe des non nulles ssi $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$. Si n est impair ceci est réalisé parce que $A^{\mathrm{T}} = -A$ puis $\det(A^{\mathrm{T}}) = \det(A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A)$ donc nécessairement $\det(A) = 0$.

2) Pour n impair, on a vu $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ ce qui se traduit aussi, de ***manière équivalente***, par le théorème du rang, par $\dim \operatorname{Im} A \leq n - 1$, ***ou encore de manière équivalente*** par $\operatorname{Im} A \subset H$ avec H hyperplan. On en déduit $X'(t) \in H$. Il est bien connu, en cinématique, que si le vecteur vitesse appartient à une droite, respectivement un plan, le point mobile se déplace alors sur une droite, respectivement un plan. Redémontrons-le pour un Hyperplan.

On suppose $X'(t) \in H$. Posons $X(0) = X_0$, « *position* » à l'instant 0, et montrons alors que le « *point mobile* » $X(t)$ se déplace dans l'hyperplan « *passant par* » X_0 et parallèle à H, ou, de manière équivalente plus mathématique, dans le ***translaté*** de H par X_0.

Méthode 1 : Notons que toute équation d'hyperplan $H : \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ peut s'écrire aussi $U^{\mathrm{T}} X = 0$ (le produit scalaire canonique en fait en munissant $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique mais on peut s'en passer calculatoirement). Considérons alors $Y(t) = U^{\mathrm{T}} X(t)$. On peut dériver et on en déduit $Y'(t) = U^{\mathrm{T}} X'(t) = 0$, puisque $X'(t) \in H$. Par suite $U^{\mathrm{T}} X(t) = cste = U^{\mathrm{T}} X(0) = U^{\mathrm{T}} X_0$, ou encore $U^{\mathrm{T}} (X(t) - X_0) = 0$ soit $X - X_0 \in H$.

Méthode 2 (plus générale mais très théorique) : On utilise la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral à l'ordre 0 qui reste vraie pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans un evn E (notons que $X(t)$ est C^∞)

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \frac{u^n}{n!} X'(u)\,\mathrm{d}u \in X_0 + H$$

Comme $\frac{u^n}{n!} X'(u) \in H$ sur $[0, t]$, son intégrale est aussi un élément de H. Ce n'est pas tout-à-fait au programme de PSI (mais de MP), puisque vous n'avez pour les intégrales que les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, mais vous vous en servez en physique. Par contre, pour dériver, vous avez bien à votre programme de PSI des fonctions (de $\mathbb{R}$) à valeurs dans un evn E de dimension finie. En fait pour intégrer une fonction vectorielle, dans la pratique, on le fait sur chaque coordonnée. Par exemple vous pouvez écrire, pour des fonctions continues par morceaux :

$$\int_a^b \left(f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}\right) dt = \int_a^b f(t)\,dt\ \vec{i} + \int_a^b g(t)\,dt\ \vec{j}$$

3) Soient $X(t), Y(t)$ 2 solutions. Posons $\phi(t) = \left(X(t) \,|\, Y(t)\right)$. ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\phi'(t) = \left(X'(t) \,|\, Y(t)\right) + \left(X(t) \,|\, Y'(t)\right) = X'(t)^{\mathrm{T}} Y(t) + X(t)^{\mathrm{T}} Y'(t) = (AX(t))^{\mathrm{T}} Y(t) + X(t)^{\mathrm{T}} AY(t) = X(t)^{\mathrm{T}} (-A) Y(t) + X(t)^{\mathrm{T}} AY(t) = 0$$

4) Dans la question précédente, rien n'empêche de prendre $X(t) = Y(t)$. Il vient alors $\left(X(t) \,|\, X(t)\right) = cste$ qui n'est rien d'autre que $\|X(t)\| = cste$. Les trajectoires sont donc sur des ***sphères***, donc sont bornées.

Remarque : Si n est impair, par exemple $n = 3$, les trajectoires sont sur des sphères et un hyperplan, cad ***l'intersection*** d'une sphère et un plan, soit un ***cercle***. Le point mobile $X(t)$ décrit une trajectoire circulaire (avec l'hypothèse matrice antisymétrique) … Etonnant, non ?

IMT PSI 2021-2013 (systeme différentiel 3×3*)*

Ex 37 Soit le système (S) $\begin{cases} x' &= y - z \\ y' &= z - x \\ z' &= x - y \end{cases}$ avec les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$.

1) Existence et unicité des solutions de (S).

2) Montrez que si (x, y, z) est une solution, alors $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont des fonctions constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire ?

3) Résoudre (S).

1) D'après le théorème de **Cauchy**[1], il existe et une seule solution de ce système différentiel, cad une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, qui passe par la condition initiale $(1, 0, 0)$.

1. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe, en théorie des groupes.

2) On calcule :

$$\left(x^2+y^2+z^2\right)' = 2xx'+2yy'+2zz' = 2x(y-z)+2y(z-x)+2z(x-y) = 0$$

$$\left(x+y+z\right)' = x'+y'+z' = y-z+z-x+x-y = 0$$

Par primitivation, il vient pour $t \in \mathbb{R}$, et en utilisant la condition initiale : $x^2+y^2+z^2 = 1$ et $x+y+z = 1$. La trajectoire de la solution est donc inscrite sur l'intersection de la sphère de centre O et de rayon 1 et du plan $\mathscr{P} : x+y+z = 1$. C'est bien un cercle, puisque $d = d(O,\mathscr{P}) = \dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < R = 1$. C'est un cercle de rayon $\sqrt{1-d^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

3) Le système s'écrit :

$$X' = AX \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On cherche d'abord les valeurs propres de la matrice associée au système différentiel

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+1-1-\lambda-\lambda-\lambda = -\lambda^3-3\lambda = -\lambda(\lambda+i\sqrt{3})(\lambda-i\sqrt{3})$$

On cherche des vecteurs propres, sachant que les espaces propres sont de dimension 1. Pour la valeur propre 0, on remarque que sur la colonne A, $C_1+C_2+C_3$. Il est donc inutile de résoudre le système associé, puisque ceci nous donne $(1,1,1) \in \operatorname{Ker} A$ et, par suite, pour des raisons de dimension, $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Vect}(1,1,1) = \operatorname{Vect}(u)$. Pour la valeur propre $i\sqrt{3}$, on résoud le système sur $\mathbb{C}$:

$$X \in \operatorname{Ker}(A-i\sqrt{3}I_3) \Longleftrightarrow \begin{cases} -i\sqrt{3}x+y-z &= 0 \\ -x-i\sqrt{3}y+z &= 0 \\ x-y-i\sqrt{3}z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -i\sqrt{3}x+y &= z \\ -x-i\sqrt{3}y &= -z \\ x-y-i\sqrt{3}z &= 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{2}(i\sqrt{3}-1)z \\ y &= \frac{1}{2}(-i\sqrt{3}-1)z \\ z &= z \end{cases}$$

Comme la matrice A est ***réelle***, on sait que l'espace propre associé à la valeur propre conjuguée $-i\sqrt{3}$ se calcule par conjugaison des valeurs précédentes. $\operatorname{Ker}(A-i\sqrt{3}I_3) = \operatorname{Vect}(i\sqrt{3}-1,-i\sqrt{3}-1,2) = \operatorname{Vect}(v)$ et $\operatorname{Ker}(A+i\sqrt{3}I_3) = \operatorname{Vect}(\overline{v})$. Le cours nous apprend alors que $\left(e^{0t}u, e^{i\sqrt{3}t}v, e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v}\right)$ est un système fondamental de solutions sur $\mathbb{C}$, cad les solutions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^3$. Alors $\left(e^{0t}u, \frac{1}{2}(e^{i\sqrt{3}t}v+e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v}), \frac{1}{2i}(e^{i\sqrt{3}t}v-e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v})\right)$ est un système fondamental de solutions sur $\mathbb{R}$(et sur $\mathbb{C}$), puisque :

- Ces fonctions sont bien réelles, puisqu'on reconnaît partie réelle et imaginaire.
- Ce sont bien des solutions puisque combinaisons linéaires (à coefficients complexes) de l'ev complexe des solutions précédentes du système ***linéaire*** sur $\mathbb{C}$.
- Elles sont au nombre de 3 et sont independantes puisque la matrice de passage a un déterminant non nul :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2i} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2i} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0$$

On calcule :

$$\frac{1}{2}\left(e^{i\sqrt{3}t}v+e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v}\right)=\Re\left(\left(\cos(\sqrt{3}t)+i\sin(\sqrt{3}t)\right)\begin{pmatrix}i\sqrt{3}-1\\-i\sqrt{3}-1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-\cos(\sqrt{3}t)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\\-\cos(\sqrt{3}t)+\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\\2\cos(\sqrt{3}t)\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2i}\left(e^{i\sqrt{3}t}v-e^{-i\sqrt{3}t}\overline{v}\right)=\Im\left(\left(\cos(\sqrt{3}t)+i\sin(\sqrt{3}t)\right)\begin{pmatrix}i\sqrt{3}-1\\-i\sqrt{3}-1\\2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)-\sin(\sqrt{3}t)\\-\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)-\sin(\sqrt{3}t)\\2\sin(\sqrt{3}t)\end{pmatrix}$$

Les solutions réelles sont donc :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}&=\alpha e^{0t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}-\cos(\sqrt{3}t)-\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\\-\cos(\sqrt{3}t)+\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t)\\2\cos(\sqrt{3}t)\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)-\sin(\sqrt{3}t)\\-\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)-\sin(\sqrt{3}t)\\2\sin(\sqrt{3}t)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\alpha+\cos(\sqrt{3}t)(-\beta+\sqrt{3}\gamma)+\sin(\sqrt{3}t)(-\sqrt{3}\beta-\gamma)\\\alpha+\cos(\sqrt{3}t)(-\beta-\sqrt{3}\gamma)+\sin(\sqrt{3}t)(\sqrt{3}\beta-\gamma)\\\alpha+2\beta\cos(\sqrt{3}t)+2\gamma\sin(\sqrt{3}t)\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}}_{\Omega}+\cos(\sqrt{3}t)\underbrace{\begin{pmatrix}-\beta+\sqrt{3}\gamma\\-\beta-\sqrt{3}\gamma\\2\beta\end{pmatrix}}_{\vec{i}}+\sin(\sqrt{3}t)\underbrace{\begin{pmatrix}-\sqrt{3}\beta-\gamma\\\sqrt{3}\beta-\gamma\\2\gamma\end{pmatrix}}_{\vec{j}}\end{aligned}$$

On voit immédiatement que c'est une courbe tracée dans le plan $(\Omega,\vec{i},\vec{j})$, mais ce n'est pas nécessairement un cercle, en fait ce peut être une ellipse ! Il faut comparer les normes de $\vec{i}$ et $\vec{j}$:

$$\begin{aligned}\|\vec{i}\|^2&=(-\beta+\sqrt{3}\gamma)^2+(-\beta-\sqrt{3}\gamma)^2+4\beta^2=6\beta^2+6\gamma^2\\\|\vec{j}\|^2&=(-\sqrt{3}\beta-\gamma)^2+(\sqrt{3}\beta-\gamma)^2+4\gamma^2=6\beta^2+6\gamma^2\end{aligned}$$

Quelles que soient les conditions initiales, c'est donc toujours un cercle (comme vu plus haut, sauf que l'on avait seulement ***inclus***) et son rayon est $R=\sqrt{6}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}$.

Remarque : En reprenant les conditions initiales de l'énoncé, on trouve $\alpha=\frac{1}{3}$, $\beta=-\frac{1}{6}$ et $\gamma=\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Le rayon $R=\sqrt{6}\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{1}{12}}$ est bien égal à $\sqrt{\frac{2}{3}}$ comme trouvé plus haut. On remarque aussi que comme $\Omega=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ et $\vec{i}=\frac{1}{3}(2,-1,-1)$, $\vec{j}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1)$, le plan est bien le plan $x+y+z=1$.