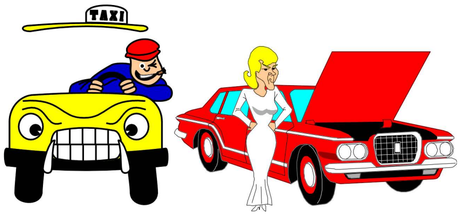
Feuille d'Exercices 10
Evs préhilbertiens



Produits Scalaires, Normes Euclidiennes, Orthogonalité

Produit Scalaire : $\phi(x,y)$ définie sur $E\times E$ est un produit scalaire ssi c'est une ***forme bilinéaire symétrique définie positive*** :
- ***(i) forme*** : ϕ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- ***(ii) symétrique*** : $\forall x,y\in E,\ \phi(x,y)=\phi(y,x)$.
- ***(iii) bilinéaire*** : ϕ linéaire à gauche (ou par rapport à x) et linéaire à droite (ou par rapport à y).
- ***(iv) positive*** : $\forall x\in E,\ \ \phi(x,x)\geq 0$.
- ***(v) définie*** : $\forall x\in E,\ \phi(x,x)=0 \Longrightarrow x=0$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall x,y\in E,\quad |(x|y)|\leq \|x\|\,\|y\|$ (avec égalité ssi x et y sont colinéaires)

L'Orthogonal $F^{\perp}$: Soit $F\subset E$. On appelle ***l'orthogonal de*** F et on note $F^{\perp}$, l'espace vectoriel contenant ***tous les vecteurs*** de E ***orthogonaux à tous*** les vecteurs de F : $F^{\perp}=\{x\in E,\ \ \forall f\in F,\ (x\,|\,f)=0\}$

Ex 1 ✌ On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P,Q)\to\sum_{k=p}^{n}P^{(i)}(0)Q^{(i)}(0)$

1) Montrez rapidement que c'est un produit scalaire ssi $p=0$

2) Explicitez une BON de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ex 2 ✌ Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique, on pose $F:\begin{cases} x+y+z+t=0\\ x-y+z-t=0\end{cases}$. Montrez plan et donnez une base de $F^{\perp}$.

Ex 3 ✌ Soit $H=\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AM)=0\}$ avec $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez H hyperplan et précisez $H^{\perp}$

Ex 4 ✍ On se place dans le $\mathbb{R}$-ev E des suites réelles bornées. On définit $((u_n)|(v_n))=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_nv_n}{2^n}$

1) ✌ Montrez que c'est un produit scalaire sur E.

2) Soit F le sev des suites presque-nulles (cad nulles àpcr). Montrez $F^{\perp}=\{0\}$

BQ CCP MP 2023->2021 | CCP PSI 2015 (propriétés des supplémentaires orthogonaux) ✍

Ex 5 Soient F et G deux sev d'un espace préhilbertien E. [**MP :** euclidien]

1) Montrez $F\subset(F^{\perp})^{\perp}$. [**MP :** question absente]

2) Montrez $F=(F^{\perp})^{\perp}$ si E est de dimension finie.

3) Etablir $F\subset G\Longrightarrow G^{\perp}\subset F^{\perp}$. [**MP :** question absente]

4) Montrez $(F+G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}$.

5) Montrez $F^{\perp}+G^{\perp}\subset(F\cap G)^{\perp}$. Montrez l'égalité en dimension finie. [**MP :** Juste l'égalité]

CCINP PSI 2023 | Mines-Ponts PSI 2014 (produit scalaire intégral) ✷✍

Ex 6 Soit $E=\mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f,g\in E$, on pose $\phi(f,g)=\int_0^1 fg+f'g'$.

1) Montrez ϕ produit scalaire sur E.

2) Soient $V=\{f\in E,\ f(0)=f(1)=0\}$ et $W=\{f\in E,\ f=f''\}$.

Montrez qu'ils sont en somme directe et orthogonaux [**Mines :** Montrez supplémentaires orthogonaux.]

Paul ne se rappelle plus les 2 autres questions. Probablement celles-là :

3) Montrez que V est l'orthogonal de W [**Mines :** C'est la question précédente]

4) ~~Déterminez la projection orthogonale sur V de $f\in E$.~~

Ex 7 ✍ $A\in M_n(\mathbb{R})$. Montrez $\operatorname{Ker}A^{\mathrm{T}}A=\operatorname{Ker}A$. (On rappelle si $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^{\mathrm{T}}X=\|X\|_{can}^2$)

Mines-Ponts PC 2016 (Egalité sur traces de matrices) ✷

Ex 8 Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\operatorname{tr}(AA^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}B-2AB)=0$. Montrer que $A=B^{\mathrm{T}}$.

Indication pas d'origine : on pourra utiliser le produit scalaire canonique

Mines-Ponts PSI 2013 | Ensam PSi 2013 | CCP PSI 2009 (expression de produit scalaire) ✷

Ex 9 Soit $(E,(\cdot|\cdot))$ un ev euclidien, $e_1,\dots,e_n$ et $f_1,\dots,f_n$ deux bases orthonormées de E et $u\in\mathscr{L}(E)$.

1) Montrez $\sum_{i=1}^n\big(u(e_i)\,|\,e_i\big)$ indépendant de la BON (e_i) choisie. [**CCP, Mines-Ponts :** Question absente]

2) Montrez $\sum_{1\le i,j\le n}\big(u(e_i)\,|\,f_j\big)^2$ ne dépend pas des BON choisies. En donnez une expression en fonction de u.

Mines-Ponts PSI 2022 (translation d'une bon) ✷

Ex 10 Soit E un ev euclidien muni d'une bon $(e_1,\dots,e_n)$. On considère une famille $(u_1,\dots,u_n)$ de vecteurs de E tq, pour tout $1\le k\le n$, $\|u_k\|=\frac{1}{n}$. La famille $(e_1+u_1,\dots,e_n+u_n)$ est-elle une base ?

CCINP PSI 2023 (produit scalaire intégral)

Ex 11 Soit $E=\mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ avec $a<b$. On pose $\phi(f,g)=\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$.

1) Montrez que ϕ est un produit sclaire.

2) Montrez qu'il existe une unique fonction g qui est C^2 sur $[a,b]$ tq $g''=f$ et $g(a)=g(b)=0$. Montrez que $\int_a^b f(t)g(t)\,dt=-\int_a^b\big(g'(t)\big)^2\,dt$.

3) Déterminez l'orthogonal du sev F de l'ensemble des fonctions C^2 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

CCINP PSI 2022 (produit scalaire sur les polynômes)

Ex 12 Soit $E=\mathbb{R}_2[X]$. Pour $P,Q\in E$, on pose $f(P,Q)=P(1)Q(1)+P'(1)Q'(1)+P''(1)Q''(1)$.

1) Montrez f est un produit scalaire sur E.

2) Déterminez une base orthonormée de E.

3) Exprimez les coordonnées de $P\in E$ dans cette base. Que remarque-t-on ?

Centrale PSI 2021 (produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$) ✷

Ex 13 Soit E l'ensemble des suites $(u_n)_n$ tq la série $\sum u_n^2$ converge. Pour $u=(u_n)_n$ et $v=(v_n)_n$ on pose $(u\,|\,v)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_nv_n$

1) Montrez produit scalaire sur E.

2) Montrez que, si $u\in E$ ne s'annule pas, $\frac{1}{u}$ n'appartient pas à E.

3) Trouvez une CNS sur α pour que $(\frac{1}{n^\alpha})\in E$.

4) On note F l'ens. des suites réelles nulles àpcr. Montrez F est un sev de dimension infinie.

5) Que dire de $F+F^\perp$ et de $(F^\perp)^\perp$?

IMT PSI 2022 | CCINP PSI 2022 (produit scalaire et orthogonal d'un sev)

Ex 14 Soient des réels $a_0,\dots,a_n$ $n+1$ réels 2 à 2 distincts. On définit sur $E=\mathbb{R}_n[X]$, l'application de $E\times E$ dans $\mathbb{R}$ par $\phi(P,Q)=\displaystyle\sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$

1) Montrez que c'est un produit scalaire sur E.

2) On pose $F=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X]\ |\ \sum_{k=0}^n P(a_k)=0\right\}$ Trouvez $F^\perp$. [**CCP :** En +, Montrez que F sev de E et donnez sa dimension] .

3) Déterminez la distance de P à F. [**CCP :** Question absente ?]

Ex 15 ***Inégalité d'Hadamard*** ✷ Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir $|\det M|\le\prod_{k=1}^n\|C_k\|$ les C_k sont les colonnes de M et $\|.\|$ la norme euclidienne canonique. (*Indication : On pourra appliquer Gram-Schmidt*).
Montrez que l'égalité est atteinte ssi les vecteurs-colonnes sont orthogonaux. Interprétation géométrique ?

Centrale PSI 2019 (polynômes de Laguerre)

Ex 16 Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P\,|\,Q)=\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$

1) Montrez qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.

2) Pour tout $0\le k\le n$, on pose $B_k=\frac{X^k}{k!}$. La famille $\mathscr{B}=(B_0,\dots,B_n)$ est-elle une BON de E ?

3) $\forall 0\le k\le n$, on pose $f_k(t)=t^ke^{-t}$, $L_k(t)=\frac{(-1)^k}{k!}e^tf_k^{(k)}(t)$. Prouvez que L_k est polynomiale, donnez son degré et ses coefficients.

4) Montrez que $\mathscr{E}=(L_0,\dots,L_n)$ est une BON de E.

5) Exprimez la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{E}$.

Projections Orthogonales et Distances à un sev

Projeté orthogonal : Soit F un sev dont une ***base orthonormée*** est $(e_1,\dots,e_p)$ et p_F la ***projection orthogonale*** sur F, alors on a $p_F(x)=\sum_{i=1}^p(e_i|x)e_i$.
Si F est la ***droite*** $D=\mathrm{Vect}(a)$ avec a ***unitaire***, $P_D(x)=(a\,|\,x)a$.
Si F est l'***hyperplan*** $H=\mathrm{Vect}(a)^\perp$ avec a ***unitaire***, $P_H(x)=x-(a\,|\,x)a$.

Distance à un sev : Si F est un sev de E euclidien, $x\in E$ et p_F la projection orthogonale sur F, alors la distance de x au sev F est minimale en $p_F(x)$ et : $d(x,F)=\inf_{f\in F}\|x-f\|=\|x-p_F(x)\|=\|x\|^2-\|p_F(x)\|^2$

Ex 17

1) Montrez $f(A,B) = \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

2) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrez (I_3, J) famille orthogonale puis calculez le projeté orthogonal de K sur l'ev engendré par (I, J).

IMT PSI 2022 | Ensam PSI 2018 | CCP PSI 2013 (matrice de projection orthogonale)

Ex 18 Soit $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique et F le sev d'Ã©quat. $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-y+z-t=0 \end{cases}$.

1) DÃ©terminez une base orthonormÃ©e de F et de $F^{\perp}$.

2) Donnez la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $F^{\perp}$. [**2013 :** sur F] .

Ex 19 Soit p une projection de E espace euclidien ou hermitien. Etablir

$$p \text{ est une projection orthogonale} \iff \forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leq \|x\| \ \ (p \text{ 1-lipschitzienne})$$

CCINP PSI 2022 | Mines-Ponts PSI 2019 | CCP PSI 2017 | CCPBQMP 2023->2021 (distance à un sev de matrices)

Ex 20

1) Montrez que l'application $(A,B) \longrightarrow \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. [**MP :** prod. scalaire admis.]

2) Montrez que l'ensemble V des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) Déterminez une BON de $V^{\perp}$. [**MP :** seulement base] .

4) [**MP :** Déterminez la projection orthogonale de $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sur $V^{\perp}$.]

5) Calculez la distance de J à $V^{\perp}$ [**MP :** $d(J,V)$] [**Mines PSI :** $d(J,V)$]

Ex 21 Calculez $\inf\limits_{M=(m_{ij}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} (i - m_{ij})^2$ (*On utilisera une distance à un sev*).

Ex 22 Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniqu. associé à $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrez projection orthogonale sur un plan.

Ex 23 Soit $\omega(a,b,c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique. Ecrivez la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}.\omega$.

Centrale PSI 2013 (minimisation d'une somme)

Ex 24 Soient (a,b) une famille libre de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel $\langle\ ,\ \rangle$ et $c \in \mathbb{R}^n$.

1) Montrer que $\langle a,b\rangle^2 \neq \langle a,a\rangle \times \langle b,b\rangle$.

2) Déterminer λ et μ minimisant la quantité $\sum_{k=1}^{n} |\lambda a_k + \mu b_k + c_k|^2$.

IMT PSI 2023 (matrice projection orthogonale)

Ex 25 Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une BON de $\mathbb{R}^4$ et H le sev engendré par $a = e_1 + e_2 + e_3$ et $b = e_1 - e_4$

1) Construire une base orthogonale de H.

2) Donnez la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur H.

3) Calculez $\inf_{x \in H} \|x - e_1\|$

CCP PSI 2021 (calcul inf intégrale)

Ex 26 On pose $m = \inf \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} (\cos(x) - ax^2 - bx - c)^2\, dx$.

1) Montrez l'existence de m.

2) Trouvez des réels a, b, c réalisant cet inf. (Ind:on pourra utiliser l'orthonormalisation de Gramm-Schmidt).

Matrices Orthogonales et Automorphismes Orthogonaux / Isométries

Matrice orthogonale : $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée ***matrice orthogonale*** et on note $M \in O(n)$ ssi l'une des propriétés ***équivalentes*** suivantes est vérifiée :

- **(i)** M est inversible et $M^{-1} = M^{\mathrm{T}}$.
- **(ii)** $M^{\mathrm{T}}M = MM^{\mathrm{T}} = I_n$.
- **(iii)** Les vecteurs-colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ forment une base orthonormée pour $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique.

Automophisme Orthogonal : $u \in \mathscr{L}(E)$ est appelé ***endomorphisme orthogonal ou automorphisme orthogonal ou isométrie vectorielle*** ssi l'une des propriétés ***équivalentes*** suivantes est vérifiée :

- **(i)** $\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$ (conservation du produit scalaire).
- **(ii)** $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$. (conservation de la norme).
- **(iii)** $\forall x, y \in E,\ d(u(x), u(y)) = d(x, y)$. (conservation de la distance).
- **(iv)** Dans toute ***base orthonormée*** $\mathscr{E}$, la matrice de u est orthogonale.
- **(v)** L'image d'une base orthonormée (e_i) par u, cad la famille $(f(e_i))$, est une base orthonormée.

Ex 27 On pose $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow PM$.

1) Etablir si $P \in O(n)$, alors ϕ est un automorphisme orthogonal.

2) Montrez la réciproque (on pourra montrer conserve le produit scalaire)

TPE PSI 2019 (éléments propres matrice orthogonale)

Ex 28

1) A quelle condition sur les réels p, q la matrice $A = \begin{pmatrix} p & 0 & q \\ 0 & 1 & 0 \\ q & 0 & -p \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ?

2) Donnez les éléments propres de A

Ex 29 Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrez $\sum_{1 \le i,j \le n} |a_{ij}| \le n\sqrt{n}$ (*utilisez **Cauchy**[1]-**Schwarz**[2]*).

ENSAM PSI 2015 (inégalités sur les matrices orthogonales)

Ex 30 Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$ de coefficients m_{ij}. Montrez que $\left|\sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}\right| \le n \le \sum_{1\le i,j\le n} \left|m_{ij}\right| \le n^{3/2}$

Ex 31

1) Montrez que les seules vp réelles possibles de $u \in O(E)$, E euclidien, sont $\lambda = \pm 1$.

2) Reconnaître tous les endomorphismes de $O(E)$ diagonalisables d'un $\mathbb{R}$-ev euclidien.

CCP PSI 2016 (cns isométrie)

Ex 32 Pour $a \neq 0$ donné dans un ev euclidien E, déterminez les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $u(x) = \alpha(x\,|\,a)\,a - x$ est une isométrie. ***Rajout à l'oral originel*** : les reconnaître

Ex 33 ***Matrice de Householder***[3] : Soit $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et une matrice colonne $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrez que l'endomorphisme de matrice $I - 2VV^{\mathrm{T}}$ représente une symétrie, puis montrez qu'elle orthogonale et donnez ses caractéristiques.

Mines-Ponts PSI 2015 (composée de 2 réflexions) ✷

Ex 34 Soient E un espace euclidien et H_1, H_2 deux hyperplans de E. On note s_i la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan H_i. Montrer que $H_3 = s_2(H_1)$ est un hyperplan et que $s_1 \circ s_2 = s_2 \circ s_3$, où s_3 est la symétrie orthogonale par rapport à H_3.

CCINP PSI 2022 (rotation en dimension 3)

Ex 35 Soit E un ev euclidien de dim 3, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une BON directe, $e = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 - e_2 + e_3)$ et D la droite portée par le vecteur e. On considère la rotation u autour de l'axe D, d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Déterminez la matrice de u dans $\mathscr{B}$.

Ex 36 On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$. Montrez $P \longrightarrow P(1 - X)$ automorphisme orthogonal. Le reconnaître.

CCP PSI 2019 (matrice orthogonale vérifiant équation)

Ex 37 Soit $M \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\frac{1}{3}(I_n + 2M) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrez que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\left(Mx\,|\,x\right) = \|x\|^2$.

2) Que peut-on en déduire sur M ?

Ex 38 Trouvez toutes les matrices orthogonales à coefficients positifs.

Ex 39 ✷ Montrez, que pour tout automorphisme u orthogonal d'un $\mathbb{R}$-ev euclidien, la dim. de tout ses propre $E_\lambda(u)$ est toujours égal à la multiplicite de λ dans le polynôme caractéristique.

Matrices et Endomorphismes Symétriques

Endomorphisme Symétrique : $u \in \mathscr{L}(E)$ est appelé ***endomorphisme symétrique***, et on note $u \in S(E)$, ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- **(i)** $\forall x, y \in E,\quad \left(f(x)\,|\,y\right) = \left(x\,|\,f(y)\right)$
- **(ii)** Dans toute ***base orthonormée*** $\mathscr{E}$, la matrice de u est symétrique.

Théorème Spectral : Pour toute matrice symétrique $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice ***diagonale*** D et ***une matrice orthogonale*** $P \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ telles que : $S = PDP^{-1} = PDP^{\mathrm{T}}$.
« *Autrement dit* », toute matrice (endomorphisme) symétrique ***réelle*** est ***diagonalisable*** et ses espaces propres sont ***orthogonaux***.
« *Autrement dit* », on « *peut* » diagonaliser une matrice symétrique réelle dans une ***base orthonormée***.

Matrice Symétrique Positive : Une matrice symétrique réelle S est dite ***positive*** et on note $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ (**rp.** ***définie positive*** et on note $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) ssi l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
- **(i)** $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\mathrm{T}} SX \geq 0$ (**rp.** $X^{\mathrm{T}} SX > 0$ pour $X \neq 0$).
- **(ii)** Toute valeur propre de S est positive (**rp**. strictement positive).

Ex 40 Diagonalisez au travers d'une matrice orthogonale $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ex 41 ✍ ✌Montrez le seul endomorphisme symétrique vérifiant $\forall x \in E \quad \big(x \,|\, f(x)\big) = 0$ (cad $f(x) \perp x$) est l'application nulle par deux méthodes : le théorème spectral et en « *considérant* » $x + y$)

Ex 42 ✌ $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = aM + b\,{}^{\mathrm{t}}M$. Soit $\langle \ , \ \rangle$ le produit scalaire défini sur $M_n(\mathbb{R})$ par : $\forall (M,N) \in M_n(\mathbb{R})^2$, $\langle M,N\rangle = \operatorname{tr}({}^{\mathrm{t}}MN)$. L'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ est-il symétrique pour ce produit scalaire ?

CCINP PSI 2022-2014-2012 | CCEM PSI 2015 (inégalité trace d'une matrice symétrique) ✍
Ex 43 Soit A une matrice symétrique réelle. Montrez $(\operatorname{tr} A)^2 \leq \operatorname{rg} A \ \operatorname{tr}(A^2)$.

Ex 44 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi(X,Y) = X^{\mathrm{T}} AY$ pour $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrez ϕ produit scalaire ssi $A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Mines-Ponts PSI 2022 (inégalité de Kantorovitch partielle) ✷✍
Ex 45 Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est définie positive si $\operatorname{Sp} A \subset \mathbb{R}^{+*}$.
1) Soit A définie positive. Montrez il existe une unique matrice B symétrique définie positive tq $B^2 = A$.
2) Soit $(c_1, \dots, c_n)$ une BON de vecteurs propres de A. Exprimer $\big(AX \,|\, X\big)$ en fonction de la décomposition de X dans cette base.
3) Montrez, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|^4 \leq \big(AX \,|\, X\big)\big(A^{-1}X \,|\, X\big)$. Dans quels cas a-t-on égalité ?

Centrale PSI 2023 (matrice antisymétrique 3x3 générique) ✷
Ex 46 Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique non nulle.
1) Montrez 0 est la seule vp réelle de A
2) Montrez il existe $P \in \mathscr{O}_3(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tq $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$

Centrale PSI 2021 (adjoint intégral) ✷✍
Ex 47 On note $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $E = \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire usuel $\big(f \,|\, g\big) = \int_0^{\pi/2} fg$. Pour $f \in E$, on définit 2 fonctions $A(f)$ et $B(f)$ sur I en posant $A(f)(x) = \int_0^x f$ et $B(f)(x) = \int_x^{\pi/2} f$.
1) Montrez que $\forall f, g \in E$, $\big(A(f) \,|\, g\big) = \big(f \,|\, B(g)\big)$. En déduire que les vp de $B \circ A$ sont positives.
2) Montrez $\forall f \in E, \forall x \in I$, $(A(f)(x))^2 \leq x \int_0^x f(t)^2\,dt$. En déduire l'existence d'un réel K indépendant de f tq $\|A(f)\| \leq K \|f\|$.
3) Montrez que A est un endomorphisme continu de E.

Ex 48 ✍ Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base d'un ev euclidien. On pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \big(u_k \,|\, x\big)\, u_k$
1) Que vaut $f(x)$ si la base est orthonormée ?
2) Montrez que dans le cas général l'endomorphisme f est symétrique défini positif.

Ex 49 ***Matrice de Gram :*** Soit E un ev euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs. On pose $G = \big((e_i|e_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$
Montrez $G \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

CCINP PSI 2023 -2022 | Mines-Ponts PSI 2023 (endomorphismes de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) ✷✍
Ex 50 Soient E un espace euclidien et $u \in S(E)$.
1) ~~Montrez $\forall x \neq 0$, $\big(u(x) \,|\, x\big) > 0 \iff \operatorname{Sp} u \subset \mathbb{R}^{+*}$. Un endo. symétrique vérif. ces conditions est dit défini positif.~~ [**Mines :** Question absente] . On note alors $s \in S^{++}(E)$
2) Si a et b sont 2 endo. symétriques de $S^{++}(E)$, montrez il existe un unique $c \in \mathscr{L}(E)$ tq $b = a \circ c + c \circ a$..
3) Montrez que c est symétrique défini positif.
4) [**Mines :** On prend $n = 2$. Montrez il existe $c, a \in S^{++}(E)$ avec $a \circ c + c \circ a$ à spectre non inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$.]

Mines-Ponts PC 2012 (déterminant de la somme de 2 endos positifs) ✷
Ex 51
1) Soit $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A+I_n) \geqslant 1+\det(A)$.
2) Soient A et B dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A+B) \geqslant \det(A)+\det(B)$.

Ex 52 ✌✍ Soit u un endomorphisme symétrique d'un $\mathbb{R}$-ev euclidien E. Montrez $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^\perp$

Mines-Ponts PC 2016 (décomposition polaire) ✷
Ex 53 Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive.
1) Montrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ positive telle que $T^2 = S$.
2) Soit $A \in \mathrm{GL}n(\mathbb{R})$. Montrer que $A^\mathrm{T} A$ est symétrique définie positive.
3) Montrer qu'il existe existe un unique couple (Ω, U) tel que Ω soit orthogonale, U soit symétrique définie positive et $A = \Omega U$.

Ex 54 ✍ Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrez $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists B \in M_n(\mathbb{R})$ tq $S = B^\mathrm{T} B$

Mines-Ponts PSI 2022 (endomorphisme antisymétrique) ✷
Ex 55 Soit E un ev euclidien. On dit qu'un endomorphisme de E est antisymétrique ssi $\forall x, y \in E$, $\big(f(x) \,|\, y\big) = -\big(x \,|\, f(y)\big)$.
1) Montrez f antisymétrique ssi $\forall x \in E, \big(f(x) \,|\, x\big) = 0$. Dans toute la suite f est un endomorphisme antisymétrique.
2) Montrez $\operatorname{Ker} f$ orthogonal à $\operatorname{Im} f$.
3) Soit $s = f \circ f$. Montrez s endomorphisme symétrique. Montrez que toutes ses vp sont négatives ou nulles. Montrez $\operatorname{Ker} s = \operatorname{Ker} f$.
4) On suppose $n = 3$. Montrez il existe une BON dans laquelle ma matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$

Ex 56 ✍ On munit $E = C^\infty([-1,1], \mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $(f|g) = \displaystyle\int_{-1}^1 fg$. Prouvez que l'endomorphisme ϕ de E défini par $\phi(f)(x) = (1-x^2)f''(x) - 2xf'(x)$ est un endom. symétrique de E. (*Utilisez une ipp bien choisie*)

Mines-Telecom PSi 2024 | TPE PSI 2015 | Centrale PC 2016-2014 (dilatation $x \to x + a(u|x)u$) ☜✍
Ex 57 Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie, $u \in E$ un vecteur de norme 1 et $a \in \mathbb{R}$. Soit $f_a \in \mathscr{L}(E)$ qui à x associe $x + a\big(u \,|\, x\big)u$.
Note : Certains énoncés prennent $a \neq 0$ et u unitaire ce qui change un peu les cas et les calculs.
1) [**PC :** Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $f_\alpha \circ f_\beta$. Pour quels α l'endomorphisme f_α est-il bijectif ?]
2) Montrez que f_a est symétrique.
3) [**PSI(2015) :** Trouvez un polynôme annulateur de f_a.]
4) Prouvez les valeurs propres et vecteurs propres de f_a.
5) [**PSI(2015) :** Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il un projecteur orthogonal ?]
6) Pour quelles valeurs de a et u l'endomorphisme f_a est-il une isométrie vectorielle ?
7) Pour quelles valeurs de a et u l'endomorphisme f_a est inversible ?. Si oui, donnez son inverse.

Ex 58 ✍ Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrez que 0 est la seule valeur propre réelle et est d'ordre 1. Quelle est la différence avec les matrices nilpotentes ?

Ex 59 ✷ **Mineurs de Gauss** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On note A_p $1 \leq p \leq n$ les sous-matrices d'ordre p du "coin" en haut à gauche de A. les $\det A_p$ sont appelés les mineurs de Gauss.
1) Montrez $A \in S_n^+ \implies \forall 1 \leq p \leq n \quad \det A_p \geq 0$.
2) Montrez que la réciproque est fausse.
3) ✷✷ Montrez $A \in S_n^{++} \iff \forall 1 \leq p \leq n \quad \det A_p > 0$

Mines-Ponts PSI 2022 (matrice de Gram des vecteurs propres) ✷
Ex 60 Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $(V_1, \dots, V_m)$ une famille libre de vecteurs propres de A avec $m > 0$. Soit Q la matrice de colonnes $V_1, \dots, V_m$ et $S = QQ^\mathrm{T}$. Montrez $S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, S est de rang m et $AS = SA^\mathrm{T}$

Télécom SudParis PSI 2015 (inégalité endomorphisme symétrique) ✍
Ex 61 Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, de valeurs propres $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Montrez pour tout $x \in E$, $\lambda_1 \|x\|^2 \leq (x|u(x)) \leq \lambda_n \|x\|^2$

Espaces Euclidiens de dimension 2 et 3

Description de $O(2)$ **:** Les seules ***matrices orthogonales*** d'ordre 2 sont :

$$R(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\in SO(2)=O^+(2) \qquad S(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\in O(2)\smallsetminus SO(2)=O^-(2)$$

Description de $SO(3)$ **:** Les seuls endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 en dimension 3 sont les rotations d'axe Δ (orienté par le choix de $\omega\in\Delta$) et d'angle donné (de mesure θ) $R(\omega,\theta)$.

RAJOUTER matrice antisymétrique de $\mathbb{R}^3$ ssi $\omega\wedge x$

Ex 62 ✌Montrez, dans $\mathbb{R}^2$, que le vecteur (a,b) « *tourné d'un angle* » de mesure $\frac{\pi}{2}$ est le vecteur $(-b,a)$

Ex 63 ✌Démontrez pour tous vecteurs en dim 3, $\|u\wedge v\|^2+(u|v)^2=\|u\|^2\|v\|^2$.

Ex 64 ***Double Produit Vectoriel :*** Démontrez la formule $x\wedge(y\wedge z)=\big(x\,|\,z\big)\,y-\big(x\,|\,y\big)\,z$

Ex 65 oit ω un vecteur unitaire d 'un ev euclidien orienté E de dimension 3. Reconnaitre $x\to\omega\wedge(\omega\wedge x)$

Ensam PSI 2013 | Centrale PC 2014 | X-ESPCI PC 2011 (caractérisation des rotations en dimension 3) ✷

Ex 66 Soit $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique orienté. Soit $f\in GL(\mathbb{R}^3)$. Montrer l'équivalence :

(i) f est une rotation.

(ii) f vérifie $\forall(u,v)\in(\mathbb{R}^3)^2,\ f(u\wedge v)=f(u)\wedge f(v)$.

Ex 67 Matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe orienté par $(1,2,2)$ et d'angle $\pi/2$?

CCP PSI 2013 (matrice à reconnaitre) ✍

Ex 68 Caractériser $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R})^3$ euclidien canonique de matrice dans la base can. $M=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}8&1&-4\\-4&4&-7\\1&8&4\end{pmatrix}$.

Mines-Ponts PSI 2006 (exponentielle endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$) ✷✍

Ex 69 Soit u un endomorphisme antisymétrique de $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire et de l'orientation usuels.

1) Préciser la forme de la matrice de u dans la base canonique.

2) Montrer qu'il existe un unique vecteur $\omega\in\mathbb{R}^3$ tel que $u(x)=\omega\wedge x$ pour tout x.

3) Justifier la convergence de $\exp u=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n!}$.

4) Montrer que $\exp u$ est une rotation, dont on précisera l'axe et l'angle.

Mines-Ponts PSI 2023 (isométrie de $\mathbb{R}^3$ avec produit vectoriel)

Ex 70 Soient E un ev euclidien orienté de dimension 3 et u un vecteur de norme 1. Onnote f la fonction $x\in E\longrightarrow\langle x,u\rangle u+u\wedge x$.

1) Montrez que f est une isométrie et la caractériser.

2) Trouvez les isométries g vérifiant $g^2=f$.

CCINP PSI 2022 (matrice normale 2×2) ✍

Ex 71 Soit $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tq $MM^{\mathrm{T}}=M^{\mathrm{T}}M$ et $M^2+2I_2=0$.

1) Montrez $M^{\mathrm{T}}M$ est diagonalisable.

2) Montrez que les vp d'une matrice sont racines de tout polynôme annulateur de cette matrice.

3) Déterminez les vp de $M^{\mathrm{T}}M$.

4) Montrez $\frac{1}{\sqrt{2}}M$ orthogonale.

5) Déterminez les matrices M qui conviennent.

Centrale PSI 2014-2013 | Centrale PC 2012 (matrice circulante de rotation) ✷

Ex 72 Soient u,v,w les racines complexes comptées avec multiplicités de X^3+aX^2+bX+c.

1) Montrer les relations $u^2+v^2+w^2=a^2-2b$, $u^3+v^3+w^3=-a^3+2ab-3c$.

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix}v&w&u\\u&v&w\\w&u&v\end{pmatrix}$ Montrer que f est une rotation ssi u,v,w sont les racines de X^3-X^2+k avec $0\leqslant k\leqslant\frac{4}{27}$. Préciser axe et angle.