Feuille d'Exercices 12

Equations différentielles

Equations Différentielles Linéaires d'Ordre 1

Théorème de Structure :

Soit l'équation différentielle linéaire : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ (E) avec a, b, c ***continues*** de I dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

On note $a(x)y' + b(x)y = 0$ (H) l'équation ***homogène associée***.

- Si $a(x)$ ***ne s'annule pas sur*** I, l'ensemble des solutions ***sur*** I de l'équation ***homogène*** (H) est un $\mathbb{K}$***-ev de dimension*** 1, sev de $\mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$. Ce sont les fonctions $y = Ce^{A(x)}$ avec $C \in \mathbb{K}$, et $A(x)$ primitive de $\frac{-b(x)}{a(x)}$.
- La solution générale de (E) s'obtient en ***ajoutant*** à la solution générale de (H) ***une*** solution ***particulière*** de (E)

Ex 1 ✌ Intégrer l'équation différentielle $y' \sinh x - y \cosh x + 1 = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$.

CCINP BQMP 2023->2021 (équation différentielle d'ordre 1) ✌

Ex 2 Soient les deux équations différentielles : $2xy' - 3y = 0$ (H) $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ (E)

1) Résoudre l'équation (H) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2) Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

3) L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

Ex 3 ✷✍ Cherchez les solutions sur $\mathbb{R}$ de $|x|y' + (x-1)y = x^2$

Ex 4 ✌✍ Soit $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Etablir que les solutions de $y' - a(t)y = 0$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

CCP PSI 2007 (équation fonctionnelle avec dérivée) ✍

Ex 5 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminez l'ensemble des fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -f(\alpha - x)$

(tangentes aux courbes intégrales) ✌

Ex 6 Soit l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ avec $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrez que les tangentes au point d'abscisse x_0 des courbes intégrales (courbes des solutions) sont toutes ou parallèles ou concourantes.

Mines-Ponts PSI 2024-2022 | Centrale PSI 2018 (équation différentielle d'ordre 1) ✷✍

Ex 7

1) Montrez que l'équation $(E) : x^2y' + y = x^2$ n'admet pas de solution développable en série entière.

2) Cherchez les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$

3) Montrez il existe une unique solution tendant vers 0 en 0^+ [**2022 :** précisez les solutions qui admettent une limite finie en 0.]

Mines-Ponts PC 2012 (limite dérivées en $+\infty$) ✷

Ex 8

1) Soient $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et $a \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(a) > 0$. On suppose que $f'(x) + af(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

2) Soit $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ telle que $g''(x) + g'(x) + g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$. Montrer que $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Mines-Ponts PSI 2021 (équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec recollement) ✌

Ex 9 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - ny = 0$

Ex 10 Déterminez les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{C}$ dérivables tq $\forall t > 0$ $f'(t) = f(\frac{1}{t})$

CCP PSI 2014 (équation différentielle ordre 1 coefs polynomiaux)

Ex 11 Soit (E) : $x(x-1)y' + y = \ln(x)$.

1) Montrer que (E) admet une unique solution f définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Après en avoir justifier l'existence, calculer $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Centrale PSi 2016 (équation d'ordre 1 à indéterminée)
Ex 12

1) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$, $f, g \in C^0(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $y' + f(t)y = g(t)$ admet une unique solution φ telle que $\varphi(t_0) = x_0$. On exprimera φ à l'aide d'intégrales.

2) Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $h \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $y' - ay = h(t)$ admet une unique solution bornée sur $\mathbb{R}_+$.

(solutions périodiques) ✷
Ex 13 Soient l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ et $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et de période 1. A quelle(s) conditions(s) existe-t-il des solutions 1-périodiques ? Les déterminer. (on écrira la solution générique)

Equations Différentielles Linéaires d'Ordre 2

Théorème de Structure :
Soit l'équation différentielle linéaire : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$ (E) avec a, b, c, d continues de I intervalle dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$ (H) l'équation ***homogène associée***.
- Si $a(x)$ ***ne s'annule pas sur*** I, l'ensemble des solutions ***sur*** I de l'équation ***homogène*** (H) est un $\mathbb{K}$***-ev de dimension*** 2, sev de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$.
- La solution générale de (E) s'obtient en ***ajoutant*** à la solution générale de l'équation ***homogène*** (H) ***une*** solution particulière f de (E). Ensemblistement, on peut écrire : $\text{sol}(E) = f + \text{sol}(H)f$

Equation linéaire d'ordre 2 à coefficients constants :
Soit l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$ (H), avec $a, b, c \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ constantes et $a \neq 0$. On pose $aX^2 + bX + c = 0$ (L) l'équation ***caractéristique associée***.
- L'ensemble des solutions de (H) est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2, et sont des fonctions de classe C^∞ ***définies sur*** $\mathbb{R}$.
- Une base des solutions de (H) est donnée selon le signe du discriminant Δ de (L) :
  - Si $\Delta > 0$, deux racines simples r_1 et r_2. Une base est $\left(e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\right)$.
  - Si $\Delta = 0$, une racine double r. Une base est $\left(e^{rx}, xe^{rx}\right)$.
  - Si $\Delta < 0$, deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$. Une base est $\left(e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)\right)$.

Soit l'équation différentielle à coefficients constants $ay'' + by' + cy = e^{mx}$ avec m ***complexe***. Alors on peut trouver ***une*** solution particulière sous la forme :
- si m n'est pas racine de l'équation caractéristique, sous la forme $C\,e^{mx}$.
- si m est racine simple de l'équation caractéristique, sous la forme $Cx\,e^{mx}$.
- si m est racine double de l'équation caractéristique, sous la forme $Cx^2\,e^{mx}$.

Ex 14 Résoudre $(1 + e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = 0$ en effectuant le changement de fonction inconnue $z = (1 + e^x)y$

CCP PC 2009 ✌
Ex 15 Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 2\cosh x$

Ex 16 ✍ Chercher les séries entières solutions puis résoudre sur $]-1, 1[$: $4(1 - t^2)y'' - 4ty' + y = 0$.

CCINP PSI 2022-2021 (équation différentielle linéaire d'ordre 2) ✍
Ex 17 On considère l'équation différentielle $(E) : (x^2 - 1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ sur $\left]-1, 1\right[$.

1) Déterminez les solutions polynomiales de (E).

2) Trouvez une équation différentielle (E') vérifiée par $x \longrightarrow z(x) = \frac{1}{x}y(x)$.

3) Cherchez a, b, c tq $\frac{2-4x^2}{x(x^2-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1}$.

4) Résoudre (E'). En déduire toutes les solutions de (E) sur $\left]-1, 1\right[$.

Centrale PSI 2013 (équation différentielle ordre 2 coefficients polynomiaux)
Ex 18 Soit F l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $]0, +\infty[$. Pour $f \in F$, on considère l'équation différentielle (E) : $x^2y'' + 2xy' - 2y = f(x)$.

1) Trouver les fonctions $x \mapsto x^r$ solutions de l'équation homogène associée à (E).

2) Soit $g(x) = \int_0^x \frac{-tf(t)}{3x^2}\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \frac{-xf(t)}{3t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que g est bien définie sur $]0, +\infty[$ puis vérifier que g est solution de (E).

3) Quel est le lien entre les deux questions précédentes ?

4) Montrer que l'application qui envoie f sur g définit un endomorphisme de F.

Ensea PSI 2021 (série entière solution équation différentielle) ✍
Ex 19 Déterminez les solutions de $xy'' - (x + 1)y' + y = 0$ (E) développables en série entière.

Ex 20 Résoudre $y''+\dfrac{2x}{1+x^2}y'+\dfrac{y}{(1+x^2)^2}=0$ avec le changement de variable $t=\arctan x$

Mines-Ponts PSI 2022 (équation différentielle d'ordre 2) ✍

Ex 21 Considérons l(équation différentielle $(E): y''=(x^2-1)y$.

1) Montrez que si y solution de (E) vérifie $y(0)=0$ (rp. $y'(0)=0$), alors y est impaire (rp. paire).

2) Trouvez le réel $a\in\mathbb{R}$ pour lequel la fonction $x\longrightarrow e^{ax^2}$ est solution de (E).

3) Soit $f: x\longrightarrow u(x)e^{-x^2/2}$. Montrez f solution de E ssi u solution d'une équation différentielle à trouver.

4) Exprimez l'ensemble des solutions de (E) à l'aide de $v: x\longrightarrow \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

CCP PSI 2015 (équation différentielle d'ordre 3 à coefs constants)

Ex 22 On donne l'équation différentielle : $x'''-5x''+7x'-3x=0$.

1) Montrez qu'il existe $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $AX=X'$ avec $X=\begin{pmatrix}x & x' & x''\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

2) Montrez A semblable à $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

3) Résoudre l'équation différentielle.

Centrale PSI 2019 (série entière solution équation différentielle 2e ordre) ✷✍

Ex 23 On considère l'équation différentielle $(E): (1+x^2)y''+xy'-y=0$

1) Justifiez il existe une unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0)=\sqrt{2}$ et $y'(0)=0$.

2) Déterminez les solutions de (E) développables en série entière.

3) En posant $x=\sinh t$, résoudre (E).

Ex 24 Soit p une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et positive non nulle. Montrez que toute solution sur $\mathbb{R}$ de $y''+p(x)y=0$ s'annule en au moins un point.

Mines-Ponts PSI 2018 | Mines-Ponts PC 2012 (étude équation différentielle) ✷

Ex 25

1) Soit $y:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1, $\phi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^+$ continue et $c\in\mathbb{R}$ tels que $\forall x\in[A,b]$, $y(x)\leq c+\displaystyle\int_0^x \phi(t)y(t)\,dt$. Montrez que, pour tout $x\in[a,b]$, $y(x)\leq c\exp\left(\int_a^x\phi(t)\,dt\right)$. [**PC :** Question absente] .

2) Soit q une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, croissante, et f une solution de l'équation $f''+qf=0$. Montrez que f est bornée. [**PC :** *Indic :* on multipliera par $\frac{f'}{q}$]

Mines-Ponts PSI 2021 (équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec recollement) ✷

Ex 26 Résoudre l'équation différentielle $xy''-y'+4x^3y=0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\mathbb{R}^{-*}$, puis sur $\mathbb{R}$.

Ex 27 ✷✍ Soient $y''+\phi(x)y=0$ une équa diff avec ϕ 2π-périodique et C^∞ sur $\mathbb{R}$ et f_0, f_1 les solutions vérifiant les CI : $f_0(0)=1$ $f_0'(0)=0$ et $f_1(0)=0$ $f_1'(0)=1$

1) Soit y une solution; montrez $y(x+2\pi)$ solution sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire il existe des constantes $w_{00}, w_{10}, w_{01}, w_{11}$ que l'on déterminera en fonction de π, f_0, f_1 telles que $f_0(x+2\pi)=w_{00}f_0(x)+w_{10}f_1(x)$ et $f_1(x+2\pi)=w_{01}f_0(x)+w_{11}f_1(x)$.

3) Montrez que (E) admet des solutions 2π-périodiques non nulles ssi la matrice $W=\begin{pmatrix}w_{00}&w_{01}\\w_{10}&w_{11}\end{pmatrix}$ admet 1 pour valeur propre.

Centrale PSI 2013 (cns pour deux solutions vérifiant $y_2=xy_1$)

Ex 28 Soient $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle, $A\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $B\in\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$. Trouvez une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle $y''+A(x)y'+B(x)y=0$ admette deux solutions y_1 et y_2 telles que $\forall x\in I$, $y_2(x)=xy_1(x)$.

Ex 29 ✷ ***Entrelacement des zéros de Sturm*** Soit (E) $y''+p(t)y'+q(t)y=0$ avec p,q continues sur I et $t_0\in I$.

1) Soit f une solution non nulle de (E). Montrez que les zéros sont isolés.

2) Soient f,g 2 solutions de (E). On pose $W(t)=f(t)g'(t)-f'(t)g(t)$. Montrez $W(t)=W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^t p(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

3) Si f,g indépendantes, montrez $W(t_0)\neq 0$.

4) En déduire que si f,g indépendantes et f s'annule en α,β 2 zéros consécutifs, alors g s'annule sur $[\alpha,\beta]$.

Systèmes Différentiels Linéaires

Ex 30 Résoudre les systèmes différentiels suivants :

✌✍ $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = 2x + y + z \\ z' = -2x - y - z \end{cases}$ $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = z + x \end{cases}$ $\begin{cases} x' = x + 8y + e^t \\ y' = 2x + y + e^{-3t} \end{cases}$ ✷✍ $\begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = -x + 4y - z \\ z' = -x + 2y + z \end{cases}$

CCINP PSI 2022 (système différentiel 3 × 3 d'ordre 2) ✌✍

Ex 31 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et le système différentiel $\begin{cases} x'' = -x + 3y - 2z \\ y'' = -3x + 5y - 2z \\ z'' = -3x + 4y - z \end{cases}$

1) Etudiez la diagonalisabilité de A

2) Résoudre le système différentiel

Ex 32 Soit le système différentiel avec $x, y \to \mathbb{R}$ $\begin{cases} x'' + y' + 6x = 0 \\ y'' - x' + 6y = 0 \end{cases}$ avec les C.I. $x'(0) = y'(0) = 0$.

1) ✷ Montrez que l'ensemble des solutions est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 (sans résoudre).

2) Résoudre. On pourra poser $z = x + iy$.

CCINP PSI 2021 | CCINPBQ MP 2021(systeme différentiel 2 × 2)

Ex 33 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) A est-elle diagonalisable? [**MP :** Montrez non diagonalisable]

2) Montrez que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

2) [**MP :** On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A. Trouver une base (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$. On donnera explicitement les valeurs de a, b et c.]

3) En déduire la résolution du système différentiel $\begin{cases} x' = -x-4y \\ y' = x+3y \end{cases}$

Mines-Ponts PSI 2014 (système différentiel à matrice antisymétrique) ☜ ✷

Ex 34

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. On considère le système différentiel : (E) $X' = AX$. Soit $X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une solution.

1) Montrez que l'application $t \longrightarrow \|X(t)\|$ est constante.

2) Soit $B \in \operatorname{Ker} A$. Montrez que l'application $t \longrightarrow \big(X(t) \mid B\big)$ est une constante.

3) En déduire que $X(t)$ décrit une partie d'un cercle de $\mathbb{R}^3$.

Ex 35 Résoudre le système suivant : $\begin{cases} x' = (t+3)x + 2y \\ y' = -4x + (t-3)y \end{cases}$

Centrale PC (système différentiel à matrice antisymétrique) ✷

Ex 36 On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique. On considère le système $X' = AX$.

1) Montrez que si n est impair, le système a des solutions constantes non nulles.

2) Montrez que si n est impair, chaque courbe intégrale évolue dans un hyperplan.

3) On ne suppose plus de condition sur n. Montrez que le produit scalaire de deux solutions est constant.

4) Toujours sans condition sur n, montrez que les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}$.

IMT PSI 2021-2013 (systeme différentiel 3 × 3) ✍

Ex 37 Soit le système (S) $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = z - x \\ z' = x - y \end{cases}$ avec les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = z(0) = 0$.

1) Existence et unicité des solutions de (S).

2) Montrez que si (x, y, z) est une solution, alors $x + y + z$ et $x^2 + y^2 + z^2$ sont des fonctions constantes. Que peut-on en déduire pour la trajectoire?

3) Résoudre (S).

Autres

X-ESPCI PC 2012 (inéquation différentielle) ✷

Ex 38 Déterminer les $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant 2f(x)$.