Quelques corrections sur les Espaces Euclidiens

Ex 4 On se place dans le $\mathbb{R}$-ev E des suites réelles bornées. On définit $\big((u_n)\,|\,(v_n)\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_nv_n}{2^n}$

1) ✌Montrez que c'est un produit scalaire sur E.

2) Soit F le sev des suites presque-nulles (cad nulles àpcr). Montrez $F^\perp=\{0\}$

1) Avant de vérifier toutes les propriétés du produit scalaire, on n'oublie pas de vérifier que la série converge. La série $\sum\frac{u_nv_n}{2^n}$ ***converge absolument*** comme il en résulte du ***critère de majoration*** des séries ***positives*** par une série géométrique convergente (raison $|\frac{1}{2}|<1$) : $\left|\frac{u_nv_n}{2^n}\right|\leq M_uM_v\left(\frac{1}{2}\right)^n$ car par hypothèses, les suites sont bornées, (u_n) par M_u et M_v pour (v_n). Il est clair que $\phi(u_n,v_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_nv_n}{2^n}$ est symétrique et bilinéaire sur l'ev des suites réelles bornées.

• La ***positivité*** résulte de $\phi(u_n,u_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n^2}{2^n}\geq 0$ car les termes sont réels positifs et que la somme d'une série positive convergente est positive.

• Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $\phi(u_n,u_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_n^2}{2^n}=0$. Comme tous ces termes sont réels et positifs, on en déduit $\forall n\geq 0, u_n=0$ ce qui se traduit par (u_n) est la suite nulle. ϕ est bien ***définie***.

2) Il faut et il suffit de démontrer $F^\perp\subset\{0\}$. Soit $u=(u_n)\in F^\perp$, alors pour toute suite (v_n) presque nulle, $\big((u_n)\,|\,(v_n)\big)=0$. « *Classiquement* », l'idée est de choisir judicieusement des (v_n)…

Considérons pour p entier la suite $v_p=(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie tout simplement par $w_p=1$ et tous les autres termes de cette suite valent 0. C'est une sorte de base canonique « *étendue* ». Cette suite est clairement presque nulle et bornée. On a immédiatement :

$$(u\,|\,v_p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{u_nw_n}{2^n}=\frac{u_p\times 1}{2^p}=0\quad\Longrightarrow\quad u_p=0$$

Ceci étant réalisé pour tout $p\in\mathbb{N}$, il vient $u=(0)$

Remarques

- « *Ceci* » n'arrive ***jamais en dimension finie***, je veux dire, en dimension finie, $F^\perp=\{0\}\iff F=E$. Autrement dit, en dimension infinie, il y a des sevs ***qui ne sont pas*** l'espace tout entier et pourtant, aucun vecteur n'est orthogonal à ce sev. Surprenant, non?
- On a ici aussi un exemple (***impossible en dimension finie***) que $F\neq(F^\perp)^\perp$ car ***ici*** $(F^\perp)^\perp=\{0\}^\perp=E$ et aussi du fait que ***ici*** $F\oplus F^\perp=F\oplus\{0\}=F\neq E$

BQ CCP MP 2023->2021 | CCP PSI 2015 (propriétés des supplémentaires orthogonaux)

Ex 5 Soient F et G deux sev d'un espace préhilbertien E. [**MP :** euclidien]

1) Montrez $F\subset(F^\perp)^\perp$. [**MP :** question absente]

2) Montrez $F=(F^\perp)^\perp$ si E est de dimension finie.

3) Etablir $F\subset G\Longrightarrow G^\perp\subset F^\perp$. [**MP :** question absente]

4) Montrez $(F+G)^\perp=F^\perp\cap G^\perp$.

5) Montrez $F^\perp+G^\perp\subset(F\cap G)^\perp$. Montrez l'égalité en dimension finie. [**MP :** Juste l'égalité]

1) Rappelons que $x\in G^\perp$ ***si et seulement si pour tout*** $f\in G$ alors $f\perp x$.

Soit $x \in F$, alors comme $F^\perp \perp F$, on a pour tout $y \in F^\perp$, $y \perp x$, ***donc*** $x \in (F^\perp)^\perp$. O nvient de démontrer l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ par la méthode usuelle. (Il faut bien vous concentrer).

2) ***On sait*** qu'en dimension finie, pour tout sev H de E, alors $H^\perp$ est de dimension finie et $\dim H^\perp = \dim E - \dim H$. L'égalité $F = (F^\perp)^\perp$ résulte de l'***inclusion*** démontrée à la question précédente et de l'***égalité de dimension*** car :

$$\dim(F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp = \dim E - \Big(\dim E - \dim F\Big) = \dim F$$

3) Raisonnement assez analogue à Q1. Supposons $F \subset G$ et démontrons $G^\perp \subset F^\perp$ par la méthode usuelle :

Soit $x \in G^\perp$, alors pour tout $y \in G$ on a $y \perp x$. Comme F est inclus dans G, ***en particulier*** on a aussi pour tout $y \in F$, $y \perp x$, ***d'où*** $x \in F^\perp$.

4) Rappelons qu'on est à priori en dimension infinie. On ***ne peut donc*** utiliser l'égalité de dimension et on va alors démontrer la double inclusion :

$\boxed{(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp}$

Soit $x \in (F+G)^\perp$, donc pour tout $y \in F+G$, $y \perp x$. On rappelle que l'on a $F \subset F+G$ (en prenant $f+0$) et $G \subset F+G$. Par conséquent, ***en particulier***, pour tout $f \in F$ on a $y \perp x$, soit $x \in F^\perp$. Raisonnement totalement identique pour $x \in G^\perp$. Il vient alors $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

$\boxed{F^\perp \cap G^\perp \subset (F+G)^\perp}$

Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$, alors $x \in F^\perp$ ***et*** $y \in G^\perp$. Pour tout $f \in F, f \perp x$ cad $(f|x) = 0$ et pour tout $g \in G, g \perp x$, cad $(g|x) = 0$. Par linéarité à gauche du produit scalaire, il suit pour tous $f \in F, g \in G, (f+g|x) = (f|x)+(g|x) = 0$. Comme l'ensemble de ***tous les*** $f+g$ n'est rien d'autre que $F+G$, il suit pour tout $y = f+g \in F+G, y \perp x$, ***donc*** $x \in (F+G)^\perp$.

5) On a seulement une inclusion en dimension infinie : comme $F \cap G \subset G$, par Q2) on en déduit $G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. De même $F^\perp \subset (F \cap G)^\perp$. $(F \cap G)^\perp$ étant un sev, donc stable par +, il suit que toutes les sommes d'éléments de $G^\perp$ et $F^\perp$ sont aussi dans cet ev, soit $\boxed{G^\perp + F^\perp \subset (F \cap G)^\perp}$.

Par contre,en dimension finie on a l'égalité des 2 ev que l'on peut démontrer avec une égalité de dimensions :

$$\begin{aligned}\dim(F^\perp + G^\perp) &= \dim F^\perp + \dim G^\perp - \dim(F^\perp \cap G^\perp) = 2\dim E - \dim F - \dim G - \dim(F+G)^\perp \\ &= 2\dim E - \dim F - \dim G - \Big(\dim E - \dim(F+G)\Big) = \dim E - \Big(\dim F + \dim G - \dim(F+G)\Big) \\ &= \dim E - \dim(F \cap G) = \dim(F \cap G)^\perp\end{aligned}$$

CCINP PSI 2023 | Mines-Ponts PSI 2014 (produit scalaire intégral)

Ex 6 Soit $E = \mathscr{C}^2\big(\,[0,1]\,,\mathbb{R}\big)$. Pour $f,g \in E$, on pose $\phi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 fg + f'g'$.

1) Montrez ϕ produit scalaire sur E.

2) Soient $V = \big\{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\big\}$ et $W = \big\{f \in E,\ f = f''\big\}$.

Montrez qu'ils sont en somme directe et orthogonaux [**Mines :** Montrez supplémentaires orthogonaux.]

Paul ne se rappelle plus les 2 autres questions. Probablement celles-là :

3) Montrez que V est l'orthogonal de W [**Mines :** C'est la question précédente]

4) ~~Déterminez la projection orthogonale sur V de $f \in E$.~~

1) Commençons par remarquer que l'***intégrale existe*** puisque $t \longrightarrow f(t)g(t)+f'(t)g'(t)$ est bien ***continue*** sur le segment (fermé) $\left[0,1\right]$, par hypothèse. ϕ est bien un forme à valeur réelles.

- La symétrie est immédiate
- La linéarité à gauche résulte de la linéarité de l'intégration puis la symétrie amène la linéarité à droite, soit la bilinéarité de ϕ.
- La ***positivité*** également puisque les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, où un ***carré est positif*** : $\phi(f,f)=\int_0^1 f^2+f'^2 \geq 0$.
- Quant à ***définie***, puisque la fonction dans l'intégrale nulle $\phi(f,f)=0$, est ***continue*** et de ***signe constant*** sur [0,1], un théorème permet de conclure que $f^2(t)+f'^2(t)=0$. Comme on est dans $\mathbb{R}$, il vient f nulle sur [0,1].

Remarque : On peut remarquer que $\mathscr{C}^1$ suffit pour démontrer produit scalaire. L'hypothèse est plus forte.

2) Notons que l'on sait grâce au cours sur les équations différentielles d'ordre 2 (le coefficient « *dominant* » d'ailleurs est $1\neq 0$ ***sur*** $\mathbb{R}$), que W est un ev de dimension 2, cad un ***plan***. Par résolution immédiate (c'est du cours), on a $W=\mathrm{Vect}(x\to e^x, x\to e^{-x})=\mathrm{Vect}(x\to\cosh x, x\to\sinh x)$.

Rappelons que l'on sait que le noyau d'une forme linéaire (cad à valeurs dans $\mathbb{R}$) non nulle est un hyperplan (même en dimension infinie, mais alors on ne peut pas dire de dimension $n-1$, et ce n'est pas au programme). Il subsiste quand même que c'est ***un sev*** de E. L'application $f\in E\to f(a)\in\mathbb{R}$ étant clairement une ***forme linéaire non nulle*** sur E, son noyau H_a est un sev (hyperplan) de E. On a $V=H_0\cap H_1$, donc V est bien ***un sev*** de E.

Il reste à démontrer orthogonaux et en somme directe. On se rappelle son cours : si 2 sevs sont orthogonaux, ils sont en somme directe.... Soient $f\in V$ et $g\in W$, cad $f(0)=f(1)=0$ et $g''=g$. Utilisons une IPP : $u'=f' \quad v=g' \quad u=f \quad v'=g''$

$$\int_0^1 f'g' = \left[f(t)g'(t)\right]_0^1 - \int_0^1 f(t)g''(t)\,dt = -\int_0^1 fg$$

On a donc immédiatement $\phi(f,g)=0$ cad $f\perp g$, puis $\boxed{V\perp W}$

Remarque : Aux mines, on demandait de démontrer directement, ***en plus***, $V\oplus W=E$. C'est plus fort et plus dur mais de toute façon c'est la question d'après dans CCINP. On rappelle qu'en dimension finie, pour démontrer F et G ***supplémentaires orthogonaux***, il faut et il suffit de démontrer $F=G^{\perp}$ ou $G=F^{\perp}$, mais ce n'est pas toujours très « *pratique* ». Il est plus simple de démontrer $F\perp G$ et $\dim F=n-\dim G$. Comme E est de dimension infinie, on ne peut utiliser cette égalité sur les dimensions, par conséquent pour démontrer V et W ***supplémentaires orthogonaux***, il ***faut et il suffit*** de démontrer $V+W=E$ et $V\perp W$.

3) Selon la remarque on démontre $V+W=E$ c'est le plus simple. On pourrait aussi démontrer $V=W^{\perp}$ par les inclusions.

Analyse : Soit h $\mathscr{C}^2$ sur [0,1] tel que $h=f+g$ avec $f(0)=f(1)=0$ et $g''=g$. Il vient $h(0)=g(0)$ $h(1)=g(1)$ et par double dérivation, il suit $h''=f''+g$ soit $f''-f=h''-h$ ou autrement dit f solution de $y''-y=h''-h$ aux conditions initiales $f(0)=f(1)=0$. La résolution de l'équation homogène est $y=\alpha\cosh x+\beta\sinh x$. Une solution particulière est h!, d'où la solution générale est $f(x)=\alpha\cosh x+\beta\sinh x+h(x)$. On trouve les 2 constantes par les conditions initiales :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+h(0) & = & 0\\ \alpha\cosh 1+\beta\sinh 1+h(1) & = & 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}\alpha & = & -h(0)\\ \beta & = & \frac{1}{\sinh 1}\Big(-h(1)+h(0)\cosh 1\Big)\end{array}\right.$$

L'analyse est terminée puisque nécessairement $g(x)=h(x)-f(x)$.

Synthèse : Soit h $\mathscr{C}^2$ sur [0,1]. Posons $f(x)=\alpha\cosh x+\beta\sinh x+h(x)$ avec α et β comme plus haut et $g(x)=h(x)-f(x)$. On a bien

- $h(x) = f(x) + g(x)$
- $g \in W$, puisque $g \in \operatorname{Vect}(\cosh x, \sinh x)$.
- $f \in V$ car $f(0) = \alpha + h(0) = 0$ et $f(1) = \alpha \cosh 1 + \beta \sinh 1 + h(1) = 0$.

4) Si on maîtrise son cours sur les projections, la projection orthogonale de f sur V est le décomposé sur la somme directe $V \oplus V^{\perp} = E$, et on l'a traité plus haut, c'est $\boxed{p_V(f) = -f(0)\cosh x + \dfrac{1}{\sinh 1}\Big(-f(1) + f(0)\cosh 1\Big)\sinh x + f(x)}$

Ex 7 $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrez $\operatorname{Ker} A^{\mathrm{T}} A = \operatorname{Ker} A$. (On rappelle si $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n, X^{\mathrm{T}} X = \|X\|^2_{can}$)

$\boxed{\operatorname{Ker} A \subset \operatorname{Ker} A^{\mathrm{T}} A}$

Immédiat. Résulte de $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker} AB$ ou $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g \circ f)$. On peut considérer que c'est du cours. De toute façon cette inclusion est aisée à démontrer : si $X \in \mathscr{M}_{n?1}(\mathbb{R})$ vérifie $AX = 0$, alors $A^{\mathrm{T}} AX = 0$.

$\boxed{\operatorname{Ker} A^{\mathrm{T}} A \subset \operatorname{Ker} A}$

C'est l'inclusion délicate. On prend la méthode générale : Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $A^{\mathrm{T}} AX = 0$. Il faut démontrer $AX = 0$. Comment « *enlever* » le A^{T} ? … A noter que si A^{T} est inversible (ce qui équivaut à A inversible), c'est immédiat, je vous laisse y réfléchir. En fait, comme indiqué, l'idée est d'utiliser le produit scalaire canonique dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est $X^{\mathrm{T}} Y$ (***Attention!*** à ne pas confondre avec celui de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ni, d'ailleurs, avec XY^{T}). L'idée est de multiplier à gauche par X^{T} :

$$0 = X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} AX) = (AX)^{\mathrm{T}}(AX) = \|AX\|^2_{can} \implies AX = 0$$

Remarque : On en déduit $\operatorname{rg}(A^{\mathrm{T}} A) = \operatorname{rg} A$. Je l'utiliserais en cours.

Mines-Ponts PSI 2013 | Ensam PSi 2013 | CCP PSI 2009 (expression de produit scalaire) ✷

Ex 9 Soit $\big(E, (\cdot|\cdot)\big)$ un ev euclidien, $e_1, \dots, e_n$ et $f_1, \dots, f_n$ deux bases orthonormées de E et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrez $\sum_{i=1}^n \big(u(e_i) \,|\, e_i\big)$ indépendant de la BON (e_i) choisie. [**CCP, Mines-Ponts :** Question absente]

2) Montrez $\sum_{1 \le i,j \le n} \big(u(e_i) \,|\, f_j\big)^2$ ne dépend pas des BON choisies. En donnez une expression en fonction de u.

Rappelons un théorème du cours : dans un ev euclidien E, si on considère une ***base orthonormée*** $(e_1, \dots, e_n)$, alors les coordonnées d'un vecteur x quelconque sont $x_i = \big(e_i \,|\, x\big)$ (il n'y a donc pas de calcul à effectuer pour les trouver!). On peut donc écrire en particulier, en utilisant un autre théorème qui « *dit* » que tout produit scalaire ***quelconque*** ou toute norme euclidienne ***quelconque*** ont ***toujours*** une ***expression canonique*** par rapport aux coordonnées dans une ***base orthonormée*** $(e_i)_{1 \le i \le n}$:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n \big(e_i \,|\, x\big) e_i \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \big(e_i \,|\, x\big)^2 \qquad \big(x \,|\, y\big) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n \big(e_i \,|\, x\big)\big(e_i \,|\, y\big)$$

Tout ceci est du cours…

1)

$$\sum_{i=1}^n \big(u(e_i) \,|\, e_i\big) \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n a_{ki} e_k \,\Big|\, e_i\Big) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ki} \big(e_k \,|\, e_i\big) \overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^n a_{ii} = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr} u$$

- **(1)** On a posé $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \operatorname{Mat}(u, \mathscr{E})$, la matrice de u dans la base (e_i).
- **(2)** Linéarité à gauche du produit scalaire
- **(3)** On a appliqué (e_i) base orthonormée, soit $\big(e_k \,|\, e_i\big) = \delta_{ki}$. Il ne reste que $i = k$ avec $\big(e_i \,|\, e_i\big) = \|e_i\|^2 = 1$.

2)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(u(e_i)\,|\,f_j\right)^2 &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(u(e_i)\,|\,f_j\right)^2 \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left\|u(e_i)\right\|^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(u(e_i)\,|\,u(e_i)\right) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}e_k \,\Big|\, \sum_{k=1}^{n}a_{ki}e_k\right)\\
&\overset{(3)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ki}e_k \,\Big|\, \sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j\right) \overset{(4)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{1\le k,j\le n}a_{ki}a_{ji}\left(e_k|e_j\right)\\
&\overset{(5)}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ji}a_{ji} = \sum_{1\le i,j\le n}a_{ji}^2 \overset{(6)}{=} (A\,|\,A)_{can} = \|A\|^2_{can} = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)
\end{aligned}$$

- **(1)** C'est la formule rappelée plus haut ***car*** $(f_j)_j$ est une BON.
- **(2)** On a posé $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} = \mathrm{Mat}(u,\mathscr{E})$, la matrice de u dans la base (e_i).
- **(3)** On change le « *nom* » de l'indice k en j dans la 2^{e} pour éviter une grosse erreur après.
- **(4)** On a appliqué la ***bilinéarité*** du produit scalaire.
- **(5)** On a appliqué (e_i) base orthonormée, soit $(e_k\,|\,e_j) = \delta_{kj}$. Il ne reste que $j = k$ avec $(e_j\,|\,e_j) = \|e_j\|^2 = 1$.
- **(6)** On a reconnu le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Reste à montrer que $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)$ ne ***dépend pas de la base orthonormée***, sachant que A en dépend puisque c'est la matrice de u dans la base $\mathscr{E}$. Soit $\mathscr{E}'$ une autre base orthonomée de E. On a la formule :

$$A' = \mathrm{Mat}(u,\mathscr{E}') = P^{\mathrm{T}}\ \mathrm{Mat}(u,\mathscr{E})\,P = P^{\mathrm{T}}AP$$

avec $P = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}$ matrice de passage de la BON $\mathscr{E}$ à la base $\mathscr{E}'$. On sait que c'est une matrice orthogonale ***car les 2 bases sont des BON***, cad que $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$ ou aussi $P^{\mathrm{T}}P = PP^{\mathrm{T}} = I$. On écrit :

$$\mathrm{tr}((A')^{\mathrm{T}}A') = \mathrm{tr}\left((P^{\mathrm{T}}AP)^{\mathrm{T}}\ P^{\mathrm{T}}AP\right) = \mathrm{tr}\left(P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\ (PP^{\mathrm{T}})\,AP\right) = \mathrm{tr}\left(\underbrace{P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A}_{B}\ P\right) = \mathrm{tr}\left(P\ \underbrace{P^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A}_{B}\right) = \mathrm{tr}\left(A^{\mathrm{T}}A\right)$$

Remarque : Ce n'est pas au programme de PSI (mais au programme de MP), mais pour information, en fait $\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A) = \mathrm{tr}(u^*\circ u)$ où u^* est ce qu'on appelle l'adjoint de u. Dans une BON A^{T} est la matrice de u^*...

CCINP PSI 2023 (produit scalaire intégral)

Ex 11 Soit $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ avec $a<b$. On pose $\phi(f,g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$.

1) Montrez que ϕ est un produit sclaire.

2) Montrez qu'il existe une unique fonction g qui est C^2 sur $[a,b]$ tq $g'' = f$ et $g(a) = g(b) = 0$. Montrez que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = -\int_a^b (g'(t))^2\,dt$.

3) Déterminez l'orthogonal du sev F de l'ensemble des fonctions C^2 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) Commençons par remarquer que l'intégrale existe par continuité de fg sur le segment $[a,b]$. ϕ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc une forme car :

- Symétrique : immédiat.
- Linéaire à gauche par linéarité de l'intégration puis linéaire à droite par symétrie donc bilinéaire.
- positive car $\phi(f,f) = \int_a^b f^2 \ge 0$ car f^2 est un carré réel.
- définie : si $\phi(f,f) = \int_a^b f^2 = 0$, comme l'intégrande est ***continue et positive***, un théorème nous amène la nullité de f^2 puis de f sur $[a,b]$

2) Comme f est continue sur l'intervalle $[a,b]$ elle y admet une primitive (cours), puis une primitive de primitive, soit un $h(x)$ tq $h''(x) = f(x)$. h sera alors C^2. Il est immédiat que les $g(x) = h(x)+\lambda x+\mu$ vérifieront cette même propriété. Un choix adapté de λ et μ (il suffit de résoudre un système 2×2 que je ne fais pas ici) permettra de vérifier en plus $g(a) = g(b) = 0$

On effectue alors une ipp avec $u' = f = g''$ $v = g$ $u = g'$ $v' = g'$:

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \int_a^b g''(t)g(t)\,dt = \left[g(t)g'(t)\right]_a^b - \int_a^b g'(t)g'(t)\,dt = -\int_a^b (g'(t))^2\,dt$$

3) Il faut utiliser la question précédente, en n'oubliant pas qu'elle s'écrit aussi $\left(f \,|\, g\right) = -\|g'\|^2$. On procède par analyse-synthèse pour trouver l'orthogonal de F.

Analyse :

Soit $f \in F^\perp$. Alors $\forall h \in F, \left(f \,|\, h\right) = 0$. on utilise $Q2$ en considérant ce g et en prenant en partoculier $h = g$. Il suit, en particulier, $-\|g'\|^2 = 0$, donc $g' = 0$, puis $g'' = f = 0$.

Synthèse :

Réciproque immédiate : $F^\perp = \{0\}$

Remarques

- Ceci n'est pas possible dans un ev de dimension finie (cad un ev euclidien) car $F^\perp = \{0\} \iff F = E$. C'est du cours (par la dimension).

- Il y a une démo plus subtile (mais pas plus courte) mais qui dépasse le cadre d'une simple PSI, niveau X-ENS. Je vous l'explicite néanmoins, pour les élèves « *ambitieux* » : on utilise les evns (un ev préhilbertien de dimension infinie, comme ici, est un evn, muni de sa norme euclidienne). Elle utilise deux résultats : $F^\perp = \overline{F}^\perp$ et le théorème de Stone-Weierstraß, que vous avez peut-être vu en MPSI ? (en tous cas, au programme de MP). qui affirme que les (l'ensemble des) polynômes sont ***denses*** dans les fonctions continues pour la norme-infinie sur un segment $[a,b]$ (ou si vous voulez, équivalence de la densité au programme de PSI d'ailleurs, caractérisation séquentielle, il existe une suite de fonctions-polynômes convergeant vers n'importe quelle fonction continue ***pour la norme sup sur*** $\left[a,b\right]$.
  $F \subset \overline{F}$ donc $F^\perp \supset \overline{F}^\perp$. On peut utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence (au programme PSI). Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $f \in F, \left(f \,|\, x\right) = 0$. Si $f' \in \overline{F}$, $f' = \lim f_n$ avec $f_n \in F$. On a $\left(f_n \,|\, x\right) = 0$. L'application $f \to \left(f \,|\, x\right)$ étant continue (car 1-lipschitzienne, c'est du cours), on peut passer à la limite et on a bien $\left(f' \,|\, x\right) = 0$, soit $x \in \overline{F}^\perp$.
  On remarque $\|f\|^2 = \int_a^b f^2 \leq (b-a)\|f\|_\infty{}^2$. on en déduit la densité des polynômes pour la norme euclidienne de l'énoncé. Pour cette norme (cet evn), on a donc $\overline{\mathbb{R}[X]} = E$, puis comme $\mathbb{R}[X] \subset \mathscr{C}^\infty(\left[a,b\right], \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^2(\left[a,b\right], \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^1(\left[a,b\right], \mathbb{R})$, par suite, $\mathbb{R}[X]^\perp = \mathscr{C}^\infty(\left[a,b\right], \mathbb{R})^\perp = \mathscr{C}^2(\left[a,b\right], \mathbb{R})^\perp = \mathscr{C}^1(\left[a,b\right], \mathbb{R})^\perp = \{0\}$. Vous avez suivi ? Bravo !

Centrale PSI 2021 (produit scalaire sur $l^2(\mathbb{R})$) ✷

Ex 13 Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_n$ tq la série $\sum u_n^2$ converge. Pour $u = (u_n)_n$ et $v = (v_n)_n$ on pose $\left(u \,|\, v\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$

1) Montrez produit scalaire sur E.

2) Montrez que, si $u \in E$ ne s'annule pas, $\frac{1}{u}$ n'appartient pas à E.

3) Trouvez une CNS sur α pour que $(\frac{1}{n^\alpha}) \in E$.

4) On note F l'ens. des suites réelles nulles àpcr. Montrez F est un sev de dimension infinie.

5) Que dire de $F + F^\perp$ et de $(F^\perp)^\perp$?

1) De l'inégalité usuelle $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2)$ (que l'on démontre avec la valeur absolue par $(u_n - v_n)^2 \geq 0$ ***et*** $u_n + v_n \geq 0$), on déduit, critère de majoration d'une série positive, l'existence de $(u|v)$. Forme bilinéaire symétrique positive sur E est immédiat. Quant à définie, ce l'est aussi car $(u|u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0$ entraine par réalité et positivité, $u_n = 0$ nul pour tout n, soit c'est la suite nulle.

2) Soit$\sum u_n$ tq $\sum u_n^2$ converge. Par l'absurde : si$\sum \frac{1}{u_n^2}$ converge, alors par l'inégalité vue plus haut, la série de terme général $1 = u_n \times \frac{1}{u_n}$ converge. Absurde.

3) Immédiatement, par Riemann, $\sum\left(\frac{1}{n^a}\right)^2$ converge ssi $a > \frac{1}{2}$.

4) En notant $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la famille de suites définie par $u_{pn} = \delta_{pn}$ pour tout n, famille immédiatement ***libre*** de cardinal infini (dénombrable) de suites presque nulles, on en déduit que F est de dimension infinie.

Remarque : En fait, c'en est une base car elle est génératrice de F (je vous laisse y réfléchir).

5) On démontre rapidement que $F^\perp = \{0\}$. En effet si $(v_n) \in F^\perp$, $(v_n) \perp u_p$ définie plus haut ce qui amène $\left((v_n) \mid u_p\right) = v_p = 0$, pour tout p, puis (v_n) est la suite nulle. On en déduit $F + F^\perp = F$ et $(F\perp)^\perp = E$.

Remarque : Cet énoncé nous fait remarquer (prouver) que, en dimension infinie, on n'a pas toujours $F + F^\perp = E$, ni $(F^\perp)^\perp = F$. Par contre, on a toujours $((F^\perp)^\perp)^\perp = F^\perp$.

IMT PSI 2022 | CCINP PSI 2022 (produit scalaire et orthogonal d'un sev)

Ex 14 Soient des réels $a_0, \dots, a_n$ $n+1$ réels 2 à 2 distincts. On définit sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ par $\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$

1) Montrez que c'est un produit scalaire sur E.

2) On pose $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^n P(a_k) = 0\right\}$ Trouvez $F^\perp$. [**CCP :** En +, Montrez que F sev de E et donnez sa dimension] .

3) Déterminez la distance de P à F. [**CCP :** Question absente?]

1) ***Méthode 1 :*** La symétrie et la bilinéarité sont immédiates. La positivité résulte de $\phi(P,P) = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \geq 0$ car ce sont des ***carrés de réels***. Quant à définie : la « *réalité* » amène $\forall 0 \leq k \leq n$, $P(a_k) = 0$. Comme ce sont $n+1$ ***réels distincts,*** le polynôme de degré $\leq n$ a au moins $n+1$ racines, donc c'est le polynôme nul.

Méthode 2 : On se place dans la base des polynômes de Lagrange associés aux (a_k) (cad les $n+1$ polynômes L_i, tous de degré n, vérifiant $L_i(a_j) = \delta_{ij}$). On sait que tout polynôme P a pour coordonnées dans cette base $(P(a_0), P(a_1, \dots, P(a_n))$. Par conséquent, l'expression de l'énoncé dans cette base est l'expression du produit scalaire canonique. On en déduit aussi que la base de Lagrange est une base orthonormée.

2) L'application $\psi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \sum_{k=0}^n P(a_k)$ est une forme linéaire (je ne le démontre pas ici), par conséquent son noyau, qui est F, est un hyperplan, cad un sev de dimension $(n+1)-1 = n$. (si on reprend la base des polynômes de Lagrange, F a pour équation $x_0 + \cdots + x_n = 0$, je vous laisse y réfléchir). L'orthogonal de F est donc une droite, conformément au cours. Il faut et il suffit de trouver ***un*** vecteur orthogonal à tous ceux de F. Si l'on sait bien son cours sur l'orthogonal d'un hyperplan, on a immédiatement l'orthogonal via les polynômes de Lagrange, c'est $\mathrm{Vect}(1,\dots,1)$ mais ***attention!*** , ***coordonnées dans la base de Lagrange***, ce qui donne le polynôme constante-1. Sinon, si on ne devine pas, on est contraint de procéder par analyse-synthèse.

Analyse : Soit $Q \in F^\perp$. Alors, pour tout P tel que $\sum_{k=0}^n P(a_k) = 0$, on a $\phi(P,Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k) = 0$. Il faut analyser pour en déduire des « *choses* » sur Q. Pas facile… On essaye des polynômes particuliers P bien choisis, en général, c'est la bonne idée. On a envie d'essayer le polynôme $\prod_k (X - a_k)$, ***sauf qu'il*** est de degré $n+1$! Allez, il faut penser tout seul au polynôme Q vérifiant $Q(a_k) = 1$, puis ceci doit vous amener à penser à constante-1.

Synthèse : On considère $Q = 1$. pour $P \in F$, cad vérifiant $\sum_{k=0}^n P(a_k) = 0$, on a immédiatement $\sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k) = 0$, soit $\left(P \mid Q\right) = 0$, ou encore $\mathrm{Vect}(Q) = \mathrm{Vect}(1) \subset F^\perp$. Pour des raisons de dimension, comme $\dim F^\perp = 1$, on a l'égalité $F^\perp = \mathrm{Vect}(1)$.

3) Un théorème nous donne $d^2(P,F) = \|P - q(P)\|^2 = \|P\|^2 - \|q(P)\|^2$, où q est la projection orthogonale sur F. Pour des raisons de dimension, la projection q' sur $F^\perp$ est plus facile à déterminer, en appliquant ses formules :

$$q(P) = P - q'(P) = P - \big(P \,|\, 1\big)\frac{1}{\|1\|^2}\,1 = P - \frac{\sum_{k=0}^{n} P(a_k)}{n}$$

$$\begin{aligned} d^2(P,F) &= \sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 - \sum_{k=0}^{n}\Big(P(a_k) - \frac{\sum_{k=0}^{n} P(a_k)}{n}\Big)^2 = 0 + 2\sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times \frac{\sum_{k=0}^{n} P(a_k)}{n} - \Big(\frac{\sum_{k=0}^{n} P(a_k)}{n}\Big)^2 \\ &= 2\frac{\sum_{k=0}^{n} P(a_k)}{n}\sum_{k=0}^{n} P(a_k) - \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{k=0}^{n} P(a_k)\Big)^2 = \Big(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{n} P(a_k)\Big)^2 \end{aligned}$$

d'où $\boxed{d(P,F) = \sqrt{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}\,\Big|\sum_{k=0}^{n} P(a_k)\Big|}$

IMT PSI 2022 | Ensam PSI 2018 | CCP PSI 2013 (matrice de projection orthogonale)

Ex 18 Soit $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique et F le sev d'Ã©quat. $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$.

1) DÃ©terminez une base orthonormÃ©e de F et de $F^\perp$.

2) Donnez la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $F^\perp$. [**2013 :** sur F] .

1)

$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \quad (H_1) \\ x-y+z-t &= 0 \quad (H_2) \end{cases} \iff \begin{cases} x &= -z \\ y &= -t \\ z &= z \\ t &= t \end{cases}$$

(u,v) avec $u = (-1,0,1,0)$ et $v = (0,-1,0,1)$ est donc une base de F. Le principe est alors d'orthonormaliser par l'algorithme de **Gram**[1]-**Schmidt**[2], mais ici ce n'est pas nÃ©cessaire si on remarque que la base est dÃ©jÃ orthogonale : $\big(u \,|\, v\big) = 0$. Il suffit alors de normer, cad diviser par la norme, pour rendre la base orthonormÃ©e. $\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}u, \frac{1}{\sqrt{2}}v\Big)$ est une BON de F.

Pour trouver une BON de $F^\perp$, au moins 2 mÃ©thodes

MÃ©thode 1 (calcul « mental ») :

C'est possible ici car la base est constituÃ©e de 0 et 1 … On (devine) considÃ¨re $e = (1,0,1,0)$. On a immÃ©diatement $\big(e \,|\, u\big) = \big(e \,|\, v\big) = 0$ (car c'est le produit scalaire canonique), donc $e \in F^\perp$. Idem avec $f = (0,1,0,1)$. On constate (e,f) famille libre (les 2 vecteurs sont visiblement non colinÃ©aires) et $\dim F^\perp = \dim \mathbb{R}^4 - \dim F = 4 - 2 = 2$. Par suite, (e,f) est une base de $F^\perp$. Par « *chance* », les deux vecteurs sont dÃ©jÃ orthogonaux donc $\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}e, \frac{1}{\sqrt{2}}f\Big)$ est une BON de $F^\perp$

MÃ©thode 2 :

On a $F = H_1 \cap H_2$ avec H_1, H_2 hyperplans. Comme ces 2 Ã©quations sont des Ã©quations des hyperplans dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, que le produit scalaire cet exo est le produit scalaire canonique et que l'on sait alors que la base canonique est ***orthonormÃ©e***, on en dÃ©duit (cours) $H_1^\perp = \text{Vect}(1,1,1,1)$ et $H_2^\perp = \text{Vect}(1,-1,1,-1)$, vecteurs respectivement notÃ©s g et h. On utilise alors $F = H_1 \cap H_2 \subset H_1$, d'oÃ¹ $H_1^\perp \subset F^\perp$ et de mÃªme $H_2^\perp \subset F^\perp$. Raisonnement Ã©lÃ©mentaire comme plus haut, (g,h) est une base de $F^\perp$ qui, par « *chance* », est encore orthogonale… ***Attention!*** quand mÃªme, ici $\|g\| = \|h\| = 2$, donc $(\frac{1}{2}g, \frac{1}{2}h)$ est une BON de $F^\perp$

1. **Jorgen Pedersden Gram** : mathématicien danois (1850-1916).
2. **Erhard Schmidt** : allemand (1876-1959) fondateur de l'analyse fonctionnelle.

Remarque : On n'obtient pas la mÃªme BON mais pas de quoi « *s'affoler* », il y a une infinitÃ© de BON… Le lecteur est d'ailleurs invitÃ© Ã vÃ©rifier manuellement $\mathrm{Vect}\big((1,1,1,1),(1,-1,1,-1)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,0),(0,1,0,1)\big)$.

2) ***Attention!*** je calcule la matrice de la projection sur F (de toute faÃ§on, il suffit de changer la base)

Pour calculez la matrice de p dans la base canonique (donc orthonormÃ©e ici) il faut et il suffit de calculer ses images par p. On dispose d'une formule, qui n'est pas toujours applicable Ã cause du coÃ»t de calcul de la BON de F, mais ici, elle est dÃ©jÃ calculÃ©e…On a donc $p(x) = \frac{1}{2}\big(u\,|\,x\big)\,u + \frac{1}{2}\big(v\,|\,x\big)\,v$ et on l'applique aux 4 vecteurs ε_i de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Le calcul est trÃ¨s aisÃ©, je ne donne que le rÃ©sultat :

$$\begin{aligned} p(1,0,0,0) &= \tfrac{1}{2}(1,0,-1,0)\\ p(0,1,0,0) &= \tfrac{1}{2}(0,1,0-1)\\ p(0,0,1,0) &= \tfrac{1}{2}(-1,0,1,0)\\ p(0,0,0,1) &= \tfrac{1}{2}(0,-1,0,1)\end{aligned} \qquad \mathrm{Mat}\,(p,\varepsilon) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Remarques

- La matrice est symÃ©trique ce qui Ã©tait « *prÃ©visible* » puisque une projection orthogonale est un endomorphisme ***symÃ©trique*** et la base utilisÃ©e est ***orthonormÃ©e*** (cours de la semaine prochaine)
- Les 4 endomorphismes, projection orthogonale sur F (ici p), sur $F^{\perp}$ (notÃ© p'), symÃ©trie orthogonale par rapport Ã F (s), par rapport Ã $F^{\perp}$ (s') de « *dÃ©duisent* » les uns des autres, donc leur matrice aussi. Si on se rappelle, partant de $E = F \oplus F^{\perp}$, soit $x = f + g$, alors $p(x) = f,\ p'(x) = g,\ s(x) = f - g,\ s'(x) = g - f$, il vient :

  $$p + p' = \mathrm{Id} \qquad s = 2p - \mathrm{Id} = \mathrm{Id} - 2p' \qquad s' = 2p' - \mathrm{Id} = \mathrm{Id} - 2p = -s$$

  un Ã©lÃ¨ve « *ambitieux* » peut retenir ceci.

CCINP PSI 2022 | Mines-Ponts PSI 2019 | CCP PSI 2017 | CCPBQMP 2023->2021 (distance à un sev de matrices)

Ex 20

1) Montrez que l'application $(A,B) \longrightarrow \mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}}B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. [**MP :** prod. scalaire admis.]

2) Montrez que l'ensemble V des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ -b & a\end{smallmatrix}\right)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Déterminez une BON de $V^{\perp}$. [**MP :** seulement base] .

4) [**MP :** Déterminez la projection orthogonale de $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur $V^{\perp}$.]

5) Calculez la distance de J à $V^{\perp}$ [**MP :** $d(J,V)$] [**Mines PSI :** $d(J,V)$]

1) ***Méthode 1 :***

$\phi : (A,B) \longrightarrow \mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}}B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car :

- à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit une ***forme***.
- ϕ est ***symétrique*** : en rappelant que la trace d'une matrice est égal à celle de sa transposée :

  $$\phi(AB) = \mathrm{tr}\big(A^{\mathrm{T}}B\big) = \mathrm{tr}\big((A^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}}\big) = \mathrm{tr}\big(B^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\big) = \phi(BA)$$

- ϕ est immédiatement linéaire à gauche par linéarité de la trace et de la transposition. Il en résulte, par symétrie, la linéarité à droite, soit la ***bilinéarité*** ;
- ϕ est ***positive*** car, par ***réalité*** des A_{ki} :

  $$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \phi(A,A) = \mathrm{tr}\,(A^{\mathrm{T}}A) = \sum_{i=1}^{n}\big[A^{\mathrm{T}}B\big]_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[A^{\mathrm{T}}]_{ik}A_{ki} = \sum_{1\le i,k\le n} A_{ki}^2 \ge 0$$

- ϕ est ***définie*** car, par ***réalité*** des A_{ki} :

$$\phi(A,A)=0 \Longrightarrow \sum_{1\leq i,k\leq n} A_{ki}^2=0 \Longrightarrow \textbf{\textit{pour tous}}\ 1\leq i,k\leq n, A_{ki}=0 \Longrightarrow A=0$$

Méthode 2 :

C'est la méthode la plus rapide, peut-être un peu abusive?

$$\operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B)=\sum_{i=1}^{n}\left[A^{\mathrm{T}}B\right]_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[A^{\mathrm{T}}]_{ik}B_{ki}=\sum_{1\leq i,k\leq n} A_{ki}B_{ki}$$

On reconnaît le produit scalaire canonique de $R^{n^2}\simeq \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2) ***Méthode générale (par stabilité) :***

C'est une méthode assez lente et peu élégante en général.

- $V\neq\emptyset$ car V contient la matrice nulle : $a=b=0$.
- Soient $M_{a,b}$ et $M_{a',b'}$ deux matrices de V et α,β 2 scalaires dans $\mathbb{R}$:

$$\alpha M_{a,b}+\beta M_{a',b'}=\begin{pmatrix}\alpha a+\beta a' & \alpha b+\beta b'\\ -\alpha b-\beta b' & \alpha a+\beta a'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & B\\ -B & A\end{pmatrix} \text{ avec } A=\alpha a+\beta a',\ B=\alpha b+\beta b' \ \textbf{\textit{réels}}$$

Méthode du Vect :

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}=a\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}_{I_2}+b\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}}_{J}$$

V est donc l'ensemble de ***toutes les combinaisons linéaires*** de (I_2,J), c'est un sev et $V=\operatorname{Vect}(I_2,J)$ Cette famille est génératrice (par définition du vect) et, étant immédiatement libre, il en résulte que c'est une base et que V est un plan, soit $\dim V=2$. C'est même une base orthogonale car $\operatorname{tr}(I^{\mathrm{T}}V)=\operatorname{tr}(V)=0!$)

L'avantage de cette méthode est qu'elle donne (presque) « *gratuitement* » une base et la dimension...

3) Grâce à la méthode 2 de la question précédente, on sait $\dim V^{\perp}=\dim\mathscr{M}_2(\mathbb{R})-\dim V=4-2=2$ Une idée peut être donc de chercher d'avbord 2 vecteurs orthogonaux à I et J S'ils sont orthogonaux, tant mieux, sinon on appliquera le procédé de Schmidt.

Par exemple, $K=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ conviennent. Elles sont orthogonales. On a $\|K\|^2=\|N\|^2=2$.

$$\text{Une BON de } V^{\perp} \text{ est } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}K,\frac{1}{\sqrt{2}}N\right)$$

4)

Cet exercice fait partie de la banque d'exos CCINP MP, n°081.

Vous pouvez regarder la correction fournie par le concours : Banque CCINP MP 2023 avec corrigés

Ex 21 Calculez $\displaystyle\inf_{M=(m_{ij})\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i-m_{ij})^2$ (*On utilisera une distance à un sev*).

On rappelle (quasi-cours) que l'on a $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\oplus A_n(\mathbb{R})=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, cad que toute matrice carrée d'ordre n ***se décompose de manière unique*** en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique. Pour les élèves « *ambitieux* », il est bien aussi de connaître cette décomposition : $M=\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(M+M^{\mathrm{T}}\right)}_{\text{symétrique}}+\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(M-M^{\mathrm{T}}\right)}_{\text{antisymétrique}}$

Autre chose intéressante : si on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du ***produit scalaire canonique***, cad $\left(A \mid B\right) = \sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}B_{ij} = \operatorname{tr}\left(A^{\mathrm{T}}\ B\right)$ Alors $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \perp A_n(\mathbb{R})$. Comme ils sont supplémentaires (le sev est orthogonal « *maximal* »), cela nous donne même $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^{\perp} = A_n(\mathbb{R}) \iff A_n(\mathbb{R})^{\perp} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Démontrons l'orthogonalité de ces 2 sev :

Méthode 1 :

$$\left(A|S\right)_{can} = \operatorname{tr}(S^{\mathrm{T}} A) = \underline{\operatorname{tr}(SA)} = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} S) = -\operatorname{tr}(AS) = \underline{-\operatorname{tr}(SA)} \Longrightarrow \left(A|S\right)_{can} = 0$$

Méthode 2 (par les coefficients) :

$$\begin{aligned}\left(A|S\right)_{can} &= \sum_{1\le i,j\le n} A_{ij}S_{ij} \overset{\textbf{(1)}}{=} \sum_{1\le i<j\le n} A_{ij}S_{ij} + \sum_{1\le j<i\le n} A_{ij}S_{ij} \overset{\textbf{(2)}}{=} \sum_{1\le i<j\le n} A_{ij}S_{ij} - \sum_{1\le j<i\le n} A_{ji}S_{ji} \\ &\overset{\textbf{(3)}}{=} \sum_{1\le i<j\le n} A_{ij}S_{ij} - \sum_{1\le i<j\le n} A_{ij}S_{ij} = 0\end{aligned}$$

- **(1)** Rappelons que pour une matrice ***antisymétrique***, $A_{ii} = 0$
- **(2)** $A_{ij} = -A_{ji}$.
- **(3)** Echange du « *nom* » des 2 variables muettes i et j dans la 2e somme.

Donc, pour terminer ce préambule en appelant p la projection orthogonale sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (orthogonale **au sens** du produit scalaire canonique), on a (rappelé plus haut) $p(M) = \frac{1}{2}\left(M + M^{\mathrm{T}}\right)$. On notera qu'on n'utilise pas la formule d'une projection orthogonale …

Revenons à l'exo et rappelons le cours sur la distance d'un vecteur a à un sev F dans un ev euclidien E :

$$d^2(a,F) = \inf_{f\in F} d^2(a,f) = \|a - p_F(a)\|^2 = \|a\|^2 - \|p_F(a)\|^2$$

Ici on nous donne $\displaystyle\inf_{M=(m_{ij})\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i - m_{ij})^2$. Il faut donc ***trouver*** a, F et le produit scalaire. F se « *voit* » immédiatement : c'est $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On doit « *deviner* » le produit scalaire canonique (sur les matrices carrées) et ensuite on vérifie bien que çà « *colle* » pour la distance euclidienne associée :

$$d^2(A,M) = \|A - M\|^2 = (A - M|A - M) = \sum_{1\le i,j\le n}(A_{ij} - M_{ij})^2$$

Par suite, on « *prend* » pour le vecteur a, la matrice $A = \left(i\right)_{1\le i,j\le n}$. Finalement :

$$\inf_{M=(m_{ij})\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i - m_{ij})^2 = d^2(A, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \|A\|^2 - \|p(A)\|^2$$

$$\begin{aligned}\|A\|_{can}^2 &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = n \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6} \\ \|p(A)\|_{can}^2 &= \|\frac{1}{2}(A + A^{\mathrm{T}})\|^2 = \frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le n}(i+j)^2 = \frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le n} i^2 + j^2 + 2ij \\ &= \frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le n} i^2 + \frac{1}{4}\sum_{1\le i,j\le n} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\Big(\sum_{j=1}^{n} j\Big) \\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i\,\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{n^2(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n^2(n+1^2)}{8}\end{aligned}$$

Je vous laisse faire la soustraction finale … Je rappelle la somme des entiers, des carrés des entiers, des cubes des entiers. Tout le monde doit connaître la première et la deuxième est au programme :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Ex 22 ✌ Soit $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrez projection orthogonale sur un plan.

$\mathbb{R}^3$ est usuellement muni de sa structure euclidienne canonique. Ce n'était pas dit dans l'énoncé, ce qui entraine qu'il était complètement impossible de démontrer que la projection était orthogonale. C'était pour voir si vous l'aviez vu…
Un calcul immédiat (laissé au lecteur) montre $A^2 = A$. Il s'ensuit que $p^2 = p$, cad p est une projection. Pour démontrer que p est une projection orthogonale, il y a ***2 méthodes*** : ***ou bien*** on montre que le « *sur* » est ***orthogonal*** au « *parallèlement* » de la projection, cad $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - p) \perp \operatorname{Ker} p$, ***ou bien*** on montre que l'endomorphisme est ***symétrique*** (cours de Spé).

Méthode 1 :

La matrice A est visiblement symétrique et comme la base canonique est ***orthonormée*** pour la structure euclidienne canonique, on en déduit que p est une ***projection orthogonale***. Notons que cette méthode ne donne pas « *sur* » quoi on projette. Il faudra donc ensuite utiliser une partie de la méthode 2. On pourrait aussi démontrer que $\operatorname{rg} A = 2$.

Méthode 2 :

Montrons $\operatorname{Ker} A \perp \operatorname{Im} A$. Usuellement, le noyau d'une matrice amène à un systéme :

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker} A \iff \left\{\begin{array}{rcl} 5x - 2y + z & = & 0 \\ -2x + 2y + 2z & = & 0 \\ x + 2y + 5z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -2z \\ z & = & z \end{array}\right.$$

C'est donc la droite dirigée par $U = (-1, -2, 1)$. Le théorème du rang donne $\dim \operatorname{Im} A = 2$. On « *remarque* » $-C_1 - C_2 + C_3 = 0$ (c'est normal, cela « *vient* » du noyau, je l'ai déjà dit en cours plusieurs fois…). Par conséquent $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$. En général, donner l'image d'une matrice équivaut à donner une base des colonnes, ce qui est fait ici. Pour démontrer l'orthogonalité, il faut et il suffit de démontrer l'orthogonalité des bases : $(U|C_1)_{can} = -5 + 4 + 1 = 0$ et $(U|C_2)_{can} = 2 - 4 + 2 = 0$. La projection est donc bien orthogonale et sur un plan (l'image).

Ex 23 ✌ Soit $\omega(a,b,c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique. Ecrivez la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}.\omega$.

Comme $\omega = (a,b,c)$ est un vecteur unitaire, c'est une base orthonormée de la droite $D = \operatorname{Vect}(\omega) = \mathbb{R}.\omega$. Par conséquent, la formule de la projection orthogonnale p sur cette droite est : $p(x) = (\omega|x)\omega$. Pour écrire la matrice de p dans la base canonique $\mathscr{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ on calcule :

$$p(\varepsilon_1) = p(1,0,0) = ((1,0,0)|(a,b,c))\omega = a\omega = (aa, ab, ac)$$

$$p(\varepsilon_2) = p(0,1,0) = ((0,1,0)|(a,b,c))\omega = b\omega = (ba, bb, bc)$$

$$p(\varepsilon_3) = p(0,0,1) = ((0,0,1)|(a,b,c))\omega = a\omega = (ca, cb, cc)$$

$\mathbb{R}^3$ étant muni de sa struture euclidienne canonique, on a appliqué le produit scalaire canonique. On peut écrire la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} aa & ba & ca \\ ab & bb & cb \\ ac & bc & cc \end{pmatrix}$$

Remarque : Cette matrice est symétrique ce qui n'est pas étonnant, puisqu'une projection orthogonale (comme une symétrie orthogonale) est un ***endomorphisme symétrique***.

IMT PSI 2023 (matrice projection orthogonale)

Ex 25 Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une BON de $\mathbb{R}^4$ et H le sev engendré par $a = e_1 + e_2 + e_3$ et $b = e_1 - e_4$

1) Construire une base orthogonale de H.

2) Donnez la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la projection orthogonale sur H.

3) Calculez $\inf_{x\in H} \|x - e_1\|$

1) Le principe pour construire une base orthogonale est d'utiliser le procédé d'orthonormalisation de Gramm-Schmidt, mais pour la dimension 2 on peut s'en passer. On procède comme ci : on prend $a' = a$ et $b' = b + \lambda a$ en choisissant λ pour que $b' \perp a' = a$. On applique dans le calcul que la base (e_i) est orthonormée soit $\left(e_i \,|\, e_j \right) = \delta_{ij}$ et on utilise, bien sûr, la bilinéarité du produit scalaire :

$$\left(b' \,|\, a' \right) = \left((1+\lambda)e_1 + \lambda e_2 + \lambda e_3 - e_4 \,|\, e_1 + e_2 + e_3 \right) = (1+\lambda)\left(e_1 \,|\, e_1 \right) + \lambda\left(e_2 \,|\, e_2 \right) + \lambda\left(e_3 \,|\, e_3 \right) = 1 + 3\lambda \implies \lambda = -\frac{1}{3}$$

On trouve $b' = \dfrac{2}{3}e_1 - \dfrac{1}{3}e_2 - \dfrac{1}{3}e_3 - e_4$

2) On applique la formule de la projection orthogonale avec $\left(\frac{a'}{\|a'\|}, \frac{b'}{\|b'\|}\right)$ BON de H. On calcule en préambule $\|a'\|^2 = \|e_1 + e_2 + e_3\|^2 = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 + \|e_3\|^2$ (par pythagore), soit $\|a'\|^2 = 3$ et de même $\|b'\|^2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 1 = \frac{5}{3}$. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^4$:

$$p(x) = \frac{1}{\|a'\|^2}\left(a' \,|\, x \right) a' + \frac{1}{\|b'\|^2}\left(b' \,|\, x \right) b' = \frac{1}{3}\left(a' \,|\, x \right) a' + \frac{1}{2}\left(b' \,|\, x \right) b'$$

Pour chacun des 4 vecteurs de la base canonique :

$$\begin{aligned}
p(e_1) &= \frac{1}{3}\left(e_1 + e_2 + e_3 \,|\, e_1 \right)(e_1 + e_2 + e_3) + \frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4 \,|\, e_1 \right)\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) \\
&= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) + \frac{2}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) = \frac{3}{5}e_1 + \frac{1}{5}e_2 + \frac{1}{5}e_3 - \frac{2}{5}e_4 \\
p(e_2) &= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) = \frac{1}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2 + \frac{2}{5}e_3 + \frac{1}{5}e_4 \\
p(e_3) &= \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3) - \frac{1}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) = \frac{1}{5}e_1 + \frac{2}{5}e_2 + \frac{2}{5}e_3 + \frac{1}{5}e_4 \\
p(e_4) &= -\frac{3}{5}\left(\frac{2}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_3 - e_4\right) = -\frac{2}{5}e_1 + \frac{1}{5}e_2 + \frac{1}{5}e_3 + \frac{3}{5}e_4
\end{aligned}$$

Je n'ai mis tous les détails que pour le premier e_1. On met ensuite les coordonnées en colonnes comme vous savez certainement. On peut éviter certains calculs en se rappelant que la matrice va être symétrique puisque matrice ***dans*** une BON d'un endomorphisme symétrique (les projections et symétries ***orthogonales***). Cela ne fait que 10 coeffs à calculer au lieu de 16. Cela évite aussi de faire des erreurs : si la matrice n'est pas symétrique, il y a des erreurs de calcul… Utile (de même que $P^2 = P$) j'ai moi-même effectué plusieurs erreurs de calcul… Pfou …La matrice recherchée est :

$$P = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Il faut reconnaître la distance à un sev pour appliquer le théorème du cours : on reconnaît $d(e_1, H)$. Le cours nous donne alors :

$$d^2(e_1, H) = \|e_1\|^2 - \|p(e_1)\|^2 = 1 - \frac{1}{25}(9+1+1+4) = \frac{10}{25} \quad \Longrightarrow \quad \inf_{x\in H}\|x - e_1\| = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

CCP PSI 2021 (calcul inf intégrale)

Ex 26 On pose $m = \inf \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos(x) - ax^2 - bx - c\right)^2 dx$.

1) Montrez l'existence de m.

2) Trouvez des réels a, b, c réalisant cet inf. (Ind:on pourra utiliser l'orthonormalisation de Gramm-Schmidt).

1) En se plaçant sur l'ev $\mathscr{C}^0([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ et le produit scalaire usuel associé $(f \,|\, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$. On sait que $d^2(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - g(x))^2\,dx$ est la distance euclidienne canoniquement associée et que m existe puisqu'il réalise alors la distance de $f(x) = \cos(x)$ au $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}_2[X]$, engendré par $(1, x, x^2)$.

2) Le cours nous apprend que $P(X) = aX^2 + bX + c$ réalisant l'inf est obtenu par la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_2[X]$. $(1, X, X^2)$ n'est pas une BON de $\mathbb{R}_2[X]$, pour se produit scalaire-là en tous cas, car par exemple, $(1 \,|\, X^2) = \frac{2}{3}\pi^3$. On ne peut alors appliquer la formule avec cette base, il faut utiliser le procédé de Schmidt pour en construire une (Q_0, Q_1, Q_2) :

- $Q_0 = \dfrac{1}{\|1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ car $\|1\|^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1^2\,dt = 2\pi$.
- $Q_1 = \dfrac{R_1}{\|R_1\|}$ avec $R_1 = X - (X \,|\, Q_0)\,Q_0$, $(Q_0 \,|\, X) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} t\,dt = 0$ et $\|X\|^2 = \dfrac{2\pi^3}{3}$. Finalement $Q_1 = \sqrt{\dfrac{3}{2\pi^3}}\,X$.
- $Q_2 = \dfrac{R_2}{\|R_2\|}$ avec $R_2 = X^2 - (X^2 \,|\, Q_0)\,Q_0 - (X^2 \,|\, Q_1)\,Q_1 = X^2 - \frac{\pi^2}{3}$

Par application de la formule, le projeté est alors :

$$(\cos(x) \,|\, Q_0)\,Q_0(X) + (\cos(x) \,|\, Q_1)\,Q_1(X) + (\cos(x) \,|\, Q_2)\,Q_2(X) = \boxed{-\frac{45}{2}X^2 + \frac{15}{2\pi^2}}$$

TPE PSI 2019 (éléments propres matrice orthogonale)

Ex 28

1) A quelle condition sur les réels p, q la matrice $A = \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & -p \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale?

2) Donnez les éléments propres de A

1) La matrice est orthogonale ssi les 3 colonnes forment une BON pour $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique. On constate que ces 3 vecteurs sont déjà orthogonaux 2 à 2. Comme $\|C_1\|^2 = \|C_3\|^2 = p^2 + q^2$ et $\|C_2\|^2 = 1$, il vient que $A \in O(3)$ ssi $p^2 + q^2 = 1$.

2) On peut remarquer que la matrice est symétrique réelle donc diagonalisable. On calcule le polynôme caractéristique pour trouver les vps (par ailleurs on sait que les seules vp réelles ***possibles*** d'une matrice orthogonale sont ± 1) :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - p & 0 & -q \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -q & 0 & \lambda + p \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda-1)(\lambda - p^2 - q^2) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

Remarque : Puisque l'endomorphisme canoniquement associé est symétrique et orthogonal, on pouvait espérer (mais ***Attention!*** ce n'est pas équivalent, c'est juste plus probable...) que c'est une symétrie orthogonale d'où calculer A^2 et vérifier immédiatement que c'est I. On retrouve ainsi un peu plus rapidement que les deux vp sont ± 1, comme pour toute symétrie.

Espace propre associé à 1 :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(1) \iff \begin{cases} (1-p)x - qz & = & 0 \\ -qx + (1+p)z & = & 0 \end{cases} \iff (1-p)x - qz = 0$$

On va un peu plus vite dans la résolution du système si on a remarqué que les deux plans sont les mêmes puisqu'on sait, par diagonalisabilité, $\dim E(1) = \mu(1) = 2$!

Espace propre associé à -1 : Il est ici maladroit de le calculer puisque le cours nous apprend qu'il est orthogonal à $E(1)$: c'est donc la droite dirigée par le vecteur $(1-p, 0, -q)$

ENSAM PSI 2015 (inégalités sur les matrices orthogonales) ✷ ☜

Ex 30 Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ de coefficients m_{ij}. Montrez que $\left|\sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}\right| \le n \le \sum_{1\le i,j\le n} \left|m_{ij}\right| \le n^{3/2}$

On va utiliser deux produits scalaires canoniques ici, celui sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et celui sur $\mathbb{R}^n \simeq \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ce sont :

$$\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \big(A\,|\,B\big) = \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} B) \qquad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n,\ \langle X, Y\rangle = \sum_{1\le i\le n} x_i y_i = X^{\mathrm{T}} Y$$

On peut noter que le 2e produit scalaire est aussi égal à $\operatorname{tr}(X^{\mathrm{T}} Y)$ parce que c'est une matrice 1×1 mais c'est sans intérêt. On va noter de la même façon, les 2 normes euclidiennes correspondantes, cad $\|.\|$. On va utiliser aussi deux fois l'inégalité de **Cauchy**[3]**-Schwarz**[4] : $(x|y) \le \|x\|\,\|y\|$ avec égalité ssi les 2 vecteurs x et y sont colinéaires positifs. On a aussi d'ailleurs $|(x|y)| \le \|x\|\,\|y\|$ avec égalité ssi les 2 vecteurs x et y sont colinéaires.

M étant une matrice orthogonale, la norme (euclidienne canonique) de chaque vecteur colonne C_j vaut 1 , soit pour tout $1 \le j \le n$, $\|C_j\|^2 = \sum_{i=1}^n m_{ij}^2 = 1$. Par suite :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n m_{ij}^2 = \sum_{j=1}^n 1 = n = \sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}^2 = \|M\|^2$$

On peut écrire $|m_{ij}| = m_{ij} \times \varepsilon_{ij}$ avec $\varepsilon_{ij} = \pm 1$. Posons $J = \left(\varepsilon_{ij}\right)_{1\le i,j\le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ensuite :

$$\big(M\,|\,J\big) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{ij} \times \varepsilon_{ij} = \sum_{1\le i,j\le n} |m_{ij}| \overset{(1)}{\le} \|M\| \times \|J\| \overset{(2)}{=} \sqrt{n} \times n \qquad (E_1)$$

- **(1)** Inégalité de **Cauchy**[3]**-Schwarz**[4]
- **(2)** On calcule $\|J\|^2 = \sum_{1\le i,j\le n} (\varepsilon_{ij})^2 = \sum_{1\le i,j\le n} 1 = n^2$

Posons maintenant $U = (1, \dots, 1)$, puis :

$$\left|\langle MU, U\rangle\right| = \left|\sum_{i=1}^n [MU]_i U_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n [MU]_i\right| = \left|\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n M_{ik} \times 1\right| = \left|\sum_{1\le i,k\le n} M_{ik}\right| \overset{(1)}{\le} \|MU\|\,\|U\| \overset{(2)}{=} \|U\|^2 = n \qquad (E_2)$$

3. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe, en théorie des groupes.
4. **Hermann Schwarz** : mathématicien allemand (1843-1921). Elève de Weierstrass. Analyse fonctionnelle.

3. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe, en théorie des groupes.
4. **Hermann Schwarz** : mathématicien allemand (1843-1921). Elève de Weierstrass. Analyse fonctionnelle.

- **(1)** Inégalité de **Cauchy[3]-Schwarz[4]**
- **(2)** M étant un matrice orthogonale représente (dans une bon) un endomorphisme orthogonal qui ***conserve la norme*** d'où $\|MU\| = \|U\|$.

La dernière inégalité s'obtient en remarquant que puisque la norme (euclidienne canonique) de chaque colonne C_j vaut 1, cad $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}^2 = 1$, on en déduit $m_{ij}^2 \leq 1$, puis $|m_{ij}| \leq 1$. Il suit :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{ij}| \overset{(1)}{\underset{\sim}{\geq}} \sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{ij}|^2 = \|M\|^2 \overset{(2)}{\underset{\sim}{=}} n \qquad (E_3)$$

- **(1)** Comme $|m_{ij}| \leq 1$, il vient $m_{ij}^2 \leq |m_{ij}|$
- **(2)** Egalité déjà calculée un peu plus haut.

Remarques

- Pour la première inégalité (E_1), il y a égalité ssi il y a égalité avec Cauchy-SChwarz (sans valeur absolue) donc ssi M et J sont colinéaires positifs. Ceci nécessite que les coefficients soient ***tous*** des $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour que les colonnes soient de norme 1. Réciproquement, ce sont bien des matrices orthogonales à condition que n soit pair (et même multiple de >4 pour $n \geq 3$), les + ou - soient « *équilibrés* » pour que les colonnes soient orthogonales entre elles. Le lecteur vérifiera qu'il y en a 8 pour une matrice d'ordre 2 (coefficients $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$)). Ce sont les matrices de Hadamard (colinéaires à).

- Pour la deuxième inégalité (E_2) ; là encore, elle s'appuie sur **Cauchy[3]-Schwarz[4]** avec valeur absolue. L'égalité a lieu pour MU et $U \neq 0$ colinéaires, ce qui se traduit ***exactement par U vecteur propre*** de M, puis la somme des lignes égales, puisque la i-ème coordonnée de MU est la somme de la i-ième ligne. On trouve par exemple toutes les matrices de permutations (un seul 1 par ligne et par colonne) et leurs opposées

CCP PSI 2016 (cns isométrie) ✌

Ex 32 Pour $a \neq 0$ donné dans un ev euclidien E, déterminez les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $u(x) = \alpha\big(x \,|\, a\big)\,a - x$ est une isométrie. ***Rajout à l'oral originel*** : les reconnaître

On calcule : $\|u(x)\|^2 = \big(\alpha(a|x)a - x \,|\, \alpha(a|x)a - x\big) = \alpha^2(x|a)^2\big(a\,|\,a\big) - 2\alpha(a|x)\big(a\,|\,x\big) + \big(x\,|\,x\big)$, par bilinéarité.
Par suite, $u \in O(E)$ ssi u conserve la norme ssi pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$ ssi :

$$\forall x \in E,\ \alpha\big(a\,|\,x\big)^2\big(\,\alpha\|a\|^2 - 2\,\big) = 0 \iff \alpha = 0 \text{ ou } \|a\| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha}}$$

Etant donné que $(a|x) = 0$ n'est pas possible pour tout x mais que pour $x \in \mathrm{Vect}(a)^{\perp}$ $(a \neq 0)$.

Remarque : Pour $\alpha = 0$, on reconnaît évidemment la symétrie orthogonale par rapport à $\{0\}$ (symétrie « *centrale* » par rapport à 0 pourrait-on dire). Pour l'autre valeur, on constate pour $x \perp a$, $u(x) = -x$ et , pour x colinéaire à a, il faut et il suffit de regarder la valeur en a par linéarité : $u(a) = \alpha\|a\|^2 a - a = a$. Comme $u_{/\mathrm{Vect}(a)^{\perp}} = -\mathrm{Id}$ et $u_{/\mathrm{Vect}(a)} = \mathrm{Id}$, u est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathrm{Vect}(a)$.

Ex 33 ***Matrice de Householder[5]*** : Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et une matrice colonne $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrez que l'endomorphisme de matrice $I - 2VV^{\mathrm{T}}$ représente une symétrie, puis montrez qu'elle orthogonale et donnez ses caractéristiques.

Je rappelle que VV^{T} est une matrice de rang 1 où toutes les colonnes sont colinéaires à V, tandis que $V^{\mathrm{T}}V$ représente le produit scalaire canonique $\left(V \mid V\right)_{can}$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ou, de manière équivalente, l'expression matricielle du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Méthode 1 :

Soit F un sev de E de dimension finie ($= \mathbb{R}^n$ ici). On sait $F \oplus F^{\perp} = E$, cad pour tout $x \in E$, on peut écrire $x = f + g$ avec $f \in F$ et $g \in F^{\perp}$, cad $f \perp g$. Je rappelle que p_F, la projection orthogonale sur F est définie par $p_F(x) = f$, la projection orthogonale p' sur $F^{\perp}$ est définie par $p'(x) = g$, que $p_F + p' = Id$ et que la symétrie orthogonale s_F par rapport à F vérifie $s_F(x) = f - g = f + g - 2f = \left(Id - 2p_F\right)(x)$, cad $s_F = Id - 2p_F$.

D'autre part V étant de norme 1, (V) est une ***base orthonormée*** de la droite $D = \operatorname{Vect}(V)$. Une formule du cours nous donne que la projection orthogonale p sur la droite D s'écrit : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ p_D(X) = \left(X \mid V\right)_{can} V$ expression qui matriciellement s'écrit :

$$\operatorname{Mat}(p_D(X)) = (XV)^{\mathrm{T}}\ V = V\,(XV)^{\mathrm{T}} = VV^{\mathrm{T}}X \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Mat}(p_D) = VV^{\mathrm{T}}$$

On termine par $I - 2VV^{\mathrm{T}} = \operatorname{Mat}(\operatorname{Id} - 2p_D) = \operatorname{Mat}(S_{D^{\perp}})$. C'est donc la matrice de la ***symétrie orthogonale*** par rapport à l'hyperplan $D^{\perp} = \operatorname{Vect}(V)^{\perp}$ (l'hyperplan « *normal* » à V). Les symétries orthogonales par rapport à des hyperplans s'appellent des ***réflexions*** (l'hyperplan est comme un « *miroir* »).

Méthode 2 :

$S = I - 2VV^{\mathrm{T}}$ est la ***matrice d'une symétrie*** puisque :

$$S^2 = \left(I - 2VV^{\mathrm{T}}\right)^2 \overset{\textbf{(1)}}{=} I^2 - 4VV^{\mathrm{T}} + 4(VV^{\mathrm{T}})^2 = I - 4VV^{\mathrm{T}} + 4V(V^{\mathrm{T}}V)V^{\mathrm{T}} \overset{\textbf{(2)}}{=} I - 4VV^{\mathrm{T}} + 4VV^{\mathrm{T}} = I$$

- **(1)** I ***commutant*** avec toute matrice, on a pu appliquer la formule du binôme de **Newton**[6].
- **(2)** Il faut reconnaître $V^{\mathrm{T}}V = \|V\|^2_{can} = 1$ car V est unitaire par hypothèse

Pour démontrer symétrie orthogonale, il faut et il suffit de démontrer que la matrice est symétrique, ce qui est immédiat :

$$S^{\mathrm{T}} = \left(I - 2VV^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = I - 2(VV^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = I - 2(V^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}} = S$$

Pour trouver le « *par rapport* », on cherche l'espace propre associé à 1, les vecteurs invariants, $E(1) = \operatorname{Ker}(I - S)$

$$X \in E(1) \Longleftrightarrow SX = X \Longleftrightarrow (I - 2VV^{\mathrm{T}})X = X \Longleftrightarrow X - 2VV^{\mathrm{T}}X = X \Longleftrightarrow VV^{\mathrm{T}}X = 0 \Longleftrightarrow V(V|X) = 0 \Longleftrightarrow X \perp V$$

On retrouve bien la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan orthogonal à V, $H = \operatorname{Vect}(V)^{\perp}$.

CCP PSI 2019 (matrice orthogonale vérifiant équation) ☜

Ex 37 Soit $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{1}{3}(I_n + 2M) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\left(Mx \mid x\right) = \|x\|^2$.

2) Que peut-on en déduire sur M ?

1) On a par hypothèse, $M^{\mathrm{T}}M = I$ et aussi :

$$I = \left(\frac{1}{3}(I_n + 2M)\right)^{\mathrm{T}} \left(\frac{1}{3}(I_n + 2M)\right) = \frac{1}{9}\left(I_n + 2M^{\mathrm{T}}\right)\left(I_n + 2M\right) = \frac{1}{9}\left(I + 2(M^{\mathrm{T}} + M) + 4I\right) \quad \Longrightarrow \quad M^{\mathrm{T}} + M = 2I$$

On se place dans une ***BON*** pour utiliser l'expression canonique du produit scalaire par rapport aux coordonnées (le produit

5. **Alston Householder** : américain (1904-1993). Contributions en analyse numérique, Méthode et matrice éponyme.
6. **Isaac Newton** : anglais (1643-1727). Partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Connu pour la formule du binôme et la méthode éponyme d'approximation des zéros d'une fonction.

scalaire de $\mathbb{R}^n$ n'est pas précisé) :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \big(MX|X\big) = (MX)^{\mathrm{T}}\ X = X^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} X \overset{(1)}{=} \left(X^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} X\right)^{\mathrm{T}} = X^{\mathrm{T}} M X$$
$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{2} X^{\mathrm{T}}(M + M^{\mathrm{T}})X = X^{\mathrm{T}} I X = X^{\mathrm{T}} X = \|X\|^2$$

- **(1)** Comme la matrice $X^{\mathrm{T}} M^{\mathrm{T}} X$ est une matrice 1×1, elle est égale à sa transposée
- **(2)** On utilise si $x = a = b$, alors $x = \frac{1}{2}(a+b)$.

2)

Méthode 1 : On peut se rappeler que l'angle (sans le sens) est donné par $\cos\theta = \dfrac{\big(x|y\big)}{\|x\|\,\|y\|}$. On en tire ici que l'angle (de mesure) θ entre MX et X vérifie (s'ils sont non nuls)

$$\cos\theta = \frac{\big(MX|X\big)}{\|MX\|\,\|X\|} = \frac{\big(MX|X\big)}{\|X\|\,\|X\|} = 1$$

On a utilisé $\|MX\| = \|X\|$ ***car*** M orthogonale. donc $\theta \equiv 0\ [2\pi]$, soit $MX = \lambda X$ ***avec*** $\lambda \geq 0$ puis par même norme, $MX = X$ ***pour tout*** X donc $M = I$.

Méthode 2 : On utilise Cauchy-Schwarz : $\forall x, y,\ \big(x|y\big) \leq \|x\|\,\|y\|$. Ici, cela amène :

$$\|X\|^2 = \big(MX|X\big) \leq \|MX\|\,\|X\| = \|X\|^2$$

Il y a donc égalité dans Cauchy-Schwarz, soit $MX = \lambda X$ avec $\lambda \geq 0$ (car il n'y a pas de valeur absolue) puis comme plus haut $\lambda = 1$ puis $M = I$.

Ex 41 ✌ Montrez le seul endomorphisme symétrique vérifiant $\forall x \in E \quad \big(x|f(x)\big) = 0$ (cad $f(x) \perp x$) est l'application nulle par deux méthodes : le théorème spectral et en « *considérant* » $x + y$)

Méthode 1 (par le théorème spectral) : Soit f un endomorphisme symétrique vérifiant $\forall x \in E,\ = \big(f(x)|x\big) = 0$, cad pour tout vecteur x, $f(x) \perp x$. Soit λ une valeur propre de f, alors il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. Il suit :

$$\big(f(x)|x\big) = \big(\lambda x|x\big) = \lambda\|x\|^2 = 0$$

Comme $x \neq 0$, on en déduit $\lambda = 0$. ***Attention*** au raisonnement, on n'a pas démontré que 0 est valeur propre! Seulement que 0 est la seule valeur propre possible. Ceci dit, on sait que f a n valeurs propres puisqu'est diagonalisable, donc 0 est valeur propre de multiplicité n. Pour toute matrice S symétrique représentant f dans une base orthonormée, le ***théorème spectral*** nous apprend qu'il existe une matrice orthogonale P telle que $S = PDP^{-1} = PDP^{\mathrm{T}} = P0P^{\mathrm{T}} = 0$.

Méthode 2 (indication de l'énoncé) : On écrit :

$$0 = \big(f(x+y)|x+y\big) = \big(f(x)|y\big) + \big(f(x)|x\big) + \big(y|f(y)\big) + \big(x|f(y)\big) \quad \Longrightarrow \quad \big(f(x)|y\big) = -\big(x|f(y)\big)$$

Comme on sait $\big(f(x)|y\big) = \big(x|f(y)\big)$, il vient pour tous x, y, $\big(f(x)|y\big) = 0$, donc $f(x) \in E^{\perp} = \{0\}$, soit f est l'application nulle.

CCINP PSI 2022-2014-2012 | CCEM PSI 2015 (inégalité trace d'une matrice symétrique)

Ex 43 Soit A une matrice symétrique réelle. Montrez $(\operatorname{tr} A)^2 \leq \operatorname{rg} A\ \operatorname{tr}(A^2)$.

A étant ***symétrique réelle***, on lui applique le théorème spectral : il existe une matrice P orthogonale et une matrice $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ telles que $A = PDP^{\mathrm{T}}$. On a $(\operatorname{tr} A)^2 = (\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)^2 = (\operatorname{tr} D)^2$. On sait aussi $\operatorname{rg} A = n - \dim \operatorname{Ker} A$. Comme A est ***diagonalisable***, on a $\dim \operatorname{Ker} A$ est la ***multiplicité*** de 0 dans le polynôme caractéristique. ***Par conséquent***, $\operatorname{rg} A$ est le ***nombre de valeurs propres non nulles***.

Supposons les vp numérotées de telle façon que les r premières vp soient non nulles, cad $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Ensuite

$$\left(\operatorname{tr} A\right)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\Big)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k\Big)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{r} 1 \times \lambda_k\Big)^2 \overset{(*)}{\leq} \Big(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{r} 1^2\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\Big) \operatorname{rg} A = \operatorname{tr}\left(A^2\right) \operatorname{rg} A$$

En (*), on a appliqué l'inégalité de **Cauchy**[3]**-Schwarz**[4] au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, cad :

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k\Big)^2$$

Remarques :

• L'inégalité demandée provenant uniquement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a même la condition d'égalité qui est le « *vecteur* » des λ_k colinéaire au « *vecteur* » des 1. En se rappelant qu'une matrice diagonalisable de valeurs propres 0 et 1 ne peut être qu'une projection P, on en déduit que l'égalité est ***réalisée uniquement*** pour les αP, avec P matrice de projection. En fait pour une projection p, $\operatorname{tr} p^2 = \operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

• Remarquons que $\operatorname{tr}(A^2) = 0$ ssi toutes les valeurs propres sont nulles, ce qui par la ***diagonalisabilité***, amène A nulle, d'où l'hypothèse de l'énoncé qui permet de diviser ensuite par $\operatorname{tr}(A^2)$.

• Pour une matrice quelconque, le rang ***n'est pas en général*** le nombre de valeurs propres non nulles. Il suffit de prendre une matrice triangulaire « *stricte* », cad avec des 0 sur la diagonale. Le nombre de valeurs propres non nulles est 0, par contre, le rang peut prendre toutes les valeurs entre 0 et $n-1$ selon le choix des autres coefficients (mais pas n, pourquoi ?)

Mines-Ponts PSI 2022 (inégalité de Kantorovitch partielle) ✷

Ex 45 Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est définie positive si $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}^{+*}$.

1) Soit A définie positive. Montrez il existe une unique matrice B symétrique définie positive tq $B^2 = A$.

2) Soit $(c_1, \dots, c_n)$ une BON de vecteurs propres de A. Exprimer $\left(AX|X\right)$ en fonction de la décomposition de X dans cette base.

3) Montrez, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|^4 \leq \left(AX|X\right)\left(A^{-1}X|X\right)$. Dans quels cas a-t-on égalité ?

1) Montrons que toute matrice symétrique positive A possède une unique racine carrée symétrique positive (c'est un peu plus général que l'énoncé). Je vous laisse traiter seul avec définie, il n'y a pas grand changement.

Existence : On utilise le théorème spectral : $A = PDP^{-1} = PDP^{\mathrm{T}}$ avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D avec sur sa diagonales, les vp $\lambda_i \geq 0$. On pose alors $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. On écrit alors $A = P\Delta^2 P^{\mathrm{T}} = P\Delta P^{\mathrm{T}} P\Delta P^{\mathrm{T}}$. La matrice $B = P\Delta P^{\mathrm{T}}$ est symétrique, car $(P\Delta P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = P\Delta^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} = B$, et positive, car ses vp sont les $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$, et vérifie $B^2 = A$

Unicité :

Méthode 1 : Soient $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une autre matrice vérifiant $C^2 = A$. Dans une 1re étape, on suppose A, B, C co-diagonalisables, on le démontre après. Elles sont diagonalisables car symétriques ! Il existe donc P inversible tel que $B = PD_BP^{-1}$, $C = PD_CP^{-1}$ et $A = PDP^{-1}$. De $B^2 = C^2 = A$, il suit $D_B^2 = D_C^2 = D$ et donc par positivité, nécessairement le ie coefficient diagonal de D_B et D_C est la racine carrée du λ_i de D, d'où finalement $D_B = D_C$, puis $B = C$.

3. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe, en théorie des groupes.

4. **Hermann Schwarz** : mathématicien allemand (1843-1921). Elève de Weierstrass. Analyse fonctionnelle.

Rappelons que des matrices diagonalisables sont co-diagonalisables ssi elles commutent (ce n'est pas du cours mais à savoir quand même, voir exo41 corrigé de la feuille 5). B commute avec A car $BA = B^3 = AB$. On peut aussi dire car A est un polynôme en B. Idem pour C. Pour établir que B et C commutent, nous allons montrer que B est un polynôme en A (et donc en C). A et B sont co-diagonalisables

$$\exists Q \in \mathbb{R}[X], B = Q(A) \iff PD_BP^{-1} = Q(PDP^{-1}) = PQ(D)P^{-1} \iff D_B = Q(D) \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \forall 1 \leq i \leq n,\ \sqrt{\lambda_i} = Q(\lambda_i)$$

Pour trouver ce polynôme, il faut utiliser la théorie des polynômes de Lagrange, je vous conseille d'aller réviser ce chapitre. Considérons $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ les $p+1$ vps ***distinctes*** de A (on les a réindicés) et $(L_0, \dots, L_p)$ les polynômes de Lagrange associés. Alors la polynôme $Q(X) = \sum_{i=0}^p \sqrt{\lambda_i} L_i(X)$ convient.

Méthode 2 : On raisonne avec les morphismes. Soit c un endomorphisme symétrique positif vérifiant $c^2 = a$, avec $a \in S^+(E)$. a est diagonalisable de vps distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$. On a alors $E = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_p)$. Comme c commute avec a, chaque espace propre $E_i = E(\lambda_i)$ est stable par c : notons c_i l'endomorphisme induit par c. a_i l'endomorphisme induit par a sur E_i vérifie $a_i = \lambda_i \mathrm{Id}$! (je vous laisse y réfléchir). c_i est diagonalisable (car symétrique) et, vu en cours en raisonnant dans $\mathbb{C}$, les vps de c_i^2 sont les carrés des vps de c_i, par conséquent, comme elles sont réelles et positives, ce ne peut-être que $\sqrt{\lambda_i}$! Par suite, on sait que c_i ne peut-être que $\sqrt{\lambda_i}\,\mathrm{Id}_{E_i}$. c étant défini de manière unique sur chaque E_i de la somme directe égale à E est donc unique. (et on a l'existence aussi).

Remarques

- Il existe des matrices, mêmes symétriques, qui n'ont aucune racine carrée, par exemple $D\mathrm{iag}(-1, 1)$ (je vous laisse y réfléchir). par contre elle admet une racine carrée complexe.
- La matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ n'admet aucune racine carrée, même dans $\mathbb{C}$.

2) Si $X = \sum_{i=1}^n x_i c_i$, avec $Ac_i = \lambda_i c_i$ et (c_i) BON,

$$(AX|X) = \Big(\sum_{i=1}^n x_i A c_i \Big| \sum_{i=1}^n x_i c_i \Big) = \Big(\sum_{i=1}^n x_i \lambda_i c_i \Big| \sum_{j=1}^n x_j c_j \Big) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \lambda_i x_i x_j (e_i | e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$$

3) En se plaçant dans la BON $(c_1, \dots, c_n)$, la norme euclidienne a son expression canonique.

$$\|X\|^4 = \Big(\sum_{i=1}^n x_i^2 \Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} x_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} x_i \Big)^2 \overset{(1)}{\leq} \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \Big)\Big(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} x_i^2 \Big) \overset{(2)}{=} (AX|X)(A^{-1}X|X)$$

- **(1)** Inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
- **(2)** Formule de la Q2 et la même s'applique pour A^{-1} puisque des vecteurs propres de A sont des vecteurs propres de A^{-1}.

Comme cette démonstration n'a qu'une inégalité, il y a égalité ssi cette inégalité (de Cauchy-schwarz) est une égalité cad ssi les 2 vecteurs sont colinéaires cad ssi $(\sqrt{\lambda_i} x_i)_i$ col. à $(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} x_i)_i$ ssi il existe une constante C tq pour tout i, $(\sqrt{\lambda_i})^2 = C$ ssi $A = CI$ homothétie.

Centrale PSI 2021 (adjoint intégral) ✶

Ex 47 On note $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $E = \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire usuel $(f|g) = \int_0^{\pi/2} fg$. Pour $f \in E$, on définit 2 fonctions $A(f)$ et $B(f)$ sur I en posant $A(f)(x) = \int_0^x f$ et $B(f)(x) = \int_x^{\pi/2} f$.

1) Montrez que $\forall f, g \in E$, $(A(f)|g) = (f|B(g))$. En déduire que les vp de $B \circ A$ sont positives.

2) Montrez $\forall f \in E, \forall x \in I$, $(A(f)(x))^2 \leq x \int_0^x f(t)^2\,dt$. En déduire l'existence d'un réel K indépendant de$f$ tq $\|A(f)\| \leq K\|f\|$.

3) Montrez que A est un endomorphisme continu de E.

1)

$$\big(A(f)\,|\,g\big)=\int_0^{\pi/2}g(x)\,dx\int_0^x f(t)\,dt \overset{(1)}{=} \Big[-\int_0^x f\int_x^{\pi/2}g\Big]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}f(t)\,dt\int_t^{\pi/2}g(x)\,dx=\int_0^{\pi/2}f(t)\,dt\int_t^{\pi/2}g(x)\,dx=\big(f\,|\,B(g)\big)$$

- **(1)** On effectue une Ipp avec $u=\int_0^x f \quad v'=g(x) \quad u'(x)=f(x) \quad v=-\int_x^{\pi/2} g$

Remarque : Si on regarde le 2e et le 3e égal, on a interverti l'ordre d'intégration entre x et t, ainsi le domaine $\left\{0\le x\le \frac{\pi}{2}\ 0\le t\le x\right\}$ « *devient* » $\left\{0\le t\le \frac{\pi}{2}\ t\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}$; C'est le théorème de Fubini (pour les intégrales doubles), utilisé sans doute en Physique, mais il n'est pas au programme (ni de MP non plus d'ailleurs) …

Si λ est une vp de $B\circ A$, $(B\circ A)(f)=\lambda f$ avec $f\neq 0$ et $\big((B\circ A)(f)\,|\,f\big)=\lambda\|f\|^2=\big(A(f)\,|\,A(f)\big)=\|A(f)\|^2\geq 0$. Comme $f\neq 0$, $\|f\|\neq 0$ et donc $\lambda\geq 0$

Remarque : Si on était en dimension finie, via une BON, en passant aux matrices notées A' et B', on aurait $B'={A'}^{\mathrm{T}}$, puis la matrice de $B\circ A$ est ${A'}^{\mathrm{T}}A'\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ comme déjà vu en exo. Un élève « *ambitieux* » peut même considérer que c'est du cours.

2)

$$\big(A(f)(x)\big)^2=\Big(\int_0^x f(t)\,dt\Big)^2=\Big(\int_0^x f(t)\times 1\,dt\Big)^2\overset{(1)}{\leq}\int_0^x 1^2\,dt\times\int_0^x f^2=x\int_0^x f^2$$

- **(1)** Inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée au produit-scalaire $\int_0^x fg$ (x est considéré fixé pour le raisonnement)

$$\|A(f)\|^2=\int_0^{\pi/2}\big(A(f)(x)\big)^2\,dx\overset{(1)}{\leq}\int_0^{\pi/2}x\int_0^x f^2\,dx\overset{(2)}{\leq}\int_0^{\pi/2}x\int_0^{\pi/2}f^2\,dx=\frac{\pi^2}{8}\,\|f\|^2$$

- **(1)** Croissance de l'intégrale (bornes ordonnées) et inégalité précédente.
- **(2)** Encore croissance de l'intégrale et l'application $x\longrightarrow\int_0^x f^2$ croissante car $f^2\geq 0$ car ***réelle***.

3) On en déduit immédiatement que A est lipschitzienne donc continue car :

$$\|A(f)-A(g)\|=\|A(f-g)\|\leq\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,\|f-g\|$$

Reste à prouver endomorphisme et surtout endo (laissé au lecteur, c'est le théorème fondamental de l'analyse)

Remarques

- Une application linéaire f est continue ***ssi*** elle est continue en 0 ***ssi*** elle est lipschitzienne ***ssi*** il existe une constante K tq pour tout x, $\|f(x)\|\leq K\|x\|$. On peut considérer que c'est du cours.
- Toute application linéaire est continue en dimension finie.

Ex 48 Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une base d'un ev euclidien. On pose $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\big(u_k\,|\,x\big)\,u_k$

1) Que vaut $f(x)$ si la base est orthonormée ?

2) Montrez que dans le cas général l'endomorphisme f est symétrique défini positif.

---

1) Si on sait bien son cours, lorsque la base est orthonormée, le scalaire $\big(u_k\,|\,x\big)$ est la coordonnée x_k selon u_k. Par suite, $f(x)=x$.

2) Montrons d'abord f endomorphisme symétrique. Pour tous x, y de E

$$\big(f(x)\,|\,y\big) = \Big(\sum_{k=1}^{n}(u_k|x)u_k\,|\,y\Big) \overset{(1)}{\widetilde{=}} \sum_{k=1}^{n}(u_k|x)\big(u_k\,|\,y\big) \overset{(2)}{\widetilde{=}} \big(f(y)\,|\,x\big) \overset{(3)}{\widetilde{=}} \big(x\,|\,f(y)\big)$$

- **(1)** Découle de la linéarité à gauche du produit scalaire.
- **(2)** L'expression obtenue étant symétrique, on peut inter-changer les lettres dans l'expression du départ
- **(3)** La symétrie du produit scalaire…

Montrons que les valeurs propres sont strictement positives. Soit λ réel tq $f(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$. Alors en ré-utilisant la formule plus haut $\big(f(x)\,|\,x\big) = \sum_{k=1}^{n}\big(u_k\,|\,x\big)^2 \underset{(1)}{\widetilde{\geq}} 0$ et d'autre part $\big(f(x)\,|\,x\big) = \big(\lambda x\,|\,x\big) = \lambda\|x\|^2 > 0$. De $x \neq 0$, il résulte $\lambda > 0$.

La positivité de (1) étant immédiate, il suffit de prouver que la quantité est non nulle (pour $x \neq 0$). Par la contraposée : ***si elle était nulle***, par positivité, on aurait pour tous $1 \leq k \leq n$, $(u_k|x) = 0$. (Note : ***si la base était orthonormée***, comme ce seraient les coordonnées de x, on aurait immédiatement $x = 0$, ***mais pas ici***). Cette nullité amène $x \perp u_k$ ***pour tout*** k puis $x \in \operatorname{Vect}(u_k)^{\perp}_{\leq k \leq n}$ et comme c'est une base de E, cet ensemble est $E^{\perp} = \{0\}$.

CCINP PSI 2023 -2022 | Mines-Ponts PSI 2023 (endomorphismes de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) ✷

Ex 50 Soient E un espace euclidien et $u \in S(E)$.

1) ~~Montrez $\forall x \neq 0$, $\big(u(x)|x\big) > 0 \iff \operatorname{Sp} u \subset \mathbb{R}^{+*}$. Un endo. symétrique vérif. ces conditions est dit défini positif.~~ [**Mines :** Question absente] . On note alors $s \in S^{++}(E)$

2) Si a et b sont 2 endo. symétriques de $S^{++}(E)$, montrez il existe un unique $c \in \mathcal{L}(E)$ tq $b = a \circ c + c \circ a$..

3) Montrez que c est symétrique défini positif.

4) [**Mines :** On prend $n = 2$. Montrez il existe $c, a \in S^{++}(E)$ avec $a \circ c + c \circ a$ à spectre non inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.]

A REVOIR CAR GROSSE ERREUR

1) Une question de cours qui tombe souvent… Je vous la retraite par les endomorphismes. Dans le cours elle est traitée par les matrices, sans doute un peu plus facile. u est un endomorphisme symétrique.

Par hypothèse, pour tout vecteur $x \neq 0$, $\big(u(x)\,|\,x\big) > 0$. En prenant, ***en particulier*** un vecteur propre $x \neq 0$ associé à une valeur propre λ quelconque, il vient : $\big(u(x)\,|\,x\big) = \big(\lambda x\,|\,x\big) = \lambda\|x\|^2 > 0$ et ***comme*** $\|x\| \neq 0$, il suit $\lambda > 0$.

Si u possède des vp toutes > 0. Par théorème spectral, il existe une BON de vecteur propres (e_i) vérifiant $u(e_i) = \lambda_i e_i$. Ensuite pour un vecteur ***quelconque*** x de coordonnées x_i ($x_i = \big(e_i\,|\,x\big)$ c'est du cours) :

$$\big(u(x)\,|\,x\big) = \Big(u\Big(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Big)\,\Big|\,\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\lambda_ie_i\,\Big|\,\sum_{j=1}^{n}x_je_j\Big) = \sum_{1\leq i,j\leq n}\lambda_ix_ix_j\big(e_i\,|\,e_j\big) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i^2 \geq 0$$

On a utilisé BON qui se traduit par $\big(e_i\,|\,e_j\big) = \delta_{ij}$. Cette somme est positive car les x_i^2 le sont par « *réalité* ». Elle est même strictement positive pour $x \neq 0$ car sa nullité impose (comme $\lambda_i > 0$) tous $x_i = 0$, soit $x = 0$.

2) C'est une question difficile. On raisonne matriciellement. Par hypothèse $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Quand on a la question : montrez il existe un unique …, il faut d'abord penser à prouver bijection. On considère donc (regardez le lien avec la question) l'application $\phi : M \longrightarrow AM + MA$ clairement endomorphisme de l'ev $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on cherche son noyau.

Si $AM + MA = 0$, $AM = -MA$ donc M anti-commute avec A. Comme lorsque les matrices commutent (je ne refais pas la démo ici, c'est du cours), les espaces propres $E_A(\lambda)$ de A sont stables par M. Si on co-restreint (endomorphisme induits) à ce sev, a est l'homothétie de rapport λ (je vous laisse y réfléchir), et alors cela s'écrit $\lambda\,\mathrm{Id}\circ m_\lambda = -m_\lambda \circ \lambda\,\mathrm{Id}$, soit $m_\lambda = 0$. L'endomorphisme m est donc nul sur $E_A(\lambda)$ (A REVOIR SAUF SI $\lambda = 0$) et comme la matrice A est diagonalisable, la somme directe des $E_A(\lambda)$, pour λ parcourant le spectre de A, vaut E, et donc $m = 0$, ou $M = 0$, $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$. On en déduit que l'application ϕ est bijective d'où le résultat de l'énoncé sur l'existence et l'unicité de c endomorphisme.

Remarque : On peut noter que l'hypothèse U symétrique ne sert pas ici, ni A symétrique non plus, seulement A diagonalisable est utile.

3) il faut constater que si $\phi(C) = B$, en se servant ici de A et B symétriques :

$$\phi(C^{\mathrm{T}}) = AC^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}A = (CA^{\mathrm{T}} + A^{\mathrm{T}}C)^{\mathrm{T}} = (CA + AC)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} = B = \phi(C)$$

Par unicité, on en déduit $C^{\mathrm{T}} = C$, soit C symétrique

Remarque : Il est probable que si l'élève réussit à traiter cet exercice, le correcteur lui donne en plus l'hypothèse ***défini positif*** à traiter, comme en 2022. Traitons-le, c'est un peu plus difficile, c'est pour cela que l'examinateur a du le supprimer en 2023 et le mettre en question subsidiaire.. On suppose donc $A, B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On applique le théorème spectral à $C \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $S = PDP^{\mathrm{T}}$ avec D diagonale et $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

$$B = AC + CA \iff B = APDP^{\mathrm{T}} + PDP^{\mathrm{T}}A \iff P^{\mathrm{T}}BP = P^{\mathrm{T}}AP\,D + D\,P^{\mathrm{T}}AP \iff B' = A'D + DA'$$

Je rappelle que multiplier une matrice ***quelconque*** à gauche (rp. à droite) par une matrice diagonale (de coefficients λ_i), revient à multiplier la i-ième ligne (rp. colonne) par λ_i. L'équation plus haut s'écrit, en regardant seulement le i-ième coefficient diagonal, $b'_{ii} = 2\lambda_i a_{ii}$. Comme $a'_{ii}, b'_{ii} > 0$, il suit $\lambda_i > 0$, soit $C \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Je détaille un peu plus : $A' = P^{\mathrm{T}}AP$ est clairement symétrique et comme ses vp sont celles de A (A et A' sont semblables). On a donc $A' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Idem $B' \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a vu en exo que les coefficients ***diagonaux*** d'une matrice symétrique définie positive sont tous > 0. Il suffit de remarquer $a'_{ii} = E_i^{\mathrm{T}}A'E_i > 0$, avec E_i i-ième vecteur de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Ex 52 Soit u un endomorphisme symétrique d'un $\mathbb{R}$-ev euclidien E. Montrez $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$

Soit u un endomorphisme symétrique. On sait $\dim(\operatorname{Ker} u)^{\perp} = n - \dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Im} u$. Par suite, il faut et il suffit de démontrer $\operatorname{Im} u \subset (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$ qui équivaut à $\operatorname{Im} u \perp \operatorname{Ker} u$. Montrons-l'orthogonalité :

$$\forall y = u(x) \in \operatorname{Im} u, \forall z \in \operatorname{Ker} u, \quad \big(y \,|\, z\big) = \big(u(x) \,|\, z\big) = \big(x \,|\, u(z)\big) = \big(x \,|\, 0\big) = 0$$

Ex 54 Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez $S \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R}) \iff \exists B \in M_n(\mathbb{R})$ tq $S = B^{\mathrm{T}}B$

Soit $S \in \mathscr{S}_n^{+}(\mathbb{R})$. Utilisons le ***théorème spectral*** : il existe une matrice orthogonale $P \in O(n)$ telle que $S = PDP^{-1} = PDP^{\mathrm{T}}$ avec $D = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Par hypothèse $\lambda_i \geq 0$. Rappelons aussi $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$. On peut simplement écrire $D = \Delta^2$ avec $\Delta = \operatorname{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$. D'autre part, comme Δ est diagonale, $\Delta^{\mathrm{T}} = \Delta$. Par suite :

$$S = PDP^{\mathrm{T}} = P\Delta^{\mathrm{T}}\Delta P^{\mathrm{T}} = (\Delta P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\ (\Delta P^{\mathrm{T}})$$

En posant $B = \Delta P^{\mathrm{T}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a bien le résultat demandé.

Par hypothèse, $S = B^{\mathrm{T}}B$. Remarquez au passage que ceci prouve que S est symétrique puisque $(B^{\mathrm{T}}B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}B = S$. Soit λ une valeur propre de S, alors il existe $U \neq 0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tq $SU = \lambda U$. Par suite :

$$U^{\mathrm{T}}SU = U^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}BU = (BU)^{\mathrm{T}}\ BU = \|BU\|_{can}^2 \geq 0$$

Attention! à bien vérifier que BU est une matrice-colonne, cad $\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ pour affirmer que c'est une norme. Par exemple, ***on n'a pas*** $B^{\mathrm{T}}B = \|B\|^2$ car c'est une matrice carrée $n\times n$! (il faudrait prendre la trace). D'autre part, comme plus haut, $U^{\mathrm{T}}SU = \lambda\|U\|^2_{can}$. En « *reliant* » les deux, il vient aussi $\lambda\|U\|^2_{can} \geq 0$ et donc $\lambda \geq 0$, car $U \neq 0$. Soit $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$

Mines-Ponts PSI 2022 (endomorphisme antisymétrique) ✷

Ex 55 Soit E un ev euclidien. On dit qu'un endomorphisme de E est antisymétrique ssi $\forall x, y \in E$, $\big(f(x)\,|\,y\big) = -\big(x\,|\,f(y)\big)$.

1) Montrez f antisymétrique ssi $\forall x \in E, \big(f(x)\,|\,x\big) = 0$. Dans toute la suite f est un endomorphisme antisymétrique.

2) Montrez $\operatorname{Ker} f$ orthogonal à $\operatorname{Im} f$.

3) Soit $s = f\circ f$. Montrez s endomorphisme symétrique. Montrez que toutes ses vp sont négatives ou nulles. Montrez $\operatorname{Ker} s = \operatorname{Ker} f$.

4) On suppose $n=3$. Montrez il existe une BON dans laquelle ma matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a\\ 0 & a & 0\end{pmatrix}$

1) Si f est antisymétrique, en posant $y = x$, il vient $\big(f(x)\,|\,x\big) = -\big(x\,|\,f(x)\big)$, soit $\big(f(x)\,|\,x\big) = 0$

Réciproquement, pour tous $x, y \in E$, on peut écrire $\big(f(x+y)\,|\,x+y\big) = 0$, puis par linéarité de f et bilinéarité du produit scalaire :

$$0 = \big(f(x)+f(y)\,|\,x+y\big) = \big(f(x)\,|\,x\big) + \big(f(x)\,|\,y\big) + \big(f(y)\,|\,x\big) + \big(f(y)\,|\,y\big) = \big(f(x)\,|\,y\big) + \big(f(y)\,|\,x\big)$$

Le résultat suit.

2) Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et $y \in \operatorname{Im} f$. Alors $y = f(z)$ et $f(x) = 0$. On écrit alors :

$$\big(x\,|\,y\big) = \big(x\,|\,f(z)\big) = -\big(f(x)\,|\,z\big) = -\big(0\,|\,z\big) = 0$$

Il vient $\operatorname{Ker} f \perp \operatorname{Im} f$. Comme $\dim \operatorname{Im} f = n - \dim \operatorname{Ker} f$, on a même $(\operatorname{Ker} f)^{\perp} = \operatorname{Im} f$ et $(\operatorname{Im} f)^{\perp} = \operatorname{Ker} f$.

3)

$$\forall x, y \in E,\ \big(s(x)\,|\,y\big) = \big(f(f(x))\,|\,y\big) = -\big(f(x)\,|\,f(y)\big) = --\big(x\,|\,f(f(y))\big) = \big(x\,|\,s(y)\big)$$

C'est d'ailleurs, un peu plus rapide par les matrices : si $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}), A^2 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ car $(A^2)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^2 = (-A)^2 = A^2$.

Soit λ vp de f, soit $s(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$, puis $\big(f(x)\,|\,x\big) = \lambda\big(x\,|\,x\big) = \lambda\|x\|^2 = 0$. Comme $x \neq 0$, $\lambda = 0$. La seule vp réelle (possible) d'un endomorphisme antisymétrique est 0. Les autres sont complexes conjuguées : supposons donc $\lambda = a + ib$ avec $b \neq 0$. On sait que son carré est une vp de s, donc réelle. Or $\lambda^2 = a^2 - b^2 + 2iab$, ce qui impose $ab = 0$ puis $a = 0$. les vps d'un endomorphisme antisymétrique sont imaginaires pures $\lambda = ib$ et leur carrés qui sont les vps de s sont des réels négatifs ou nuls $(-b^2)$.

Notons que l'on a déjà $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} s = \operatorname{Ker} f^2$. On se sert de la question précédente : $\operatorname{Ker} f \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} f = E$. On prend une BON adaptée à cette décomposition (réunion d'une BON de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$, orthogonaux entre eux). La matrice de f dans cette base est diagonale par blocs car $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$ sont stables par f. $F = D\mathrm{iag}(0, A)$. D'autre part A est inversible puisque la matrice de l'endomorphisme f induit dur $\operatorname{Im} f$ qui est bijectif puisque $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. On a alors $S = D\mathrm{iag}(A^2, 0)$ et comme $\operatorname{rg} F = \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2 = \operatorname{rg} S$, le résultat suit.

Remarque : Pour tout endomorphisme f diagonalisable, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$. Un endomorphisme antisymétrique est diagonalisable dans $\mathbb{C}$...

4) Si $f = 0$, le résultat est immédiat (avec $a = 0$). On suppose désormais $f \neq 0$. Comme la dimension est impaire, il y a une vp réelle qui est 0, donc $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$. $\operatorname{Ker} f$ ne peut être que de dimension 1 ou 3 (vps complexes conjuguées 2 à 2), donc c'est 1, il existe donc, comme déjà vu, une BON tq f aie pour matrice $F = D\mathrm{iag}(0, A)$ avec A inversible matrice 2×2 et nécessairement antisymétrique (car F antisymétrique dans cette BON). Cette matrice est donc nécessairement de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a\\ a & 0\end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$.

Ex 56 On munit $E = C^\infty([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $\left(d|f\right)g = \int_{-1}^{1} fg$. Prouvez que l'endomorphisme ϕ de E défini par $\phi(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x)$ est un endom. symétrique de E. *(Utilisez une ipp bien choisie)*

Rappelons que le produit scalaire $(f|g) = \int_a^b fg$ ne vérifie la propriété ***définie*** que si on se place sur un $\mathbb{R}$-ev où les fonctions sont ***continues***, ce qui est le cas ici. Vérifions que l'endomorphisme ϕ de E est symétrique :

$$\begin{aligned}\left(\phi(f)\,|\,g\right) &= \int_{-1}^{1}\Big((1-x^2)f''(x) - 2xf'(x)\Big)g(x)\,dx = \int_{-1}^{1}\Big((1-x^2)f'(x)\Big)'\,g(x)\,dx \\ &\overset{IPP}{=} \Big[(1-x^2)f'(x)g(x)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)f'(x)\,g'(x)\,dx = -\int_{-1}^{1}(1-x^2)f'(x)\,g'(x)\,dx\end{aligned}$$

De la ***symétrie*** en f et g de ce dernier résultat, il vient qu'il est aussi égal à $\left(\phi(g)\,|\,f\right) = \left(f\,|\,\phi(g)\right)$. Ok.

Mines-Telecom PSi 2024 | TPE PSI 2015 | Centrale PC 2016-2014 (dilatation $x \to x + a(u|x)u$)

Ex 57 Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie, $u \in E$ un vecteur de norme 1 et $a \in \mathbb{R}$. Soit $f_a \in \mathscr{L}(E)$ qui à x associe $x + a\left(u\,|\,x\right)u$.

Note : Certains énoncés prennent $a \neq 0$ et u unitaire ce qui change un peu les cas et les calculs.

1) [**PC :** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $f_\alpha \circ f_\beta$. Pour quels α l'endomorphisme f_α est-il bijectif?]

2) Montrez que f_a est symétrique.

3) [**PSI(2015) :** Trouvez un polynôme annulateur de f_a.]

4) Prouvez les valeurs propres et vecteurs propres de f_a.

5) [**PSI(2015) :** Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il un projecteur orthogonal ?]

6) Pour quelles valeurs de a et u l'endomorphisme f_a est-il une isométrie vectorielle ?

7) Pour quelles valeurs de a et u l'endomorphisme f_a est inversible ?. Si oui, donnez son inverse.

1)

$$\forall x,y \in E,\ \left(f_a(x)\,|\,y\right) = \left(x + a(u|x)\,u\,|\,y\right) \overset{(1)}{=} \left(x\,|\,y\right) + a(u|x)\left(u\,|\,y\right) \overset{(2)}{=} \left(f_a(y)\,|\,x\right) \overset{(3)}{=} \left(x\,|\,f_a(y)\right)$$

- **(1)** linéarité à droite du produit scalaire
- **(2)** Cette formulation symétrique en x et y permet de symétriser l'expression du départ
- **(3)** C'est ici, la symétrie du produit scalaire…

f_a est donc diagonalisable…

2) Par la question précédente, on sait qu'il y a n valeurs propres réelles comptées avec la multiplicité

Analyse : Si λ vp de f_a, $f_a(x) = \lambda x$, avec $x \neq 0$, puis $(1-\lambda)x = -a\left(u\,|\,x\right)u$. Il vient, ***ou*** $\lambda = 1$ ***ou*** x est colinéaire à u. Il faut comprendre qu'on a trouvé au plus 2 vps (distinctes) donc l'analyse est terminée.

Synthèse : On a immédiatement $f_a(x) = 1.x \iff \left(u\,|\,x\right) = 0$ (si on suppose $a \neq 0$ et $u \neq 0$, je vous laisse traiter ces deux cas sans intérêt puisque $f_a = \mathrm{Id}$). 1 est donc bien valeur propre et $E(1) = \mathrm{Vect}(u)^\perp$ qui est un hyperplan.

On calcule $f(u)$ (si on sait son cours, les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux, u est le seul vecteur, à α près, orthogonal à $\mathrm{Vect}(u)^\perp$)… :

$$f_a(u) = u + a\left(u\,|\,u\right)u = u + a\|u\|^2 u = (1 + a\|u\|^2)u$$

Comme $u \neq 0$, on déduit $1 + a\|u\|^2$ vp de f_a et $E(1 + a\|u\|^2) \subset \mathrm{Vect}(u)$.***Attention!*** au raisonnement, on ne peut en déduire que l'inclusion. Maintenant pour des raisons de dimension, comme on a déjà un espace propre hyperplan, la dimension ne peut être que au maximum 1 (je rappelle que les espaces propres sont en somme directe, la somme de leurs dimensions ne peut dépasser n et d'ailleurs si elle vaut n, l'endomorphisme est diagonalisable, tout ceci est du cours), soit l'égalité. Si vous avez bien suivi, on retrouve f_a diagonalisable.

Remarque : Attention! ici aux cas $a = 0$ ou $u = 0$ qui redonneraient la même vp 1 ! (c'est le « *piège* »).

3) Pour un endomorphisme orthogonal / automorphisme orthogonal / isométrie vectorielle, les seules vps possibles ne peuvent être que ± 1. Donc il est ***nécessaire*** que $\|u\|^2 a + 1 = -1$ soit $a = \frac{-2}{\|u\|^2}$

Réciproquement, comme cet endomorphisme est diagonalisable de vp 1 et -1, c'est une symétrie (annule $(X-1)(X+1) = x^2 - 1$, c'est quasiment du cours). Comme l'endomorphisme est symétrique, c'est une symétrie orthogonale (***Attention!*** à ne pas confondre symétrie et symétrique). C'est donc bien un automorphisme orthogonal. (question que je laisse à vos soins, symétrie par rapport à quel sev ?)

Remarque : Je rappelle (ce n'est pas stricto-sensu du cours) que les seules isométries vectorielles diagonalisables sont les symétries orthogonales.

4) f_a est inversible ssi 0 n'est pas vp, donc ssi $\|u\|^2 a + 1 \neq 0$ ssi $a \neq \frac{-1}{\|u\|^2}$. Pour trouver son inverse, l'idée est de le chercher du même « *type* », soit f_b. On calcule :

$$\begin{aligned} f_a(f_b(x)) &= f_b(x) + a\,(u \mid f_b(x))\,u = x + b\,(u \mid x)\,u + a\,(u \mid x + b(u|x)u)\,u \\ &\overset{(1)}{=} x + b\,(u \mid x)\,u + a\big((u|x) + b(u|x)(u|u)\big)u = x + \big(b + a + ab\|u\|^2\big)(u \mid x)\,u \end{aligned}$$

- **(1)** linéarité à droite du produit scalaire

Cette application vaut Id dans le cas $b + a + ab\|u\|^2 = 0$ qui amène $b = \dfrac{-a}{1 + a\|u\|^2}$

Remarque : Le cas non inversible $\|u\|^2 a + 1 = 0$ correspond à une projection, donc projection orthogonale, puisque c'est un endomorphisme symétrique.

Ex 58 Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique non nulle. Montrez que 0 est la seule valeur propre réelle et est d'ordre 1. Quelle est la différence avec les matrices nilpotentes ?

Méthode 1 (par la matrice) :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -a & -b \\ a & \lambda & -c \\ b & c & \lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^3 + (a^2+b^2+c^2)\lambda = \lambda\big(\lambda + (a^2+b^2+c^2)\big)$$

Il est immédiat que 0 est valeur propre réelle d'ordre 1 et la seule réelle puisque les 2 autres sont les 2 complexes conjugués $\pm i\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ qui sont ***non réels*** car $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ par hypothèse de $A \neq 0$.

Méthode 2 :

Cette démonstration convient en dimension quelconque. On considère, vous devez commencer à être habitués, le réel (matrice 1×1) $X^T AX$ avec X matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X^T AX \overset{(1)}{\widetilde{=}} (X^T AX)^T = X^T A^T X \overset{(2)}{\widetilde{=}} -X^T AX \quad \Longrightarrow \quad X^T AX = 0$$

- **(1)** Une matrice 1×1 est égale à sa transposée.
- **(2)** A est antisymétrique

Considérons maintenant λ valeur propre de A, alors il existe $U \neq 0$ tel que $AU = \lambda U$, Il suit :

$$0 = U^T AU = U^T \lambda U = \lambda U^T U = \lambda \|U\|_{can}^2 = 0$$

Comme $U \neq 0$, il vient que $\lambda = 0$. ***Attention!*** On n'a pas démontré 0 est la seule valeur propre réelle. On a ***seulement démontré*** 0 est la seule valeur propre ***réelle possible***, ou encore $\operatorname{Sp} A \subset \{0\}$. En dimension paire, il est possible que 0 ne soit pas vp. En dimension impaire, on se rappelle qu'il y a toujours au moins 1 vp réelle, donc 0 est vp. On peut aussi, méthode alternative, utiliser le déterminant : $\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det(A) = -\det(A) \quad \Longrightarrow \quad \det(A) = 0$

Remarques

- ***Où se sert-on de réel*** dans la démo plus haut : la seule valeur propre réelle possible est 0?
- Pour une matrice nilpotente, on a la seule vp est 0, ou, si vous préférez, la seule vp ***complexe*** est 0. il n'y en a donc pas d'autres.

Télécom SudParis PSI 2015 (inégalité endomorphisme symétrique)

Ex 61 Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Montrez pour tout $x \in E$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leq (x|u(x)) \leq \lambda_n \|x\|^2$

Pour un ***endomorphisme symétrique*** ou ***une matrice symétrique réelle***, une bonne idée est souvent d'utiliser le ***théorème spectral***. On utilise une BON quelconque et on raisonner matriciellement avec la matrice symétrique S. Alors il existe une matrice orthogonale P telle que $S = PDP^T = PDP^{-1}$ et le produit scalaire a son ***expression canonique matricielle*** $(x|y) = X^T Y$

$$\big(x\,|\,u(x)\big) = X^T SX \overset{(1)}{\widetilde{=}} X^T P D \underbrace{P^T X}_{Y} \overset{(2)}{\widetilde{=}} Y^T DY \overset{(3)}{\widetilde{=}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_n y_i^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \overset{(4)}{\widetilde{=}} \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \overset{(5)}{\widetilde{=}} \lambda_n \|x\|^2$$

- **(1)** Utilisation du ***théorème spectral***
- **(2)** On a $Y^T = (P^T X)^T = X^T (P^T)^T = X^T P$
- **(3)** Egalité déjà démontrée plusieurs fois en cours. Je rappelle juste que les n coefficients diagonaux de D sont évidemment les n valeurs propres λ_i de S.
- **(4)** P, commme P^T, étant un matrice orthogonale, elle représente des automorphimes orthogonaux qui conservent la norme d'ou $\|Y\| = \|P^T X\| = \|X\|$
- **(5)** Comme on s'est placé dans une BON, l'expression de la norme euclidienne est ***l'expression canonique***, soit $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

La minoration par $\lambda_1 \|x\|^2$ se procède de manière similaire.

Ex 65 Soit ω un vecteur unitaire d 'un ev euclidien orienté E de dimension 3. Reconnaître $f : x \to \omega \wedge (\omega \wedge x)$

Méthode 1 : On applique la formule du double produit vectoriel (exo sur la feuille), mais, bon, cette formule n'est pas au programme.

$$f(x) = \omega \wedge (\omega \wedge x) = (\omega \,|\, x)\,\omega - (\omega \,|\, \omega)\,x = (\omega \,|\, x)\,\omega - x = (p_D - \mathrm{Id})(x)$$

On a appliqué ω unitaire : $(\omega\,|\,\omega) = 1$ et on aura reconnu la formule de la projection orthogonale sur la droite $D = \mathrm{Vect}(\omega)$. Ensuite on se rappelle que $\mathrm{Id} - p_F = p_{F^\perp}$ et donc $f = -p_H$ avec H l'hyperplan $\mathrm{Vect}(\omega)^\perp$. C'est un endomorphisme symétrique

Méthode 2 : On passe aux matrices, via une BONDirecte $\mathscr{E} = (i, j, k)$ (important de la choisir orthonormée et directe !). On a alors $\omega = ai + bj + ck$, cad par les coordonnées $\omega = (a, b, c)$. On applique la formule sur les coordonnées du produit vectoriel :

$$f(i) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 - c^2 \\ ab \\ ac \end{pmatrix}$$

Identique pour $f(j)$ et $f(k)$, laissés au lecteur. Finalement on arrive à la matrice M de f dans $\mathscr{E}$:

$$M = \begin{pmatrix} -b^2 - c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2 - c^2 & bc \\ ac & bc & -b^2 - c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa - 1 & ab & ac \\ ab & bb - 1 & bc \\ ac & bc & cc - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa & ba & ca \\ ab & bb & cb \\ ac & bc & cc \end{pmatrix} - I_3 = P - I_3$$

On a appliqué ω unitaire soit $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Maintenant, il faut reconnaître P ! on calcule $P^2 = P$, la matrice est symétrique donc c'est une projection orthogonale ; Toutes les colonnes sont colinéaires à (a, b, c), donc on projette sur $\mathrm{Vect}(\omega)$. On retrouve la méthode 1.

Ensam PSI 2013 | Centrale PC 2014 | X-ESPCI PC 2011 (caractérisation des rotations en dimension 3) ✷

Ex 66 Soit $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté. Soit $f \in GL(\mathbb{R}^3)$. Montrer l'équivalence :

(i) f est une rotation.

(ii) f vérifie $\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^3)^2$, $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$.

$(i) \Longrightarrow (ii)$

Soit f une rotation d'axe orientée par ω (unitaire) et d'angle (de mesure) θ, $D = \mathrm{Vect}(\omega), D \oplus P = \mathbb{R}^3$ avec $P = D^\perp$. En prenant (i, j) BOND directe du plan, on sait (i, j, ω) BOND de $\mathbb{R}^3$. On a aussi $f(\omega) = \omega$, $f(i) = \cos\theta i + \sin\theta j$ et $f(j) = -\sin\theta i + \cos\theta j$.

Méthode 1 (par une matrice) :

Dans (i, j, ω), la matrice de f est $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis celle de $f(u)$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \\ z \end{pmatrix}$.

$$f(u) \wedge f(v) : \begin{pmatrix} \cos\theta x - \sin\theta y \\ \sin\theta x + \cos\theta y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \cos\theta x' - \sin\theta y' \\ \sin\theta x' + \cos\theta y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta x z' + \cos\theta y z' - \sin\theta z x' - \cos\theta z y' \\ \cos\theta z x' - \sin\theta z y' + \cos\theta x z' - \sin\theta y z' \\ \cos^2\theta x y' - \sin^2\theta y x' - \cos^2\theta y x' + \sin^2\theta x y' \end{pmatrix}$$

$$f(u \wedge v) : M \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \right) = M \left(\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos\theta(yz' - zy') - \sin\theta(zx' - xz') \\ \sin\theta(yz' - zy') + \cos\theta(zx' - xz') \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : On pose $k = \omega$. L'application $\phi : (u, v) \longrightarrow f(u \wedge v) - f(u) \wedge f(v)$ étant bilinéaire, il suffit de démontrer sa nullité sur la base de $(\mathbb{R}^3)^2$ $\big((i,i), (i,j), (i,k), (j,i), (j,j), (j,k), (k,i), (k,j), (k,k)\big)$ et, par antisymétrie (cad $\phi(u, v) = -\phi(v, u)$), et nullité immédiate sur les (u,u), seulement sur $\big((i,j),(i,k),(j,k)\big)$:

$$\phi((i,j)) = f(k) - \big(\cos\theta i + \sin\theta j\big)\wedge\big(-\sin\theta i + \cos\theta j\big) = k - (\cos^2\theta + \sin^2\theta)k = 0$$

$$\phi((i,k)) = f(-j) - \big(\cos\theta i + \sin\theta j\big)\wedge k = +\sin\theta i - \cos\theta j - \cos\theta i\wedge k - \sin\theta j\wedge k = 0$$

$$\phi((j,k) = \cdots = 0$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$

Pour démontrer f rotation, ***il faut et il suffit*** de démontrer que l'image d'une ***BONDirecte*** est une ***BONDirecte*** (même en dimension n). Soit (i,j,k) une BOND de $\mathbb{R}^3$; montrons $\big(f(i),f(j),f(k)\big)$ BOND de $\mathbb{R}^3$. On sait déjà base car f est une bijection par hypothèse.

- $f(k) = f(i\wedge j) = f(i)\wedge f(j)$, donc $f(k)\perp f(i), f(j)$. On trouve, par un raisonnement analogue, $f(i)\perp f(j)$. La base est orthogonale.
- $f(k) = f(i)\wedge f(j)$ s'écrit, avec l'orthogonalité, $\|f(k)\| = \|f(i)\|\,\|f(j)\|$ (1). On obtient aussi les expressions « *symétriques* » $\|f(i)\| = \|f(j)\|\,\|f(k)\|$ (2) et $\|f(j)\| = \|f(i)\|\,\|f(k)\|$ (3). Notons que ces normes sont non nulles car les vecteurs le sont car c'est une base. En remplaçant (3) dans (1), on obtient $\|f(k)\| = \|f(i)\|^2\|f(k)\|$, soit $\|f(i)\|^2 = 1$, puis $\|f(i)\| = 1$ par positivité.
- Reste à prouver que la base $(f(i),f(j),f(k))$ est directe (on a déjà néanmoins f automorphisme orthogonal). La base étant BOn, ceci ***équivaut à*** $f(k) = f(i)\wedge f(j)$, ce qui a déjà été vu. Méhode alternative : prouver que le déterminant vaut 1 (on même positif!) ; or $\det f = \big[f(i),f(j),f(k)\big] = \big(f(i)\wedge f(j)\,|\,f(k)\big) = \|f(k)\|^2$.

CCP PSI 2013 (matrice à reconnaitre)

Ex 68 Caractériser $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R})^3$ euclidien canonique de matrice dans la base can. $M = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4\\ -4 & 4 & -7\\ 1 & 8 & 4\end{pmatrix}$.

Comme $\mathbb{R}^3$ est muni de sa ***structure euclidienne canonique***, la base canonique est orthonormée. Par conséquent, $f\in O(\mathbb{R}^3) \iff M\in O(3)$. Vérifions $M\in O(3)$:

$$\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \frac{1}{81}\Big(8^2+4^2+1^2\Big) = 1 \quad \|C_3\|^2 = \frac{1}{81}\Big(7^2+4^2+4^2\Big) = 1 \quad (C_1|C_2) = (C_1|C_3) = (C_2|C_3) = 0$$

On fait on a même $M\in SO(3)$ car $\det M = \frac{1}{9^3}\Big(\dots\Big) = 1$ (je ne fais pas le calcul du déterminant ici). En« *rajoutant* » $\mathbb{R}^3$ orienté canoniquement (c'est une imprécision de l'énoncé), la base canonique est même orthonormée ***directe*** et ***donc*** f est une ***rotation*** ou ***isométrie vectorielle positive***. Reste à trouver l'axe et l'angle.

L'axe est le sev des vecteurs invariants, ici nécessairement une droite, ou l'espace propre de f associé à la vp 1 :

$$MX = X \iff \left\{\begin{array}{ccc} 8x+y-4z & = & 9x\\ -4x+4y-7z & = & 9y\\ x+8y+4z & = & 9z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} -x+y & = & 4z\\ -4x-5y & = & 7z\\ x+8y+4z & = & 9z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -3z\\ y & = & z\\ z & = & z\end{array}\right.$$

C'est donc la rotation d'axe Δ dirigé par le vecteur $(-3,1,1)$.

On obtient l'angle (non orienté) par son cosinus et la formule : $\operatorname{tr}(M) = 1+2\cos\theta = \dfrac{16}{9} \iff \theta = \pm\arccos\left(\dfrac{7}{18}\right)$

Pour avoir le ***sens*** de l'angle, il est ***nécessaire*** d'orienter l'axe : on l'oriente par le choix (du sens) de $\omega = (-3,1,1)$. On applique alors la formule :

$$\text{signe}(\theta) = \text{signe}\left[i, f(i), \omega\right] = \text{signe}\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{9} & -3 \\ 0 & \frac{-4}{9} & 1 \\ 0 & \frac{1}{9} & 1 \end{vmatrix} = \text{signe}\,\frac{-5}{9}$$

C'est donc l'angle de mesure $\boxed{\theta = -\arccos\left(\frac{7}{18}\right)}$

Notons que si on avait orienté l'axe par $(3,-1,-1) = -\omega$, on a aurait obtenu l'angle $\theta = +\arccos\left(\frac{7}{18}\right)$

Mines-Ponts PSI 2006 (exponentielle endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$) ✷

Ex 69 Soit u un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire et de l'orientation usuels.

1) Préciser la forme de la matrice de u dans la base canonique.

2) Montrer qu'il existe un unique vecteur $\omega \in \mathbb{R}^3$ tel que $u(x) = \omega \wedge x$ pour tout x.

3) Justifier la convergence de $\exp u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$.

4) Montrer que $\exp u$ est une rotation, dont on précisera l'axe et l'angle.

1) Puisque $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire et de l'orientation usuels, la base canonique est orthonormée directe. Démonstration similaire à celle d'un endomorphisme symétrique du cours, on trouve que la matrice dans une BOND est antisymétrique. Je ne la reproduis pas ici.

2) La matrice est donc de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$. On démontre, en écrivant la matrice de $x \longrightarrow \omega \wedge x$ avec un ω quelconque dans la base canonique (qui d'ailleurs est un endomorphisme antisymétrique), par identification des coeffs de la matrice, déjà fait en cours, je ne la reproduis pas non plus ici, que $u(x) = \omega \wedge x$ avec $\omega = (-a, b, -c)$

3) Rappelons que seules les suites vectorielles (d'endomorphismes, de matrices, ...) est au programme de PSI, pas les séries vectorielles. Il faut comprendre ici qu'il s'agit de prouver que la suite des sommes partielles (S_n) converge.

Méthode 1 : Une suite d'endomorphismes (u_n) converge ssi pour tout x la suite de vecteurs $(u_n(x))$ converge (***si*** on est en dimension finie) ssi, dans une base quelconque, chaque suite-coordonnée (qui est réelle) $(u_n(x)_i)$ converge. On remarque que, dans une BON d'un ev euclidien, les coordonnées vérifient $|x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \|x\|$ et que $\|\omega \wedge x\| \leq \|\omega\|\|x\|$, puis par récurrence immédiate $\|u^n(x)\| \leq \|\omega\|^n\|x\|$. On a $S_{n\,i} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} u^k(x)_i$ (i-ème coordonnée). C'est une suite réelle, donc on sait que sa convergence équivaut à celle de la série $\sum \frac{1}{n!} u^n(x)_i$.

$$\left|\frac{1}{n!} u^n(x)_i\right| \leq \frac{1}{n!}\|u^n(x)\| \leq \frac{\|\omega\|^n}{n!}\,\|x\|$$

On conclut par le critère de majoration d'une série positive par une série exponentielle (réelle) convergente.

Remarque : Attention! on n'a pas, dans un evn de dimension infinie, une suite de fonctions (f_n) converge ssi pour tout x, la suite $(f_n(x))$ converge. Il suffit de penser à la norme de la convergence uniforme : ***on n'a pas*** une suite de fonctions converge uniformément ssi elle converge simplement.

Méthode 2 : On démontre ici (par le programme de PSI) la convergence de la série exponentielle d'une matrice pour une matrice quelconque. On va utiliser une norme matricielle (cad qui vérifie $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$), par exemple la norme $\|A\| = \sup_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$. On a donc $|a_{ij}| \leq \|A\|$. On sait qu'une suite de matrices (A_n) converge ssi chacune de ses n^2 suites-coefficients $\left([A_n]_{ij}\right)$ converge, suites qui sont ***réelles***.

$$\left|\left[\frac{A^n}{n!}\right]_{ij}\right| \leq \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$$

On conclut comme à la méthode 1, de la convergence de la série à la convergence de la suite réelle des sommes partielles $[S_n]_{ij}$, puis à celle de la suite matricielle (S_n).

4) On passe par les matrices. On pose ici $e = \frac{\omega}{\|\omega\|}$ unitaire, on prend une BOND adaptée à la décomposition $D \overset{\perp}{\oplus} P = \mathbb{R}^3$ avec $D = \text{Vect}(\omega)$, et $P = D^\perp$ orienté par ω. Il est clair que $u_{/D} = 0$ et $u_{/P} = \|\omega\|\ rot(\pi/2)$: pour le démontrer on prend (i, j) BOND directe du plan et les propriétés du produit vectoriel donnent $e \wedge i = j$ et $e \wedge j = -i$. Par conséquent la matrice de u dans cette base est diagonale par blocs et (***Attention !*** à U^0 !) :

$$U = \|\omega\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \implies S_n = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\|\omega\|^k}{k!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(k\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = I_3 + \sum_{2 \le 2k \le n} \frac{\|\omega\|^{2k}(-1)^k}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \sum_{2k+1 \le n} \frac{\|\omega\|^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix}$$

On en déduit donc la convergence vers :

$$I_3 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|\omega\|^{2k}(-1)^k}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\|\omega\|^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\|\omega\| & -\sin\|\omega\| \\ 0 & \sin\|\omega\| & \cos\|\omega\| \end{pmatrix}$$

On reconnaît la rotation d'axe $D = \text{Vect}(\omega)$ et d'angle de mesure $\|\omega\|$ (en orientant la normale par ω)

CCINP PSI 2022 (matrice normale 2×2)

Ex 71 Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq $MM^T = M^T M$ et $M^2 + 2I_2 = 0$.

1) Montrez $M^T M$ est diagonalisable.

2) Montrez que les vp d'une matrice sont racines de tout polynôme annulateur de cette matrice.

3) Déterminez les vp de $M^T M$.

4) Montrez $\frac{1}{\sqrt{2}} M$ orthogonale.

5) Déterminez les matrices M qui conviennent.

1) $S = M^T M$ symétrique réelle car $S^T = (M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M = S$.

Remarque : On sait même $M^T M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, cad ses vp sont ≥ 0 ? C'est quasiment du cours : puisque $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^T M^T M X = (MX)^T (MX) = \|MX\|_{can}^2 \ge 0$

2) Question de cours que je ne redémontre pas ici.

3) Il faut trouver un polynôme annulateur de $S = M^T M$ en se servant de $M^2 + 2I = 0$. En $\times (M^T)^2$ à gauche :

$$0 = (M^T)^2 M^2 + 2(M^T)^2 \overset{(1)}{=} (M^T M)^2 + 2(M^2)^T \overset{(2)}{=} (M^T M)^2 - 4I_2$$

- **(1)** $(M^T)^2 M^2 = (M^T M)^2$ ***car*** M et M^T commutent par hypothèse.
- **(2)** On a transposé l'équation : $M^2 + I = 0$

il suit que $X^2 - 4$ est un ***polynôme annulateur*** de $S = M^T M$, donc $\text{Sp}\, S \subset \{-2, 2\}$. Par positivité, $\text{Sp}\, S \subset \{2\}$. $\text{Sp}\, S = \varnothing$ est impossible car S est diagonalisable donc possède n vp réelles, comptées avec la multiplicité. Comme S est diagonalisable avec la ***seule vp*** 2, ce ne peut être que $2I$ (j'ai déjà démontré / expliqué cela en cours, je ne le redémontre pas ici).

4) On a vu $M^T M = 2I_2$ qui s'écrit aussi $(\frac{1}{\sqrt{2}} M)^T \frac{1}{\sqrt{2}} M = I_2$, soit $P = \frac{1}{\sqrt{2}} M$ orthogonale.

5) Rappelons le cours : les seules matrices orthogonales d'ordre 2 sont :

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2) \qquad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Les matrices $R(\theta)$ sont les (matrices de) rotation d'angle (de mesure) θ, de déterminant 1 et les $S(\theta)$ de déterminant -1 sont les matrices de symétrie orthogonale (par rapport à une droite). Alors $S(\theta)^2 = I_2$ et on sait $R(\theta)^2 = R(2\theta)$. Par suite l'hypothèse

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}M\right)^2 = \frac{1}{2}M^2 = -I_2 = R(\pi)$ amène que seul $R(\theta)$ est possible avec $2\theta \equiv \pi$, à 2π près, ce qui amène les 2 valeurs $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$.

Les deux matrices M solutions du problème de l'énoncé sont donc :

$$\sqrt{2}R\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sqrt{2}R\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$