Quelques corrections sur les Séries Entières

Ex 1

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \underbrace{\frac{\cosh n}{\sinh^2 n} z^n}_{u_n}}$$

On utilise la méthode générale qui est le critère d'**Alembert**[1] et l'équivalent usuel $\cosh x \sim_{+\infty} \sinh x \sim_{+\infty} \frac{1}{2}e^x$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{\cosh(n+1)\sinh^2(n)}{\sinh^2(n+1)\cosh n}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2}e^{n+1}\frac{1}{4}(e^n)^2}{\frac{1}{4}(e^{n+1})^2\frac{1}{2}e^n}|z| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^n e e^{2n}}{e^{2n}e^2 e^n}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e}|z|$$

- Si $\frac{1}{e}|z| < 1 \iff |z| < e$, alors la série $\sum u_n$ ***converge absolument*** d'où $R \geq e$.
- Si $\frac{1}{e}|z| > 1 \iff |z| > e$, alors la série $\sum u_n$ ***diverge grossièrement*** d'où $R \leq e$

On en déduit $\boxed{R = e}$.

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n} z^n}$$

Méthode 1 : On applique la règle de d'Alembert usuelle, mais le développement est très fastidieux. Ce n'est pas la meilleure méthode ici.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= |z| \frac{(1+\sqrt{n})^n}{(1+\sqrt{n+1})^{n+1}} = |z| \exp\Big(n\ln(1+\sqrt{n}) - (n+1)\ln(1+\sqrt{n+1})\Big) \\
&= |z| \exp\left(n\ln\Big(\sqrt{n}\big(1+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\to 0}\big)\Big) - n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\ln\Big(1+\sqrt{n}\big(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\big)^{1/2}\Big)\right) \\
&= |z| \exp\left(n\left(\ln\sqrt{n} + \ln\Big(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\right) - n\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\ln\Big(1+\sqrt{n}\Big(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big)\right)
\end{aligned}$$

1. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).

Je change le $\mathcal{O}$ pour l'homogénéiser avec le premier. On peut ici ... (je vous laisse y réfléchir)

$$= |z|\ \exp\left(n\left(\frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right) - n\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \ln\left(\sqrt{n}+1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$

$$= |z|\ \exp\left(\frac{1}{2}n\ln n + \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \ln\left(\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\right)\right)$$

$$= |z|\ \exp\left(\frac{1}{2}n\ln n + \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \left(\ln\sqrt{n} + \ln\left(1+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}_{\to 0}\right)\right)\right)$$

$$= |z|\ \exp\left(\frac{1}{2}n\ln n + \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \left(\frac{1}{2}\ln n + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}\frac{1}{n}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$

$$= |z|\ \exp\left(\frac{1}{2}n\ln n + \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n\left(1+\frac{1}{n}\right)\ \left(\frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{\sqrt{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$

$$= |z|\ \exp\left(\frac{1}{2}n\ln n + \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n\left(\frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{\ln n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)\right)$$

$$= |z|\ \exp\left(\frac{1}{2}n\ln n + \sqrt{n} - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - n\frac{1}{2}\ln n - \sqrt{n} - \frac{1}{2}\ln n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$= |z|\ \exp\left(-\frac{1}{2}\ln n - \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} e^{-\infty} = 0 < 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C},\ \text{donc } R = +\infty$$

Méthode 2 (plus rapide) :

Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, $\dfrac{z}{1+\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, par suite, à partir d'un certain rang : $0 \leq \left|\dfrac{z^n}{(1+\sqrt{n})^n}\right| = \left|\dfrac{z}{1+\sqrt{n}}\right|^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Du critère de majoration d'une série ***positive*** par une série géométrique convergente, il en résulte la convergence ***pour tout*** z, soit $R = +\infty$.

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} z^{n!}}$$

Méthode de d'Alembert : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |z|^{(n+1)!-n!} = |z|^{n\times n!}$

- Si $|z| < 1$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow 0 < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument, donc $R \geq 1$.
- Si $|z| > 1$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \longrightarrow +\infty > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement donc $R \leq 1$.

Par conséquent $R = 1$.

$$\boxed{\sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\frac{z^n}{n}}$$

Ici, la méthode de d'Alembert ne fonctionnera pas car la fonction cos n'a pas de limite en $+\infty$.

On rappelle le résultat : si deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons respectifs R_A et R_B vérifient (même à partir d'un certain rang) $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_A \geq R_B$. Il suit immédiatement que si $|b_n| \leq |a_n| \leq |c_n|$ et que les séries entières $\sum b_n z^n$ et $\sum c_n z^n$ ont mêm rayon de convergence R, alors $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence R (une sorte de théorème d'encadrement). Ici on écrit

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n} \leq \left|\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\frac{1}{n}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{n}$$

Les séries entières $\sum \frac{1}{2n} z^n$ et $\sum \frac{\sqrt{3}}{2n} z^n$ ont même rayon 1 (par exemple par d'Alembert ou aussi car colinéaire à la série logarithme), d'où $R = 1$.

Remarque :

On rappelle les propriétés de la suite $u_n = \cos(n\theta)$, à retenir pour les élèves ambitieux :

- Si $\theta \in \mathbb{Q}\pi$ (cad $\theta = \frac{p\pi}{q}$), alors la suite (u_n) est périodique, donc ne converge que ssi 1 est une période, autrement dit u_n constante, cad $\theta = 2k\pi$
- Si $\theta \notin \mathbb{Q}\pi$ (par exemple $\theta = 1$), l'ensemble des termes $\left\{ \cos(n\theta) | n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $\left[-1, 1 \right]$.

Ex 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.

1) ✌ Rayon de convergence de la série entière $\sum \left|a_n\right| z^n$?, $\sum a_n z^{2n}$?

2) En utilisant $R = \sup\left\{|x|,\ a_n x^n \longrightarrow 0\right\}$, donnez le rayon de convergence de $\sum a_{2n} z^n$

1) On se rappelle $R = \sup\left\{r > 0,\ \sum a_n r^n \text{ converge absolument}\right\}$ et comme $\left|a_n r^n\right| = \left||a_n| r^n\right|$, il suit immédiatement $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum |a_n| x^n\right)$

La définition du rayon R de $\sum a_n x^n$ permet d'écrire :

- Si $|z|^2 < R$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ converge absolument.
- Si $|z|^2 > R$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z^2)^n$ diverge grossièrement.

Mais ceci s'écrit aussi, par croissance de la racine,

- Si $|z| < \sqrt{R}$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ converge absolument.
- Si $|z| > \sqrt{R}$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$ diverge grossièrement.

On en déduit $R\left(\sum a_n z^{2n}\right) = \sqrt{R} = \sqrt{R\left(\sum a_n z^n\right)}$

2) Si $|z| < R^2$, $\sqrt{|z|} < R$, donc la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\sqrt{|z|})^n$ converge, ou même la suite $a_n (\sqrt{|z|})^n \longrightarrow 0$. par conséquent, la sous-suite des termes d'indice pairs $a_{2n} (\sqrt{|z|})^{2n} = a_{2n} |z|^n \longrightarrow 0$.

En se rappelant $R' = R\left(\sum a_{2n} z^n\right) = \sup\left\{r > 0,\ a_{2n} r^n \longrightarrow 0\right\}$, il suit $R' \geq R^2$.

En fait, on ne peut pas en dire plus, on n'a pas nécessairement $R' = R^2$ … Tout dépend des termes d'indice impairs…

Considérons la suite (a_n) telle que $a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = 2^n$. Alors $\sum a_{2n} z^n$ a évidemment pour rayon $R' = 1$ et, en écrivant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}}_{R=\sqrt{1}=1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^{2n+1}}_{R=1/\sqrt{2}}$$

Le second rayon peut se justifier car c'est une série géométrique (à α près) qui converge ssi $|2x^2| < 1 \iff |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Par le théorème de sommation, on en déduit $R = R\left(\sum a_n x^n\right) = \inf(1, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ici, on a $R' = 1 > \frac{1}{2} = R^2$

CCP PSI 2010 (calcul de rayon de convergence) ✌

Ex 3 Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière de terme général $\arctan(n^a) x^n$.

Je rappelle que si $a_n \sim b_n$, les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même rayon. On distingue les cas

- Si $a > 0$, $n^a \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ donc $\arctan n^a \sim \frac{\pi}{2}$ et donc $R\left(\sum \arctan n^a x^n\right) = R\left(\frac{\pi}{2} \sum x^n\right) = 1$
- Si $a = 0$, $\arctan n^a = \frac{\pi}{4}$ et $R\left(\sum \arctan n^a x^n\right) = R\left(\frac{\pi}{4} \sum x^n\right) = 1$
- Si $a < 0$, $n^a \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ d'où $\arctan n^a \sim n^a$ puis $R\left(\sum \arctan n^a x^n\right) = R\left(\sum n^a x^n\right) = 1$ (c'est du cours)

Mines-Ponts PSI 2015 (rayon d'une série entière) ✷

Ex 6 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \operatorname{tr}(A^k) z^k$.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de A, on sait $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Cette formule « *s'étend* » : $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$. Cette formule n'est pas stricto-sensu du cours mais les élèves « *ambitieux* » devraient la retenir. On la démontre par trigonalisation. En effet, dans $\mathbb{C}$, on peut écrire $M = PTP^{-1}$ avec T triangulaire et les valeurs propres sur la diagonale. Par suite $A^k = PT^kP^{-1}$ et le cours nous apprend alors que sur la diagonale de T^k, il y a les coefficients diagonaux à la puissance k, soit les λ_i^k d'où le résultat.

Revenons à notre exo. Pour bien raisonner, on utilise plutôt les vp distinctes (on les note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$) et leurs multiplicité respective notée $m_i \geq 1$. On a alors $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^p m_i \lambda_i^k$ (je vous laisse y réfléchir). On ne peut considérer que les vp non nulles dans cette somme (et si elles sont toutes nulles, par exemple pour une matrice nilpotente, la série entière nulle a évidemment un rayon $+\infty$). La série entière à considérer est alors $\sum \left(\sum_{i=1}^p m_i \lambda_i^k \right) z^k$. Pour faciliter la compréhension, on va prendre n à la place de k, en oubliant donc que n est la dimension, elle ne devrait plus trop nous servir. Cette série entière s'écrit comme somme de p séries entières $\sum\limits_{i=0}^{p} m_i \sum \lambda_i^n z^n$.

Comme la série entière géométrique complexe $\sum \lambda_i^n z^n$ converge ssi $|\lambda_i z| < 1$ ssi $|z| < \frac{1}{|\lambda_i|}$, on en tire que le rayon de convergence de la série entière $\sum \lambda_i^n z^n$ est $R_i = \frac{1}{|\lambda_i|}$. Par sommation, on en tire que le rayon R vérifie

$$R \geq \inf_{1 \leq i \leq p} \left(\frac{1}{|\lambda_i|} \right) = \frac{1}{\max\limits_{1 \leq i \leq p} (|\lambda_i|)}$$

Malheureusement on n'a qu'une inégalité. Je rappelle que si $R_a \neq R_b$, on sait que $R\left(\sum (a_n + b_n) x^n\right) = \inf\left(R_a, R_b\right)$ ***mais ici***, même si on a $\lambda_i \neq \lambda_j$, on n'a pas nécessairement $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$. Montrons que le résultat subsiste : on considère donc deux ***complexes*** tels que $\lambda \neq \mu$ et $|\lambda| = |\mu| = \rho$ et établissons que $R\left(\sum (\lambda^n + \mu^n) z^n\right) = \frac{1}{\rho}$ sachant que le cours nous donne déjà $\geq \frac{1}{\rho}$. On pose $\lambda = \rho e^{i\theta}$ et $\mu = \rho e^{i\phi}$ avec $\theta \neq \phi \in \left[0, 2\pi\right[$.

Méthode 1 (par les suites) : Considérons la suite $u_n = (\lambda^n + \mu^n) z^n$ avec $z = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$. On a

$$u_n = \left(\rho^n e^{in\theta} + \rho^n e^{in\phi}\right) \frac{1}{\rho^n} e^{-in\theta} = 1 + e^{in(\phi - \theta)} = 1 + \cos\left(n(\phi - \theta)\right) + i \sin\left(n(\phi - \theta)\right)$$

Je rappelle les faits suivants (je ne les redémontre pas ici) sur la suite $\sin(nx)$:

- Si $x = k\pi$, la suite est la constante nulle donc ***converge***.
- Si $x = \frac{p}{q}\pi$, sauf le cas au-dessus, la suite est ***périodique*** (de période 2q), non constante, et ne converge donc pas. Par exemple la suite $\sin\left(2n\frac{\pi}{3}\right)$ prend cycliquement les valeurs 0, $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Si $x \notin \mathbb{Q}\pi$, la suite est ***dense*** dans $\left[-1, 1\right]$ donc diverge (par exemple, la suite $(\sin n)$.

En se rappelant aussi qu'une suite complexe (z_n) converge ssi les ***deux suites réelles*** $(\Re z_n)$ ***et*** $(\Im z_n)$ convergent, on obtient que $(\Im u_n)$ converge ssi $\phi - \theta = k\pi$, qui n'est possible ici que pour ± 1 et alors la suite $(\Re u_n)$ qui vaut $\cos(n\pi) = (-1)^n$ diverge. Par conséquent, on a ***toujours divergence*** de la suite complexe (u_n) donc, propriété du rayon, $R \leq |z| = \frac{1}{\rho}$

Méthode 2 (par la fonction-somme) : Il faut prêter très attention à la fonction-somme entière quand on raisonne dans $\mathbb{C}$ car elle est de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$! En effet,ce qu'on appelle une fonction complexe et d'ailleurs toutes les fonctions dites complexes vues par ailleurs sont de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. La notion de continuité et de limite sont plus délicates, elles font partie du cours sur les evns (pas encore traité à ce jour). Quant à la notion de « *dérivable* », elle n'existe pas, tout au moins dans votre programme : vous avez seulement la notion de différentiable en gérant les 2 variables (x, y) de $z = x + iy$, là-encore cours un peu plus tard. La méthode 1 utilise la notion de suite complexe plus abordable.

Revenons à notre exo. C'est assez simple, quand même, car on connaît l'expression de la fonction-somme, sur $\left]-R,R\right[$, puisque ce sont des séries géométriques, qui est donc $z \longrightarrow \frac{1}{1-\lambda z}+\frac{1}{1-\mu z}$. Par l'absurde, supposons $R>\frac{1}{\rho}$. Faisons tendre $z \longrightarrow \frac{1}{\lambda}$. $\frac{1}{1-\lambda z}$ n'a pas de limite, ***Attention!*** pas de limite infinie ici, l'infini n'existe pas dans $\mathbb{C}$! et $\frac{1}{1-\mu z} \longrightarrow \frac{1}{1-\mu/\lambda}$ qui existe bien car $\lambda \neq \mu$. Par suite, comme dans $\mathbb{R}$, pas limite + limite = pas limite. Or, si on applique son cours sur les séries entières, comme $\frac{1}{\lambda} \in \left]-R,R\right[$, avec $R>\frac{1}{\rho}=\frac{1}{|\lambda|}$, la fonction-somme est ***continue*** en $\frac{1}{\lambda}$. ***Absurde!***

Conclusion $\boxed{R\Big(\sum \operatorname{tr}(A^n)z^n\Big)=\dfrac{1}{\max\limits_{1\leq i\leq p}(|\lambda_i|)}=\dfrac{1}{\rho(A)}}$

Remarque : La quantité $\max_{\lambda\in \operatorname{Sp} A}|\lambda|$ intervient fréquemment dans les exos. Un élève « *ambitieux* » peut retenir qu'elle s'appelle ***rayon spectral*** de A et se note $\rho(A)$.

Mines-Ponts PSI 2016 (rayon de convergence) ✌

Ex 9 Déterminez le rayon de convergence de la série entière de terme général $\left(3+(-1)^n\right)^n x^n$.

Ici, la méthode de d'Alembert ne s'applique pas correctement car les sous-suites paires et impaires de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'ont pas la même limite. On utilise que cette série entière est somme des 2 séries $\sum 4^{2n}x^{2n}$ et $\sum 2^{2n+1}x^{2n+1}$. Ces 2 séries ont respectivement pour rayon (immédiat à l'aide des séries géométriques) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Le cours nous donne alors $R=\inf(\frac{1}{4},\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$ (= car $\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}$).

IMT PSI 2022 (calcul rayon de convergence)

Ex 10 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On considère une suite (d_n) définie par $d_n=\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

1) Trouvez une relation de récurrence entre d_n et d_{n+1}

2) Montrez par récurrence $d_n\leq 2$.

3) En conclure la convergence de (d_n).

4) Donnez le rayon de la série entière $\sum d_n x^n$.

1) Il faut bien s'y prendre … :

$$(n+1)!\,d_{n+1}=1!+\cdots+n!+(n+1)!=n!\,d_n+(n+1)! \quad\Longrightarrow\quad \boxed{d_{n+1}=\frac{1}{n+1}\,d_n\;+1}$$

2) Immédiat, je ne corrige pas.

3) $d_n\geq 0$ joint à la récurrence amène $d_{n+1}\geq 1$ puis :

$$0\leq d_{n+1}-1\leq\frac{d_n}{n+1}\leq\frac{2}{n+1}$$

On en déduit, par encadrement, la convergence vers $\ell=1$

4) Je rappelle que lorsque, la méthode de d'Alembert n'est pas adaptée, on applique les propriétés du cours :

$$R=\sup\Big\{r>0,\ \textbf{série}\ \sum_n a_n r^n \text{converge}\Big\}\quad R=\sup\big\{r>0,\ \textbf{suite}\ a_n r^n\longrightarrow 0\big\}\quad R=\sup\big\{r>0,\ \textbf{suite}\ a_n r^n \text{bornée}\big\}$$

Dans la pratique, on encadre R selon que la série $\sum a_n r^n$ converge ou diverge, ***ou*** que la suite $a_n r^n$ converge ou pas vers 0, ***ou*** que la suite $a_n r^n$ est bornée ou pas …

- Ici, la suite $d_n\longrightarrow\ell\neq 0$: comme la suite $d_n=d_n 1^n$ (on a pris $z=1$) ne tend pas vers 0, $R\geq|z|=1$.
- Comme la suite $d_n 1^n=d_n$ est bornée (car convergente) , $R\leq 1$

Finalement $R = 1$.

Mines-Ponts PSI 2016 (rayon de convergence) ✌

Ex 10 Déterminez le rayon de convergence de la série entière de terme général $\left(3+(-1)^n\right)^n x^n$.

Ici, la méthode de d'Alembert ne s'applique pas correctement car les sous-suites paires et impaires de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'ont pas la même limite. On utilise que cette série entière est somme des 2 séries $\sum 4^{2n}x^{2n}$ et $\sum 2^{2n+1}x^{2n+1}$. Ces 2 séries ont respectivement pour rayon (immédiat à l'aide des séries géométriques) $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Le cours nous donne alors $R = \inf(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ (= car $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$).

Ex 12 On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$. En considérant $g(x) = (1-x)f(x)$, établir que la limite à droite de f en -1 existe et est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$.

La série entière $\sum \sqrt{n}x^n$ a pour rayon $R = 1$ (c'est du cours $\sum n^a x^n$ avec $a = \frac{1}{2}$). On sait donc qu'elle est définie sur $\left]-1,1\right[$ (rappel : sur au moins $\left]-1,1\right[$ et au plus $\left[-1,1\right]$), mais on ne peut, à priori, rien dire sur la limite en -1.
On peut remarquer que la série diverge en $x = -1$, puisque c'est la série $\sum \sqrt{n}(-1)^n$ qui ***diverge grossièrement***. On « *aurait* » donc tendance à dire que la limite de la fonction-somme en -1 n'est certainement pas finie ... En fait si ! , comme va le montrer cet exo ... On utilise une fonction auxiliaire g :

$$g(x) = (1-x)f(x) = f(x) - xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n-1}x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)x^n$$

Par utilisation d'un dl usuel en 0, on a

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \sqrt{n}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = \sqrt{n}\left(1-1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

On sait alors $R\left(g(x)\right) = R\left(\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}x^n\right) = 1$. Or, ***à la différence*** de f, en $x = -1$, la série entière $g(x)$ est ***convergente*** : elle est alternée et on utilise la ***méthode du dl*** (***Attention!*** on ne peut pas utiliser le critère d'équivalent pour prouver la convergence) pour le prouver (on reprend le dl plus haut) :

$$\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n = (-1)^n\sqrt{n}\left(1-\left(1+\frac{1}{2}(-\frac{1}{n})-\frac{1}{8}(-\frac{1}{n})^2+o(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{a_n} + \underbrace{\frac{1}{8}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}}_{b_n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{c_n}$$

Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes par le critère du CSSA et la série $\sum c_n$ par le critère « *petit o* » appliqué à la série ***positive*** convergente $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$.
On applique alors le résultat suivant, démontré en dessous, que comme $g(x)$ ***converge*** en $x = -1$ (à la différence de $f(x)$, redisons-le), alors g est ***continue*** en -1. Par suite, $f(x) = \frac{g(x)}{1-x}$ admet une ***limite finie*** en $x = -1$ qui est $\frac{g(-1)}{2}$.

En fait, $g(-1)$ vérifie le CSSA (ce qui nous donne une autre preuve de sa convergence) car, décroissance et limite 0 découlent de :

$$\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)(-1)^n = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}(-1)^n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

Par conséquent, c'est du cours, $g(-1)$ peut s'encadrer par les sommes partielles paires et impaires, soit :

$$-1 = (\sqrt{1}-0)(-1) = S_1 \leq g(-1) \leq S_2 = (\sqrt{1}-0)(-1)+(\sqrt{2}-\sqrt{1})(-1)^2 = \sqrt{2}-2 \leq -\frac{1}{2} \quad\Longrightarrow\quad -\frac{1}{2} \leq \lim_{-1} f(x) = \frac{g(-1)}{2} \leq -\frac{1}{4}$$

Démonstration de la continuité de g ***en*** $x=-1$ ***:*** On va démontrer la continuité de g sur l'intervalle $I=\left[-1,0\right]$ par le ***théorème de continuité*** des séries de fonctions à $g(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\underbrace{\frac{x^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}}_{u_n(x)}$:

- u_n est clairement continue sur I
- Il faut démontrer la convergence uniforme de la série de fonctions sur $I=[-1,0]$. On commence par essayer la convergence normale mais on voit très vite que le sup sur cet intervalle va être de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, dont la série diverge. On est donc ramené au cad de l'étude d'une convergence uniforme non normale, cas difficile, sauf dans le cas d'une série vérifiant le CSSA, ce qui est le cas ici. En effet il est clair que $|u_n(x)|=\frac{|x|^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ tend vers 0 et ***décroit*** puisque les 2 « *morceaux* » $|x|^n$ et $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ immédiatement le font , et sont **positifs**. On applique alors le résultat sur le reste R_n d'une série vérifiant le CSSA :

$$\forall x\in[-1,0],\ |R_n(x)|\leq|u_{n+1}(x)|=\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\quad\Longrightarrow\quad\sup_{x\in[-1,0]}\left|R_n(x)\right|\leq\sup_{x\in[-1,0]}\frac{|x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}}$$

  Par encadrement, il en résulte la convergence uniforme de la suite R_n vers 0, donc la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n(x)$ sur I.

Remarques

- Je rappelle que, ***pour pouvoir écrire*** que la limite de $g(x)$ lorsque $x\longrightarrow a$ est $g(a)$, on a besoin de la ***continuité*** de g en a.
- Je rappelle que si le rayon de convergence est R, on sait alors que la somme de la série entière est définie et continue sur $]-R,R[$. Si la série converge en R (ou $-R$), il n'y a rien dans le cours sur la continuité en R (ou en $-R$). Il faut donc « *revenir* » aux théorèmes des séries de fonctions. Néanmoins, les élèves « *ambitieux* » peuvent retenir que ***si*** une série entière ***converge*** en $x=R$ (ou $x=-R$), alors elle (la somme de la série) est ***nécessairement continue*** en R (ou $-R$). ***Attention!*** ce résultat est complètement hors-programme. Il est démontré dans un exo de la feuille.

CCINP PSI 2024-2023-2022 (série entière)

Ex 13 Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}$, on pose $I_{kn}=\int_0^{+\infty}t^ke^{-nt}\,dt$ et $a_n=\frac{n!}{n^{n+1}}$.

1) Montrez que I_{kn} est bien définie.

2) Calculez I_{kn}

3) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq1}a_nx^n$?

4) Nature de $\sum a_ne^n$ et $\sum a_n(-e)^n$. Donnez le domaine de définition de $\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$. [**2023-22 :** Quest. absente] .

5) Montrez l'égalité $\forall x\in\left]-R,R\right[\ \sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n=\int_0^{+\infty}\frac{tx}{e^t-tx}\,dt$.

1)

- La fonction $f_{k,n}(t)=t^ke^{-nt}$ est ***continue*** sur $\left[0,+\infty\right[$. (***Attention!*** $k\geq0$ permet de « *fermer* » en 0)
- ***Etude en*** $t=+\infty$ Comme $n>0$ (***Attention!*** à bien vérifier ceci), on en déduit $\lim_{+\infty}t^2f_{kn}(t)=0$ et donc, par le critère $t^2f(t)$, ***l'intégrabilité*** de f_{kn} en $+\infty$.

f_{kn} est donc intégrable sur $\left[0,+\infty\right[$ d'où l'intégrale I_{kn} existe.

2) On effectue une ipp avec $u=t^k\quad v'=e^{-nt}\quad u'=kt^{k-1}\quad v=-\frac{1}{n}e^{-nt}$

$$\forall k\geq1,\ I_{kn}=\int_0^{+\infty}t^ke^{-nt}\,dt=\left[-\frac{1}{n}t^ke^{-nt}\right]_0^{+\infty}+\frac{k}{n}\int_0^{+\infty}t^{k-1}e^{-nt}\,dt=0+\frac{k}{n}I_{k-1,n}$$

Utiliser l'ipp en $+\infty$ est licite ***si on prend*** $k \geq 1$, car alors la deuxième intégrale existe bien et d'ailleurs $k > 0$ est aussi ***nécessaire*** pour que le premier membre de l'ipp vaille 0 en $t = 0$. Il faut penser à bien écrire tout cela sur sa copie.

Une récurrence immédiate amène alors $I_{kn} = \frac{k!}{n^k} I_0$, avec $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-nt} = \frac{1}{n}$, d'où finalement $\boxed{I_{kn} = \dfrac{k!}{n^{k+1}}}$

Remarque : On remarque que $a_n = I_{nn}$

3) On essaye la règle de d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x| \frac{(n+1)!n^{n+1}}{n!(n+1)^{n+2}} = |x|\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+1} = |x|\exp\Big((n+1)\ln\frac{n}{n+1}\Big) = |x|\exp\Big((n+1)\ln\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\Big)$$
$$= |x|\exp\Big((n+1)\ln\big(1-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\big)\Big) = |x|\exp\Big((n+1)\big(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\big)\Big) = |x|\exp\big(-1+o(1)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|\frac{1}{e}$$

- ***Si*** $\frac{|x|}{e} < 1 \iff |x| < e$, la série converge absolument, donc $R \geq e$
- ***Si*** $\frac{|x|}{e} > 1 \iff |x| > e$, la série diverge grossièrement, donc $R \leq e$

Finalement, $R = e$

4)

$$\forall x \in\,]-e,e[\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \underbrace{t^n e^{-nt}x^n}_{f_n(t)}\,dt \overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} t^n e^{-nt}x^n\,dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}(txe^{-t})^n\,dt$$
$$\overset{(2)}{=} \int_0^{+\infty}\frac{txe^{-t}}{1-txe^{-t}}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{tx}{e^t-tx}\,dt$$

- **(1)** On utilise le théorème d'intégration terme à terme :
  - Les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$ (Q1).
  - La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ C'est une série géométrique mais ***Attention!*** , il faut vérifier la raison $|r| = |txe^{-t}| < 1$! On est contraint d'étudier la fonction $g(t) = te^{-t}$: $g'(t) = e^{-t}(1-t)$ et une très simple étude des variations (je ne mets pas les détails ni le tableau ici) montre que le sup sur $[0,+\infty[$ est en $t = 1$ et $g(1) = e^{-1}$. On a bien $|txe^{-t}| < e \times e^{-1} = 1$. et sa somme est ***continue par morceaux*** sur $[0,+\infty[$.
  - La série numérique $\sum_n \int_{[0,+\infty[} |f_n|$ converge : $\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,dt = I_{nn}|x|^n = a_n|x|^n$, terme de la série entière qui converge donc puisque par hypothèse $x \in\,]-R,R[$
- **(2)** ***Attention!*** la somme de la série géométrique commence à 1 ! On a alors $\sum_{n=1}^{+\infty} u^n = \frac{1}{1-u} - 1 = \frac{u}{1-u}$

CCINP MP 2022 | CCP PSI 2022-2019-2008 (série entière à terme intégral)

Ex 14 On considère la suite (u_n) dont le terme est $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt$. [**2008 :** Juste rayon et somme] [**MP :** Juste rayon et somme] .

1) Montrez il existe 3 réels a, b, c tels que $\forall x \in]-R,R[, \forall t \in [0,1], \frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{at+b}{t^2+1} + \frac{c}{1-tx}$.

2) [**2019 :** Rappelez la définition du rayon de convergence.]

3) Donnez le rayon de la convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

4) Calculez $S(x)$ pour $x \in]-R,R[$.

5) Etudiez la limite de S en $-R$

5) [**2019 :** Montrez que $S(-1)$ existe et le calculer] .

1) ***Attention!*** à ne pas oublier l'éventuelle partie entière dans une décomposition en élément simples; elle existe ssi $F = \frac{P}{Q}$avec $\deg P \geq \deg Q$, c'est alors le quotient dans la division euclidienne de P par Q).Ici $\deg(1) = 0 < 3$ donc elle est nulle. On prêtera aussi attention au paramètre x, pouvant faire double usage / confusion avec le paramètre t.

$$\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = 0 + \frac{at+b}{t^2+1} + \frac{c}{1-tx}$$

- $\times(1-tx)$ puis valeur $t = \frac{1}{x}$ donne $c = \dfrac{x^2}{1+x^2}$
- $\times t$ et limite quand $t \longrightarrow +\infty$ donne $0 = a - \dfrac{c}{x}$ soit $a = \dfrac{x}{x^2+1}$
- $t = 0$ donne $1 = b + c$ soit $b = \dfrac{1}{x^2+1}$

2) La définition de mon cours : pour toute série entière $\sum a_n x^n$, il existe un unique réel $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tel que :

- Si $|x| < R$, la série $\sum a_n x^n$ converge ***absolument***.
- Si $|x| > R$, la série diverge ***grossièrement***.

Il y en a d'autres…

Remarque : On peut aussi prendre comme définition, l'une des 4 suivantes, en prenant les sup dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$:

$$\begin{aligned} R &= \sup\left\{ |x|, \text{ la } \textbf{\textit{série}} \sum a_n x^n \text{ converge absolument} \right\} = \sup\left\{ |x|, \text{ la } \textbf{\textit{série}} \sum a_n x^n \text{ converge } \right\} \\ &= \sup\left\{ |x|, \text{ la } \textbf{\textit{suite}}\ a_n x^n \text{ converge vers } 0 \right\} = \sup\left\{ |x|, \text{ la } \textbf{\textit{suite}}\ a_n x^n \text{ est bornée } \right\} \end{aligned}$$

3) Si on essaye d'appliquer la méthode de d'Alembert : $\left|\dfrac{a_{n+1}t^{n+1}}{a_n t^n}\right| = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}|t|$, on s'aperçoit qu'on est un peu embêté, la limite est du type $\frac{0}{0}$, en soi ce n'est pas cela qui est embêtant en prépas!, car on effectue alors un petit dl/équivalent, mais ici c'est une intégrale, alors les équivalents/dls, c'est plus compliqué…

On essaye une autre méthode : on encadre l'intégrale, en espérant que les valeurs obtenues des 2 côtés donneront une série entière de ***même rayon***

$$R = 1 \longleftarrow \frac{1}{2(n+1)} = \int_0^1 \frac{t^n}{1+1}\,dt \;\leq\; u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt \;\leq\; \int_0^1 \frac{t^n}{1+0}\,dt = \frac{1}{n+1} \longrightarrow R = 1$$

Comme la série entière $\sum \frac{x^n}{n+1}$ a pour rayon 1 (***ou*** par d'Alembert ***ou*** en reconnaissant la série usuelle $\frac{1}{x}\sum_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}(-\ln(1-x))$). Rappelons que la série $\alpha \sum_n a_n x^n$ a même rayon que la série entière $\sum_n a_n x^n$. Par encadrement, $R \geq 1$ et $R \leq 1$, soit $R = 1$.

Remarque : Trouvez un équivalent de u_n n'est pas si difficile que cela, il fait partie des questions « *classiques* » : avec le changement de variables $u = t^n$ bijectif et C^1 de $]0,1[$ sur $]0,1[$, $t = u^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln u\right)$ et $dt = \frac{1}{n}u^{1/n1}\,\mathrm{d}u$:

$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u}{1+u^{2/n}}\frac{u^{1/n}}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^1 f_n(u)\,\mathrm{d}u \sim \frac{1}{n}\frac{1}{2}$$

Car le théorème de Lebesgue amène $\int_0^1 f_n \longrightarrow \frac{1}{2}$ lorsque $n \to +\infty$ car :

- ***Convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***:***

$$f_n(u) = \frac{u^{1/n}}{1+u^{2/n}} \longrightarrow \left.\begin{cases} \frac{1}{1+1} & \text{si } 0 < u \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\right\} f(u)$$

- ***Domination :***

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\frac{u^{1/n}}{1+u^{2/n}}\right| \leq \frac{1}{1+0}\ \textbf{\textit{intégrable sur}}\ ]0,1[$$

4)

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\,,\; S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,dt\,x^n \overset{(1)}{=} \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{1+t^2}x^n\;dt=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\sum_{n=0}^{+\infty} t^n x^n\;dt$$

$$\overset{(2)}{=}\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)(1-tx)}\;dt \overset{(3)}{=} \int_0^1 \frac{\frac{xt+1}{1+x^2}}{t^2+1}+\frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{1-tx}\;dt=\frac{1}{1+x^2}\int_0^1 \frac{xt+1}{t^2+1}+\frac{x^2}{1-tx}\;dt$$

$$=\frac{1}{1+x^2}\left[\frac{x}{2}\ln(1+t^2)+\arctan(t)-x\ln(1-tx)\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$=\boxed{\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}-x\ln(1-x)\right)}$$

- **(1)** Résulte de l'application du théorème ***d'intégration terme à terme :***
  - La série de fonctions $\sum f_n(t)=\sum\frac{t^nx^n}{1+t^2}=\frac{1}{1=t^2}\sum(tx)^n$, presque géométrioque, converge simplement sur $[0,1]$ vers $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)}$ (***car*** $|tx|<1$) qui est bien ***continue par morceaux*** sur $[0,1]$: $1-tx$ ne s'y annule pas car $\frac{1}{|x|}>1$.
  - La série $\sum\int_0^1|f_n(t)|\,dt$ converge car de valeur $\leq\frac{1}{1+0}\int_0^1 t^n|x|^n\,dt=\frac{1}{n+1}|x|^n\leq|x|^n$ série géométrique convergente et critère de majoration d'une série positive.
- **(2)** Série géométrique convergente ***car*** $|tx|\leq|x|<1$
- **(3)** Décomposition en éléments simples de la Question Q1

5) ***Attention!*** à bien comprendre le problème de -1 : c'est une borne de l'intervalle ouvert de convergence $\left]-1,1\right[$ et les théorèmes ne « *marchent* » pas en -1.

$S(-1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^n\frac{t^n}{1+t^2}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nu_n.$
$u_n\geq0$ donc ***c'est bien une série alternée***. Elle vérifie le CSSA car :

- $u_n\longrightarrow0$ par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :
  - La suite de fonctions (f_n) ***converge simplement*** sur $[0,1]$ vers $f:\begin{cases}0 & \text{si } t\in[0,1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } t=1\end{cases}$
  - ***Hypothèse de Domination :*** $\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[0,1],\;|f_n(t)|\leq1$

    La constante 1 est bien ***intégrable sur*** $[0,1]$.
- $|u_n|\searrow$ car : pour $t\in[0,1], 0\leq t^{n+1}\leq t^n$ donc $\frac{t^{n+1}}{1+t^2}\leq\frac{t^n}{1+t^2}$ puis ***croissance*** de l'intégrale.

Attention! On n'a pas le ***droit*** de remplacer dans la « *formule* » plus haut par $\mathbf{x=-1}$.

Solution : passage à la limite lorsque $x\longrightarrow-1$ ce qui nécessite de regarder la ***continuité des deux*** expressions en -1 :

$$\forall x\in\left]-1,1\right[\,,\;S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{u_nx^n}_{h_n(x)}=\underbrace{\frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x}{2}\ln2+\frac{\pi}{4}-x\ln(1-x)\right)}_{g(x)}$$

- g est continue en -1, par continuité des fonctions usuelles, on peut donc ***remplacer*** par -1.
- La série entière $S(x)$ n'est ***pas continue en*** $-R=-1$ ***par « défaut »***. Il faut donc appliquer le théorème de continuité d'une série de fonctions à $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}h_n(x)$:
  - les fonctions h_n sont clairement continues sur $I=\left[-1,0\right]$
  - Malheureusement, la série de fonctions $\sum h_n(x)$ ne converge pas normalement sur $I=[-1,0]$ car $\sup_{x\in[-1,0]}\left|u_nx^n\right|=|u_n|=O(\frac{1}{n})$.

Heureusement, la série de fonctions vérifie le CSSA pour tout $x \in I$: $\sum h_n(x) = \sum (-1)^n u_n (-x)^n$: elle est bien alternée, $u_n x^n \to 0$ est immédiat. On a déjà vu $u_n \searrow$, $|x|^n$ aussi et sont postives toutes les deux, donc Ok.

On applique le résultat qui donne une majoration du reste d'une série alternée verifiant le CSSA ***pour tout*** x :

$$\left|R_n(x)\right| \leq |u_{n+1}|\,|x|^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \Longrightarrow \sup_{x\in I}\left|R_n(x)\right| \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

Il y adonc ***convergence uniforme*** de la série de fonctions sur $I = [-1, 0]$

On termine en pasasnt à la limite lorsque $x \longrightarrow -1$ et en appliquant la continuité de S :

$$S(-1) = \lim_{x\to -1} S(x) = \lim_{x\to -1} \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} - x\ln(1-x)\right) = \boxed{\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2}$$

Mines-Ponts PSI 2012 | Mines-Ponts PC 2013 (équivalent série entière) ✷

Ex 18 Soit $f : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n) x^n$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que la suite de terme général $\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ a une limite dans $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la limite de f en 1^-.

4) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

1) On calcule le rayon par la méthode de d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x| \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \sim |x| \frac{\ln(n)}{\ln n} \xrightarrow{n\to+\infty} |x|$$

- Si $|z| < 1$, la série $\sum \ln n x^n$ converge absolument, donc $R \geq 1$
- Si $|z| > 1$, la série $\sum \ln n x^n$ diverge grossièrement, donc $R \leq 1$

On en déduit $R = 1$ soit $\left]-1, 1\right[\subset \operatorname{Def} f \subset \left[-1, 1\right]$. Comme il est clair que la série diverge grossièrement en $x = \pm 1$, il vient $\operatorname{Def} f = \left]-1, 1\right[$

2) Je rappelle le critère suivant : une ***suite*** (u_n) converge ssi la ***série*** $\sum (u_n - u_{n+1})$ converge. On l'applique ici :

$$u_{n+1} - u_n = \ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n+1} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$$

Je rappelle (ce n'est pas du cours mais devrait être retenu par les élèves « *ambitieux* ») que cette constante se note $-\gamma$ et γ s'appelle constante d'Euler-Mascheroni : $\boxed{H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)}$

3) Par positivité $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln n x^n \geq \sum_{k=2}^{n} \ln k x^k$. L'avantage est qu'il n'y aucun problème pour passer à la limite dans le second membre. Par contre on ne peut passer immédiatement passer à la limite dans cette inégalité car on ne sait pas si f a une limite quand $x \to 1$. En fait f est une somme de fonctions croissantes, les $x \to \ln n x^n$, tout au moins sur $\left[0, 1\right]$, donc est elle-même croissante et par suite, a une limite, finie ou infinie, en 1, que l'on note ℓ. On passe alors à la limite dans l'inégalité, soit $\ell \geq \sum_{k=2}^{n} \ln k$. Cette inégalité est vraie ***pour tout*** n, et comme la série $\sum \ln n$ diverge grossièrement et que ses termes sont ***positifs***, on sait $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=2}^{n} \ln k = +\infty$. par conséquent $\ell = +\infty$.

4) On utilise Q2 pour $0 \leq x < 1$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n \overset{(1)}{=} f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \times \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n \overset{(2)}{=} f(x) + \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

- **(1)** On reconnaît en $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ un produit de Cauchy avec $a_k=\frac{1}{k}$ et $b_{n-k}=1$, sans oublier $a_0=0$ qui donne donc les séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty}1x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}x^n$
- **(2)** On aura reconnu deux séries usuelles…

D'autre part on sait, d'après la limite de Q2, àpcr N, $\left|\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma\right|<\varepsilon$. On écrit alors, pour $0\le x<1$:

$$\begin{aligned}\left|f(x)+\frac{\ln(1-x)}{1-x}-\gamma\frac{x}{1-x}\right| &= \left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma\right)x^n\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma\right|x^n\\ &\le \underbrace{\sum_{n=1}^{N}\left|\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma\right|x^n}_{P(x)}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left|\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\gamma\right|x^n \le P(x)+\varepsilon\sum_{n=N+1}^{+\infty}x^n\\ &\le P(x)+\varepsilon\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = P(x)+\varepsilon\,\frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

Comme $\frac{1}{1-x}\xrightarrow{x\to 1_-}+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to 1_-}\frac{P(x)}{1/1-x}=\frac{P(1)}{+\infty}=0$. Par suite, propriété de la limite, pour $1-\eta<x<1$

$$\left|\frac{P(x)}{1/1-x}\right|<\varepsilon \qquad\Longrightarrow\qquad P(x)\le |P(x)|<\varepsilon\left|\frac{1}{1-x}\right|=\varepsilon\frac{1}{1-x}$$

Avec l'inégalité plus haut, il suit pour $1-\eta<x<1$, $\left|f(x)+\frac{\ln(1-x)x}{1-x}-\gamma\frac{x}{1-x}\right|<2\varepsilon\,\frac{1}{1-x}$. Ceci est ***exactement***

$$f(x)+\frac{\ln(1-x)}{1-x}-\gamma\frac{x}{1-x}=o_{1_-}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

On a donc un peu plus que l'énoncé puisqu'on a un développement asymptotique à 2 termes. Comme, au voisinage de 1_-, $\frac{x}{1-x}$ et $\frac{1}{1-x}$ sont des $o\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x}\right)$,

$$\boxed{f(x)\sim_{1_-}\frac{-\ln(1-x)}{1-x}}$$

Mines-Ponts PSI 2018 (équivalent série entière lacunaire) ✷ ✷

Ex 19

1) Précisez le rayon de convergence de $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^{2^n}$.

2) Montrez que $f(x)\longrightarrow+\infty$ lorsque $x\longrightarrow 1$ et donnez un équivalent de f en 1.

1) Si $|x|<1, |x|^{2^n}\le|x|^n$. Critère de majoration par une série positive géométrique convergente, la série entière $\sum x^{2^n}$ converge. On en déduit $R\ge 1$.

Pour $x=1$, la suite 1^{2^n} ne tend pas vers 0, donc $R\le 1$. Par suite, $R=1$.

2) Les fonctions $x\longrightarrow x^{2^n}$ étant croissantes sur $[0,1[$, par sommation, f l'est aussi. Elle admet donc une limite, finie ou infinie, lorsque $x\longrightarrow 1$, notée ℓ. Comme$f(x)\ge\sum_{n=0}^{N}x^{2^n}$, on passe à la limite lorsque $x\longrightarrow 1$, puisque les limites existent, l'inégalité étant conservée, même dans $\overline{\mathbb{R}^+}$. Il suit $\ell\ge N$. Comme cette inégalité est vraie pour tout$N$, on en déduit $\ell=+\infty$.

On applique le résultat suivant, qui n'est pas au programme, mais qui sert de temps en temps aux oraux…

Si $a_n,b_n\ge 0$, les 2 séries entières $\sum a_nx^n$ et $\sum b_nx^n$ de ***rayon*** 1, la série $\sum a_n$ ***diverge*** (donc $\sum b_n$ aussi) ***et que*** $a_n\sim b_n$, alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\underset{x\to 1_-}{\sim}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$.

Le résultat reste vrai sous une ***hypothèse plus faible***, $A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_k\underset{n\to+\infty}{\sim}\sum\limits_{k=0}^{n}b_k=B_n$. Démo après.

Ici $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ avec $a_n=0$ si n n'est pas une puissance de 2 et sinon vaut 1. On a $A_N=\sum_{k=0}^{N}a_k=n$ pour $2^n\le N\le 2^{n+1}-1$. En passant au ln, qui conserve l'inégalité par croissance, il suit $n\ln 2\le\ln N\le\ln(2^{n+1}-1)\sim\ln(2^{n+1})\sim n\ln 2$, puis $\ln N \sim n\ln 2$, puis finalement $A_N \sim_{N\to+\infty} \frac{\ln N}{\ln 2}$. Il faut maintenant un B_N équivalent à ce $\ln N$ (et que la somme soit calculable pour appliquer le résultat…) Vous avez trouvé ? On se rappelle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$. Si vous avez bien suivi, on prend donc ici $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{\ln 2}x^n$; on reconnaît une série usuelle $g(x) = \frac{1}{\ln 2}(-\ln(1-x))$. Soit $\boxed{f(x) \underset{x\to 1_-}{\sim} -\dfrac{1}{\ln 2}\ln(1-x)}$

On reprend les notations de plus haut. On effectue une petite analyse pour correctement gérer les ε. je ne la produis pas sur la copie. Elle n'est d'ailleurs pas utile pour la démonstration (mais nécessaire pour trouver comment faire…)

Soit $\varepsilon > 0$

- $a_n \sim b_n$ donc il existe un rang N_0 tq pour $n \geq N_0$, $\left|a_n - b_n\right| \leq \varepsilon\left|b_n\right| = \varepsilon b_n$, par positivité des b_n.
- Puisque les b_n sont positifs et que la série $\sum b_n$ diverge, on a, par un raisonnement de limite monotone comme l'exemple plus haut, $\lim_{x\to 1} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = +\infty$. On note la fonction $g(x)$. Idem d'ailleurs pour $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$.
- $S(x) = \sum_{k=0}^{N_0}(a_n - b_n)x^n$ étant un polynôme, donc de limite finie en 1, $\lim_{x\to 1} \frac{S(x)}{g(x)} = +\infty$. Il existe donc $\eta_0 > 0$ tq, pour $1 - \eta_0 < x < 1$, $\frac{|S(x)|}{|g(x)|} < \varepsilon$ ou $|S(x)| \leq \varepsilon g(x)$. ***Attention!*** à ne pas tricher avec les valeurs absolues. $g(x) \geq 0$, tout au moins sur $\left]0,1\right]$.

Prenons $\eta = \eta_0$

Pour $1 - \eta < x < 1$,

$$\begin{aligned}\left|f(x) - g(x)\right| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right| \leq \left|\sum_{k=0}^{N_0}(a_n - b_n)x^n\right| + \left|\sum_{k=N_0+1}^{+\infty}(a_n - b_n)x^n\right| \leq \varepsilon g(x) + \sum_{k=N_0+1}^{+\infty}\left|a_n - b_n\right|\, x^n \\ &\leq \varepsilon g(x) + \varepsilon \sum_{k=N_0+1}^{+\infty} b_n\, x^n \leq \varepsilon g(x) + \varepsilon \sum_{k=0}^{+\infty} b_n\, x^n = 2\varepsilon g(x) = 2\varepsilon\left|g(x)\right|\end{aligned}$$

La dernière inégalité provient (encore) de la positivité des b_n et des x^n dans un voisinage de 1. On a donc démontré $f - g = o_1(g)$, ce qui est le résultat attendu.

Si on prend l'hypothèse plus faible, $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \sim \sum_{k=0}^{n} b_k = B_n$. On considère les fonctions / séries entières auxiliaires $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n$ et $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n x^n$. Comme $A_n, B_n \geq 0$, leur rayon est encore 1 (je vous laisse y réfléchir, c'est un exo de la feuille), la série $\sum A_n$ diverge (car $A_n \geq a_n \geq 0$), la démonstration s'applique : $F(x) \sim_{x\to 1} G(x)$. Ensuite, il faut remarquer que $F(x)$ (et $G(x)$ est un produit de Cauchy, celui de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ par $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. On en déduit $\dfrac{f(x)}{1-x} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{g(x)}{1-x}$ et donc l'équivalence demandée.

Centrale PSI 2022 (équivalent série entière) ✷

Ex 20

1) Donnez un exemple de série entière de rayon égal à 1 dont la somme est définie et majorée sur $\left[0,1\right]$.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et f la fonction somme associée.

2) On suppose $na_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

(a) Montrez f définie sur $\left]-1,1\right[$.

(b) Montrez $f(x) = o(\ln(1-x))$ quand $x \longrightarrow 1_-$.

3) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n^2+1}x^n$. Déterminez un équivalent au voisinage de 1 à l'aide de Q2.

1) On considère $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$ de rayon $R = 1$ majorée sur $\left[0,1\right]$ (par continuité de ln sur un segment). Par contre, stricto-senso dans le cours, on est seulement censé savoir qu'elle est définie sur $\left]-R,R\right[$, donc en ce qui nous concerne ici $\left[0,1\right[$. Ceci dit, elle est définie en 1, immédiatement par le CSSA.

Remarques

- Une autre série usuelle qui conviendrait est $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} 1(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.
- Pour la série du ln, comme vu, il est immédiat que la série converge en $x = 1$, mais la question qui se pose est : vaut-elle aussi $\ln(1+x)$ (soit $\ln 2$)?. La réponse est oui. On le prouve par passage à la limite / continuité en utilisant le théorème sur les séries de fonctions. A savoir faire.
- Un autre exemple intéressant, mais qui ne convient pas, est $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ qui est bien ***majorée*** sur $[0,1[$, et donc sur $[0,1]$ par continuité, mais, curieusement, la série entière n'est ***pas définie*** en $x = 1$

2) L'hypothèse s'écrit aussi $a_n = o\big(\frac{1}{n}\big)$, à ne pas perdre de vue. Le cours nous dit que si $|a_n| \leq |b_n|$ (et donc si $a_n = O(b_n)$ ou $a_n = o(b_n)$, alors les rayons vérifient $R\big(\sum a_n x^n\big) \geq R\big(\sum b_n x^n\big)$. Ici, comme $\sum \frac{1}{n} x^n$ a pour rayon 1 $\big($1° : c'est du cours : toutes les séries entières $\sum n^a x^n$ ont $R = 1$ ***ou*** 2° : on reconnaît le dse de $-\ln(1-x)\big)$, on en déduit $R \geq 1$, ce qui amène que la série entière est définie sur (au moins) $]-1,1[$.

Il faut d'abord remarquer que l'énoncé, demande de démontrer que, si $a_n = o\big(\frac{1}{n}\big)$ et $R = 1$, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = o_1\big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\big) = o_1\big(\ln(1-x)\big)$. On va procéder avec les ε ; je rappelle que $f(x) = o_a\big(g(x)\big)$ se démontre par $|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$ pour x assez proche de a.. Une petite analyse est nécessaire, je ne la transcris pas ici. J'ajoute juste que $a_n = o(b_n)$ s'écrit $|a_n| \leq \varepsilon |b_n|$ ***mais à partir d'un certain rang***. Ceci obligera à couper la série en deux. et pour l'autre morceau de somme fini, le ε viendra de $\frac{1}{\ln(1-x)} \underset{\sim}{\overset{x=1}{=}} 0$!

Soit $\varepsilon > 0$

- $a_n = o(\dfrac{1}{n})$ donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tq, pour $n \geq N$, $|a_n| \leq \varepsilon \dfrac{1}{n}$
- $\lim\limits_{x \to 1_-} \dfrac{\sum_{n=0}^{N} a_n x^n}{\ln(1-x)} = 0$ donc il existe $\eta_0 > 0$ tq, pour $1 - \eta_0 < x < 1$, $\Big|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\Big| \leq \varepsilon \big|\ln(1-x)\big|$

Prenons $\eta = \eta_0$. Alors pour $1 - \eta < x < 1$:

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big| \leq \Big|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\Big| + \Big|\sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n\Big| \overset{(1)}{\underset{\sim}{\leq}} \Big|\sum_{n=0}^{N} a_n x^n\Big| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| x^n$$
$$\leq \varepsilon \big|\ln(1-x)\big| + \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \overset{(2)}{\underset{\sim}{\leq}} \varepsilon \big|\ln(1-x)\big| + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = 2\varepsilon \big|\ln(1-x)\big|$$

- **(1)** Inégalité triangulaire « *infinie* » car la série converge absolument pour $x < 1$. On utilise aussi $x \geq 0$
- **(2)** On rajoute des termes positifs à la somme de la série.

Remarque : Le lecteur vérifiera que l'on peut généraliser $a_n = o(b_n)$ et $R = 1 \implies \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = o_1\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\Big)$ en reprenant la démonstration et en ***ajoutant les hypothèses*** $b_n \geq 0$ (sert 2 fois dans la démo) et la série entière $\sum b_n x^n$ de rayon 1 diverge en $x = 1$ (où cela sert-il?)

3) Le déduire vient de $f(x) \sim_a g(x)$ ssi $f(x) - g(x) = o_a(g(x))$. Ici $a_n = \sqrt{n^2+1} \sim n$, soit $a_n - n = o(n)$. En fait, ici $a_n = O\big(\frac{1}{n}\big)$. On utilise la remarque avec $b_n = n$. On a bien $b_n \geq 0$ et la série $\sum n x^n$ de rayon 1 diverge en $x = 1$. Par suite :

$$f(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = o_1\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n\Big) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} (x^n)' = x\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\Big)' = x\Big(\frac{1}{1-x}\Big)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

On a utilisé la dérivabilité terme à terme sur $]-1,1[$ d'une série de rayon 1. $\boxed{f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{x}{(1-x)^2}}$

Ex 23 Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.

1) Calculez le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$.

2) Montrez l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la calculer.

3) Quand elle existe, on note f la somme de la série $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$; montrez que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt$ existe et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

1) Comme $\sum a_n$ converge, la suite $a_n \to 0$ et est bornée par M, par suite l'inégalité $\left|\frac{a_n}{n!}x^n\right| \leq M\frac{|x|^n}{n}$ jointe au critère de majoration d'une série positive par la série exponentielle convergente (en $|x|$) amène l'absolue convergence donc la convergence de $\sum \frac{a_n}{n!}x^n$ ***pour tout*** x, soit $R = +\infty$.

2) Les élèves « *ambitieux* » auront, j'espère, reconnu la fonction $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$. L'existence résulte de l'absolue convergence car :

- $f_n : t \longrightarrow t^n e^{-t}$ ***continue*** sur $[0, +\infty[$.
- f_n ***intégrable*** en $+\infty$ par le critère $t^a f(t)$: $\lim_{+\infty} t^2 f_n(t) = 0$

Une ipp avec $u = t^n$ $v' = e^{-t}$ $u' = nt^{n-1}$ $vv = -e^{-t}$ amène $I_n = \left[-t^n e^{-t}\right]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{-t}\,dt = 0 + nI_{n-1} = \boxed{nI_{n-1}}$

L'ipp en $+\infty$ est licite car le 2e membre existe, on a reconnu I_{n-1}. Une récurrence immédiate amène alors $I_n = n!I_0 = n!$

3) Q1 a établis que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$ est définie sur $\mathbb{R}$. Je rappelle que le 1er théorème d'intégration, terme à terme (vous devriez sentir qu'on va l 'appliquer) donne, en particulier, l'intégrabilité de la fonction-somme d'une série. On l'utilise ici et vérifie donc ses hypothèses. Comme $f(t)e^{-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n!}t^n e^{-t}}_{g_n(t)}$:

- Les g_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0, +\infty[$ Q2.
- La série de fonctions $\sum_n g_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ (c'est le développement en série entière de $f(t)e^{-t}$!) et sa somme est ***continue par morceaux*** sur $[0, +\infty[$.
- La série numérique $\sum_n \int_{[0,+\infty[} |g_n|$ converge : $\int_0^{+\infty} \frac{|a_n|}{n!}|t|^n e^{-t}\,dt = \frac{|a_n|}{n!}n! = |a_n|$, la convergence de $\sum |a_n|$ est l'hypothèse de début de l'énoncé.

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}t^n e^{-t}\,dt \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a_n}{n!}t^n e^{-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}n! = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

- **(1)** C'est le théorème d'intégration terme à terme justifié plus haut.

Ex 24 Soit (a_n) une suite complexe telle que la série entière de la var. complexe $\sum a_n z^n$ ait un rc. $R > 0$.

1) Montrez que le rayon de convergence de $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ est $+\infty$

2) ✷ Montrez Intégrale définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} F(zt)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Prenons $r < R$. On écrit, astuce utile déjà vue en cours :

$$\left|\frac{a_n}{n!}z^n\right| = \left|a_n r^n\right| \left|\frac{\left(\frac{z}{r}\right)^n}{n!}\right| \leq M\frac{\left|\frac{z}{r}\right|^n}{n!}$$

La série $\sum a_n r^n$ est convergente puisque $r < R$, par conséquent la suite $a_n r^n$ converge vers 0 et est donc bornée (par M). Ensuite, la série de terme général $\dfrac{|z/r|^n}{n!}$ converge absolument puisque c'est le terme de la série exponentielle de rayon $+\infty$. Des critères de majoration des séries numériques, il résulte que ***pour tout*** z complexe, la série $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ converge absolument donc converge, d'ou $R = +\infty$.

2) La fonction $g : t \to e^{-t}F(zt)$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après les théorèmes généraux sur les séries entières, puisque son rayon est infini, et ceci quelle que soit la valeur de z complexe fixé. On a $g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{a_n}{n!} e^{-t} t^n z^n}_{f_n(t)}$

- $\sum f_n$ est une série de fonctions continues et intégrables sur $\left[0, +\infty\right[$, car clairement $f_n(t) = o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$.
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left[0, +\infty\right[$ vers sa somme $g(t)$ qui est bien continue sur $\left[0, +\infty\right[$, comme remarqué plus haut.
- La série numérique $\sum \int_{\mathbb{R}^+} |f_n|$ est convergente car, par hypothèse $|z| < R$:

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{a_n}{n!} e^{-t} t^n z^n\right| dt = \frac{|a_n||z|^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n \, dt = \frac{|a_n||z|^n}{n!} \Gamma(n+1) = |a_n||z|^n$$

Il se déduit du ***théorème d'intégration terme à terme*** que g est ***intégrable*** sur $\left[0, +\infty\right[$ et que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}F(zt)\,dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n z^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n z^n}{n!} \Gamma(n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Remarque : Si on ne reconnaît pas la fonction Γ, on peut toujours calculer cette intégrale. Une simple ipp, accessible à tous, que je ne détaille pas ici amènerait $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n \, dt = 0 + n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} \, dt$. et ensuite $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^n \, dt = n! \int_0^{+\infty} e^{-t} \, dt = n!$.

Ex 26 ✷ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ telle que la série numérique $\sum a_n R^n$ converge. Etablir que la fonction-somme $f(x)$ est continue en R. On prendra $R = 1$ et utilisera, après l'avoir démontré,

$$\forall x \in [0, R[\quad f(x) = S - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1}). \qquad (\textit{Transformation d'}\textbf{Abel}^{2})$$

où S, R_n désignent la somme et le reste d'ordre n associés à $\sum a_n$. Montrez que la réciproque est fausse.

La transformation d'**Abel**[2] a déjà été vue lors des séries numériques. On l'appelle aussi ipp discrète. Rappelons qu'elle consiste à partir de $\sum u_n v_n$, utiliser la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ (où R_n comme ici), donc partir de $\sum (S_n - S_{n-1}) v_n$ et arriver à $\sum S_n (v_n - v_{n+1})$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (R_{n-1} - R_n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} R_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n = \sum_{n=-1}^{+\infty} R_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n x^n = -\sum_{n=0}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1}) + S$$

- **(1)** Puisque $R = 1$ et que par hypothèse la série entière converge pour $x = R = 1$, la série $\sum a_n$ converge. On rappelle alors que $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ et que par conséquent, pour $n \geq 1$, $a_n = R_{n-1} - R_n$. Pour $n = 0$, on ***convient*** que $R_{-1} = S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ pour que la formule marche.

2. **Niels Henrik Abel** : norvégien (1802-1829). Travaux sur équations algébriques, fonctions elliptiques et intégrales.

On doit démontrer f continue en 1 ; or $f(1) = S$! On va utiliser les « *epsilon* ». Il faut donc majorer $|f(x) - S|$ pour x assez proche de 1. ***Prenons donc*** $\varepsilon > 0$. On écrit :

$$\left|f(x) - f(1)\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N} R_n(x^n - x^{n+1})\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} R_n(x^n - x^{n+1})\right| \leq \left|\sum_{n=1}^{N} R_n(x^n - x^{n+1})\right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |R_n|\,|x^n - x^{n+1}|$$

Comme $x \longrightarrow 1$, on peut considérer $0 \leq x \leq 1$, par conséquent $x^{n+1} \leq x^n$, puis $|x^n - x^{n+1}| = x^n - x^{n+1}$. D'autre part, $R_n \longrightarrow 0$, il existe donc N_0 tel que pour $n \geq N_0$, $|R_n| < \varepsilon/2$. ***fixons donc*** $N = N_0$. On peut alors écrire, par télescopage, pour $0 \leq x < 1$:

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} |R_n|\,|x^n - x^{n+1}| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2}(x^n - x^{n+1}) = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n - x^{n+1} = \frac{\varepsilon}{2}x^{N+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part, ce N étant fixé, $\sum_{n=1}^{N} R_n(x^n - x^{n+1})$ est une fonction polynomiale, donc continue en 1, sa valeur en 1 est 0, ***puisque*** $n, n+1 \geq 1$ (***Attention!*** $x^n = 1$ si n vaut 0), par conséquent, pour x assez proche de 1 (pour être précis, $\exists \eta > 0$ tel que sur $]1-\eta, 1[$), on ait cette quantité inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Finalement on a bien démontré, pour $1-\eta < x < 1$, $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$.

Ex 27

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}}$$

Par le critère d'Alembert (laissé au lecteur), on a immédiatement que le rayon de la série $\sum \frac{x^n}{(n+2)!}$ est $R = +\infty$ puis :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \boxed{\frac{e^x - 1 - x}{x^2}}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)}}$$

Par le critère d'Alembert (laissé au lecteur), on a immédiatement que le rayon de la série $\sum \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)}$ est $R = 1$. Après une décomposition en éléments simples :

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n}$$

$$= \boxed{-x\ln(1-x^2) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x^2) - x^2\right)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+5}{n+3}\frac{x^n}{n!}}$$

Par le critère d'Alembert (laissé au lecteur), on a immédiatement que le rayon de la série $\sum \frac{n+5}{n+3}\frac{x^n}{n!}$ est $R=+\infty$ puis :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+5}{n+3}\frac{x^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{n+3}\frac{x^n}{n!} = e^x+2\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)\frac{x^n}{(n+3)!}\\
&\overset{(1)}{=} e^x+2\sum_{n=0}^{+\infty}\big((n+3)(n+2)-2(n+3)+2\big)\frac{x^n}{(n+3)!} = e^x+2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}-4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}+4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+3)!}\\
&= e^x+\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{4}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{4}{x^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+3)!} = e^x+\frac{2}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-\frac{4}{x^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\frac{4}{x^3}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\\
&= \boxed{e^x+\frac{2}{x}(e^x-1)-\frac{4}{x^2}(e^x-1-x)+\frac{4}{x^3}\left(e^x-1-x-\frac{1}{2}x^2\right)}
\end{aligned}$$

- **(1)** On a décomposé le polynôme $(n+2)(n+1)=n^2+3n+2$ dans la base $\big(1,n+3,(n+3)(n+2)\big)$. A cette fin, on a posé $n^2+3n+2=\alpha(n+3)(n+2)+\beta(n+3)+\gamma$ et on a trouvé par résolution d'un petit système (je ne mets pas les détails ici) $\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=2$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n}$$

Pour la série entière $\sum\cos(n\theta)x^n$, on ne peut appliquer la règle de d'Alembert. On remarque que $|\cos(n\theta)x^n|\leq|x|^n$, série géométrique convergente pour $|x|<1$. Par conséquent $R\geq1$. Ensuite, pour $x=1$, la série $\sum_n\cos(n\theta)$ diverge grossièrement, car on a jamais $\cos(n\theta)\longrightarrow0$ (je ne le reprouve pas ici, il y a une démo plus haut), par conséquent $R\leq1$. Finalement $R=1$. Ensuite, on écrit pour le calcul :

$$\begin{aligned}
\forall x\in\,]-1,1[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Re\big(e^{in\theta}\big)x^n \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\Re\big(e^{in\theta}x^n\big) \overset{(2)}{=} \Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{i\theta}x)^n\right)\\
&\overset{(3)}{=} \Re\left(\frac{1}{1-e^{i\theta}x}\right)=\Re\left(\frac{1-\cos(\theta)x+i\sin(\theta)x}{(1-\cos(\theta)x)^2+\sin^2\theta x^2}\right)=\boxed{\frac{1-x\cos\theta}{1+x^2-2x\cos\theta}}
\end{aligned}$$

- **(1)** Le x^n peut « *rentrer* » dans la partie réelle car il est ***réel***.
- **(2)** Pour une série complexe ***convergente***, la partie réelle de la somme est égale à la somme de lla partie réelle.
- **(3)** La série ***géométrique complexe*** converge car $|e^{i\theta}x|=|x|<1$

CCP PSI 2013-2011 (série entière à terme à récurrence linéaire)

Ex 28 Soit (u_n) définie par $u_0=0, u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.

1) Exprimez u_n en fonction de n.

2) Déterminez le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général u_nz^n.

1) L'équation caractéristique associée à la récurrence linéaire est X^2-X-1 dont les deux racines sont $\frac{1\pm\sqrt5}{2}$. L'ensemble des suites réelles vérifiant cette récurrence linéaire d'ordre 2 est alors un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, dont une base est $\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n,\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)$.

On détermine $u_n=\alpha\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n$ par les deux termes initiaux :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 &=& \alpha+\beta\\ 1 &=& \alpha\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)+\beta\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}\alpha &=& \frac{-1}{\sqrt5}\\ \beta &=& \frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$$

2) Je rappelle que la série géométrique $\sum z^n$ converge ssi $|z| < 1$ et a pour rayon de convergence $R = 1$. On en déduit immédiatement que la série géométrique $\sum \left(\frac{z}{a}\right)^n$ a pour rayon de convergence $R = |a|$ (attention au module : elle converge ssi $\left|\frac{z}{a}\right| < 1 \iff |z| < |a|$). Revenons à l'exo, la série entière s'écrit

$$\frac{-1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n$$

La première série géométrique a pour rayon de convergence $R_1 = \frac{2}{1-\sqrt{5}}$ et la deuxième $R_2 = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$. Comme $R_1 \neq R_2$, le théorème de somme de séries entières nous dit $\boxed{R = \inf(R_1, R_2) = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}}$.

On calcule la somme en utilisant la récurrence sur la suite : pour tout $x \in \left]-R, R\right[$,

$$\begin{aligned}
S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = u_0 + u_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(u_{n-1} + u_{n-2}\right) x^n = u_0 + u_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2} x^n \\
&= u_0 + u_1 x + x \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2} x^{n-2} = u_0 + u_1 x + x\left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_{n-1} x^{n-1} - u_0\right) + x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2} x^{n-2} \\
&= u_0 + u_1 x + x\left(S(x) - u_0\right) + x^2 S(x)
\end{aligned}$$

Il vient alors $\left(1 - x - x^2\right) S(x) = u_0 + u_1 x - u_0 x$, puis $S(x) = \dfrac{u_0 + u_1 x - u_0 x}{1 - x - x^2} = \boxed{\dfrac{x}{1-x-x^2}}$.

Remarques

- Comme $1 - x - x^2 = x^2 \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x} - 1\right)$, et que de $|x| < R = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}}$, il vient $\dfrac{1}{|x|} > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, le rapport est bien défini.
- On note que pour calculer la somme, on ne s'est pas (volontairement) servi du calcul de u_n. En fait, il est même une question classique qui est de ***déduire le calcul de*** u_n ***du calcul de*** $S(x)$ en utilisant une décomposition en éléments simples puis un développement en série entière usuel. On remarque en plus ici que $\left(\dfrac{1+\varepsilon\sqrt{5}}{2}\right)^{-1} = \dfrac{-1+\varepsilon\sqrt{5}}{2}$, pour $\varepsilon \in \{-1, 1\}$:

$$\begin{aligned}
S(x) = \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{5}} - \dfrac{1}{2}}{x + \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} + \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{5}} - \dfrac{1}{2}}{x + \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}} \\
&= \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}} \\
&= \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - x^n + \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n \\
&= \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{-1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n
\end{aligned}$$

Vous voyez? On a trouvé l'expression de u_n, sans résoudre la récurrence, en développant ensérie entière $S(x)$.

Ex 29 On se donne une série entière $\sum a_n x^n$ telle que $a_{3p} = 0$ $a_{3p+1} = 2^{2p+1}$ $a_{3p+2} = 3^p$ $(p \in \mathbb{N})$ Donnez le rayon de convergence et calculez la somme de la série.

La série entière s'écrit comme somme de 2 séries entière :

$$\sum_{p\geq 0} 0x^{3p} + \sum_{p\geq 0} 2^{2p+1}x^{3p+1} + \sum_{g\geq 0} 3^p x^{3p+2} = 2x\sum_{p\geq 0}\left(2^2x^3\right)^p + x^2\sum_{p\geq 0}\left(3x^3\right)^p$$

Chaque série entière étant une série géométrique, il est inutile d'appliquer la règle de d'Alembert. La première converge ***ssi*** $|4x^3| < 1 \iff |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, soit $R_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$ et pour la deuxième, $R_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$. Par théorème de sommation de séries entières, comme $R_1 \neq R_2$, le rayon de la série entière est $R = \inf(R_1, R_2) = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Pour calculer la somme, on utilise aussi, la somme d'une série géométrique :

$$S(x) = 2x\sum_{p=0}^{+\infty}\left(2^2x^3\right)^p + x^2\sum_{p=0}^{+\infty}\left(3x^3\right)^p = \boxed{\frac{2x}{1-4x^3} + \frac{x^2}{1-3x^3}}$$

Ensea PSI 2023 | CCP PSI 2016 (calcul de somme)

Ex 31 Rayon de convergence et somme de la série entière de terme général $(n^2+n+1)x^n$.

On applique le critère d'Alembert pour les séries, en posant $u_n = (n^2+n+1)x^n$:

$$\left|\frac{u_{n+1}}{un}\right| = |x|\frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{n^2+n+1} \sim |x|\frac{n^2}{n^2} \xrightarrow{n\to+\infty} |x|$$

- Si $|x| < 1$, la série $\sum u_n$ converge, donc $R \geq 1$.
- Si $|x| > 1$, la série $\sum u_n$ diverge, donc $R \leq 1$.

Finalement $R = 1$.

Pour la somme, vous avez souvent l'idée de couper en 3 (avez-vous une raison vraiment réfléchie ?), ce qui n'est pas une très bonne idée, le $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n$ étant « *embêtant* ». Néanmoins, le calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ se fait rapidement (voir en bas) : Pour n^2, la seule façon d'y arriver et de ramener à la dérivée seconde en écrivant $n^2 = n(n-1)+n$ et en re-coupant en 2, donc encore 2 calculs de somme et on risque de ne pas finir dans le temps imparti. Le $n(n-1)$ provient de $(x^n)'' = n(n-1)x^{n-2}$. En fait il est plus rapide d'écrire le polynôme initial (le n^2+n+1 mais l'énoncé pourrait prendre n'importe lequel autre) dans la ***base*** $\big(n(n-1), n, 1\big)$ (base car 3 degrés distincts en dimension 3 de $\mathbb{R}_2[X]$)

$$n^2+n+1 = \alpha n(n-1)+\beta n+\gamma 1 \iff \begin{cases} 1 &= \alpha \\ 1 &= -\alpha+\beta \\ 1 &= \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha &= 1 \\ \beta &= 2 \\ \gamma &= 1 \end{cases}$$

On a identifié chaque terme de degré différent. On termine proprement pour $x \in \,]-1,1[$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+n+1)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\big(n(n-1)+2n+1\big)x^n \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= x^2\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + 2x\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x^2\sum_{n=0}^{+\infty}(x^n)'' + 2x\sum_{n=0}^{+\infty}(x^n)' + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &\overset{(2)}{=} x^2\left(\frac{1}{1-x}\right)'' + 2x\left(\frac{1}{1-x}\right)' + \left(\frac{1}{1-x}\right) \overset{(3)}{=} x^2\frac{2}{(1-x)^3} + 2x\frac{1}{(1-x)^2}\frac{1}{1-x} = \frac{x^2+1}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

- **(1)** C'est plutôt là où il est astucieux de couper en 3
- **(2)** On applique la dérivation terme à terme, possible sur $]-R,R[$. Ici, $R = 1$ et $x \in \,]-1,1[$. Ok.
- **(3)** On peut savoir que la dérivée n-ième de $\frac{1}{a-x}$ est $\frac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

Mines-Ponts PSI 2014 (calcul de somme) ✷

Ex 35 On considère la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (\int_0^{\pi/4} \tan^n t \, \mathrm{d}t) x^n$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

1) On calcule d'abord le rayon. Par la croissance de tangente sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, de $\left|\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\, dt\right| \le \int_0^{\pi/4} 1^n \, dt$, on tire $R \ge R\left(\sum \frac{\pi}{4} x^n\right) = 1$. Réciproquement, on considère le cas $x = 1$. On pose $a_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt$. On a immédiatement, par le théorème de Lebesgue, $a_n \longrightarrow 0$ (on ***domine*** par la constante 1), donc « *rien de ce côté-là* » ... Par contre la série $\sum a_n$ diverge. Montrons-le. Une première idée, après avoir remarqué que tan est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, parce que $(\tan x)'' = (1+\tan^2 x)' = 2\tan x(1+\tan^2 x) \ge 0$, de minorer par la tangente en 0, qui est $y = x$ (le terme $ax+b$ du dl en 0, cours de Sup) :

$$\int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt \ge \int_0^{\pi/4} t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{(\pi/4)^{n+1}}{n+1}$$

Malheureusement, cette dernière série converge, ce n'est pas tout-à-fait une série géométrique, on utilise la règle de d'Alembert (je ne mets pas les détails ici). on a quand même $R \le \frac{4}{\pi}$

Une autre idée, plus délicate à trouver tout seul, en ayant bien noté que $1+\tan^2 t = (\tan t)'$ est :

$$a_{n+2} + a_n = \int_0^{\pi/4} (\tan^{n+2} t + \tan^n t)\, dt = \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, d\big(\tan t\big) = \left[\frac{\tan^{n+1} t}{n+1}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$$

On remarque aussi la décroissance de a_n car la suite-intégrande $\tan^n t$ décroit ***pour tout*** t, car $0 \le \tan t \le 1$, puis :

$$a_n = \frac{1}{2}\, 2a_n \ge \frac{1}{2}(a_n + a_{n+2}) = \frac{1}{2(n+1)}$$

On en déduit donc, d'après le cours $\left]-1,1\right[\subset \operatorname{Def} f \subset \left[-1,1\right]$. Le cas $x = 1$ étant déjà traité reste le cas $x = -1$, soit la série $\sum (-1)^n a_n$ avec $a_n \ge 0$. Elle est alternée. On commence par « *essayer le CSSA* », notamment la décroissance ($a_n \longrightarrow 0$ a déjà été vu). On a immédiatement la décroissance par croissance de l'intégrale et $\tan^{n+1} t \le \tan^n t$, ***pour tout*** $t \in \left[0 \frac{\pi}{4}\right]$ ***car*** $|\tan t| \le 1$ par le « *choix* » de la borne $\frac{\pi}{4}$) Conclusion : $\operatorname{Def} f = \left]-1,1\right]$

2) ***Méthode 1 :***

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\,,\ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} \tan^n t \, dt \ x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/4} \underbrace{x^n \tan^n t}_{f_n(t)} \, dt \overset{(1)}{=} \int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \tan^n t \, dt \overset{(2)}{=} \boxed{\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1 - x\tan t}\, dt}$$

- **(1)** Théorème d'intégration terme à terme :
  - Les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: ***continuité*** sur un ***segment*** .
  - La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: série géométrique convergente ***car*** $|x \tan t| \le |x| < 1$ ***car*** on a pris $x \in \left]-1,1\right[$ et sa somme est ***continue par morceaux*** sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
  - La série numérique $\sum_n \int_{\left[0, \frac{\pi}{4}\right]} |f_n|$ converge : $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n t |x|^n \, dt \le \frac{\pi}{4}|x|^n$, série géométrique convergente
- **(2)** La somme de la série géométrique est valide ***car*** $|x \tan t| \le |x| < 1$ ***car*** on a pris $x \in \left]-1,1\right[$

Remarques

- L'intégrale peut être calculée par le changement de variables $u = \tan t$. Mais on peut aussi voir sa valeur par la 2e méthode.
- Si vous avez été attentifs, on n'a pas calculé la somme pour $x = -1$. En effet, trois fois dans la démo, on se sert de $|x| < 1$. Il y a plusieurs possibilités, voir plus bas.

Méthode 2 (par la récurrence) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_{n+2}+a_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^n + f(x) = \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} + f(x) = \frac{1}{x^2}(f(x)-a_0-a_1x)+f(x) \overset{(1)}{=} \frac{1+x^2}{x^2}f(x) - \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\ln 2}{x^2}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^n = \frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{x}\big(-\ln(1-x)\big)$$

- **(1)** On calcule $a_0 = \int_0^{\pi/4} 1\,dt = \dfrac{\pi}{4}$ $\qquad a_1 = \int_0^{\pi/4}\dfrac{\sin t}{\cos t}\,dt = \Big[-\ln|\cos t|\Big]_0^{\pi/4} = -\ln\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}\ln 2$

Par cette double égalité, on en tire

$$\frac{1+x^2}{x^2}f(x) - \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\ln 2}{x^2} = \frac{1}{x}\big(-\ln(1-x)\big) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{f(x) = \frac{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\ln 2 - x\ln(1-x)}{1+x^2}}$$

La encore, on a calculé seulement pour $|x|<1$ (DSE de $-\ln(1-x)$)

Pour calculer la somme en $x=-1$, cad $f(-1)$, plusieurs méthodes :

- Si on se rappelle le résultat que j'ai donné en cours, mais qui n'est pas au programme, si la série entière converge en R (ou $-R$) elle y est nécessairement continue. Par suite, on obtient la valeur en passant à la limite dans les formules lorsque $x \longrightarrow -1$.
- Pour une raison similaire d'ailleurs, le DSE $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$ est valable aussi en -1. La méthode 2 le donne donc en acceptant cette égalité dans la démonstration.
- On reprend la démo de la méthode 1. On ***ne peut*** appliquer le 1$^{\text{er}}$ théorème d'intégration terme à terme (ni le 2$^{\text{e}}$ d'ailleurs), alors on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite de fonctions $S_n(x)$. Retenez-le, cela peut servir dans d'autres exos :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,dt\;x^n = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,dt\;x^n \overset{(1)}{=} \lim_{N\to+\infty}\int_0^{\pi/4}\underbrace{\sum_{n=0}^{N}\tan^n t\;x^n}_{S_N(t)}\,dt$$
$$\overset{(2)}{=} \int_0^{\pi/4}\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\tan^n t\;x^n\,dt = \int_0^{\pi/4}\sum_{n=0}^{+\infty}\tan^n t\;x^n\,dt = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{1-x\tan t}\,dt$$

  - **(1)** On peut intervertir $\sum$ et $\int$, c'est une somme finie.
  - **(2)** On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite de fonctions (S_n) sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$:
    - ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (S_n) ***sur*** $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ ***:***
      Pour tout $-1\le x<1$, $S_n(t) \xrightarrow{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty}\tan^k t\;x^k = \dfrac{1}{1-x\tan t}$ ***car ici*** $|\tan t x| \le |\tan t| < 1$
      (vous voyez la différence au niveau des variables avec plus haut et l'idée ***d'ouvrir*** en $\frac{\pi}{4}$
    - ***Hypothèse de Domination sur*** $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ ***:***

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|S_n(t)\right| = \left|\frac{1-(x\tan t)^{n+1}}{1-x\tan t}\right| \le \frac{2}{1-x\tan t} = \xi(t)$$

La majoration utilise : $|x|\tan t\le 1$. ξ est ***intégrable*** sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$: Elle est continue sur le ***segment*** $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ car le dénominateur ne s'y annule pas ! (même en $x=-1$)

Ex 36 Soit $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = -A$. Convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)x^n$?

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes de A, on sait $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Cette formule « *s'étend* » : $\operatorname{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$. Cette formule n'est pas stricto-sensu du cours mais les élèves « *ambitieux* » devraient la retenir. On la démontre par trigonalisation. En effet, dans $\mathbb{C}$, on peut écrire $M = PTP^{-1}$ avec T triangulaire et les valeurs propres sur la diagonale. Par suite $A^k = PT^kP^{-1}$ et le cours nous apprend alors que sur la diagonale de T^k, il y a les coefficients diagonaux à la puissance k, soit les λ_i^k d'où le résultat.

Revenons à notre exo. Par hypothèse le polynôme $X^3 + X = X(X+i)(X-i)$ est annulateur de A. Ce polynôme étant scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, il vient A diagonalisable sur $\mathbb{C}$(résultat pas vraiment nécessaire ici) puis $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} A \subset \left\{0, i, -i\right\}$. On rappelle que la matrice A étant réelle, les valeurs propres complexes conjuquées i et $-i$ sont valeurs propres avec la même multiplicité que l'on note p ($p = 0$ si i n'est pas valeur propre, mais alors 0 est la seule valeur propre, et comme A diagonalisable , $A = 0$). Par soustraction, la multiplicité de 0 est donc de $m - p - p = m - 2p$.
Il vient alors $\operatorname{tr}(A^n) = (m-2p) \times 0^n + p \times i^n + p \times (-i)^n = p(1+(-1)^n)i^n$ et la série entière est :

$$p \sum_{n=0}^{+\infty} (1+(-1)^n)i^n z^n = 2p \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} i^n z^n = 2p \sum_{m=0}^{+\infty} i^{2m} z^{2m} = 2p \sum_{m=0}^{+\infty} (-z^2)^m$$

On reconnaît une série géométrique donc le rayon est encore 1 : (cvge ssi $|-z^2| < 1 \iff |z| < 1$) et le calcul est immédiat :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)z^n = \frac{2p}{1+z^2} = \frac{\operatorname{rg} A}{1+z^2}$$

Là par contre, on s'est servi de diagonalisable : $E(0) \oplus E(i) \oplus E(-i) = \mathbb{C}^n$ amène, par passagfe aux dimensions, $n - \dim E(0) = \operatorname{rg}(A) = \dim E(i) + \dim E(-i) = 2p$.

Remarques

- En raisonnant sur $\mathbb{C}$, on peut démontrer plus généralement que $\sum \operatorname{tr}(A^n)z^n$ a un rayon de convergence égal à $\dfrac{1}{\rho(A)}$ où $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp} A} |\lambda|$ est appelé rayon spectral de A et la somme vaut $\sum_{i=1}^m \dfrac{1}{1-\lambda_i z}$
- En se rappelant la propriété fort utile que $\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{X-a_i} = \dfrac{P'(X)}{P(X)}$ après avoir posé $P(X) = \prod_i (X-a_i)$, il vient dans le cas général, pour $|z| < \dfrac{1}{\rho(A)}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n)z^n = \dfrac{1}{z} \dfrac{\chi_A'(1/z)}{\chi_A(1/z)}$.

CCP PC 2012-2011-2010 (Série génératrice exponentielle des dérangements)

Ex 37 Soit $(d_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$.

1) Calculer d_2 et d_3. Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $\frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$.

2) Trouver le rayon R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!}x^n$. Si $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n$.

3) Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.

4) En déduire une expression de S. Exprimer d_n en fonction de n.

1) $d_2 = 1 \times (d_1 + d_0) = 1$ et $d_3 = 2(d_2 + d_1) = 2$. Les 2 inégalités se démontrent par récurrence sur $n \geq 2$:

- $\mathscr{P}(2) : \frac{2!}{3} \leq d_2 = 1 \leq 2!$ $\quad \mathscr{P}(3) : \frac{3!}{3} = 2 \leq d_3 = 2 \leq 6 = 3!$
- Supposons les inégalités vraies jusqu'à $n+1$ pour $n \geq 2$ (donc vraie pour 3!)

$$\frac{(n+2)!}{3} \leq \frac{1}{3}(n+1)n!(n+1+1) = (n+1)\Big(\frac{(n+1)!}{3} + \frac{n!}{3}\Big) \leq d_{n+2} \leq (n+1)\big((n+1)! + n!\big) = (n+1)n!(n+1+1) = (n+2)!$$

Attention! à bien initialiser avec les 2 premières valeurs, vue la récurrence ***double***.

2) Comme Q1 a établi $\frac{1}{3} \leq \frac{d_n}{n!} \leq 1$, il suit $1 = R\Big(\sum \frac{1}{3} x^n\Big) \geq R\big(\sum \frac{d_n}{n!} x^n\big) \geq R\Big(\sum 1 x^n\Big) = 1$ donc $R = 1$

3) On utilise la récurrence qu'on « *injecte* » dans la fonction-somme :

$$\begin{aligned}\forall x \in \,]-1,1[\,, S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = d_0 + d_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+2}}{(n+2)!} x^{n+2} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1} + d_n}{(n+2)\, n!} x^{n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{(n+2)\, n!} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{(n+2)\, n!} x^{n+2}\end{aligned}$$

La présence de $\frac{x^{n+2}}{n+2}$ donne l'idée de dériver

$$\begin{aligned}\Longrightarrow S'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{n!} x^n + x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \\ &= x \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{d_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}\Big)' + xS(x) = x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}\Big)' + xS(x) \\ &= x \Big(S(x) - d_0\Big)' + xS(x) = xS'(x) + xS(x)\end{aligned}$$

Toutes les dérivées terme à terme se justifient par le rayon 1 de toutes ces séries entières et le fait que $x \in \,]-1,1[$.

4) L'équation différentielle s'intègre immédiatement sur $]-\infty, 1[$, donc sur $]-1,1[$ en :

$$S(x) = C \exp\Big(\int \frac{x}{1-x}\, dx\Big) = C \exp\Big(\int (-1 + \frac{1}{1-x})\, dx\Big) = C \exp\Big(-x - \ln|1-x|\Big) = C \frac{1}{1-x} e^{-x}$$

La valeur en 0 amène $S(0) = d_0 = 1 = C$. Pour trouver d_n, il faut développer en Série $S(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

On se rappelle qu'un produit des Sommes s'obtient par Produit de Cauchy des séries

$$S(x) = \frac{1}{1-x}\, e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{1}_{a_n}\, x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n}{n!}}_{b_n}\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{1}_{a_{n-k}} \underbrace{\frac{(-1)^k}{k!}}_{b_k} = \frac{d_n}{n!}$$

On en déduit $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Cette formule permet de donner un équivalent $d_n \sim e^{-1} n!$ (je vous laisse y réfléchir)

Ex 39 On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big) x^n$ avec $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

1) Calculez $f(x)$ pour $|x| < 1$.

2) ✷Montrez la convergence et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big)$

1) La fonction $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big) x^n$ est la somme de la série-entière produit de **Cauchy**[3] de $\sum a_n x^n$ par elle-même. Si R_a est le rayon de convergence de cette série entière, on sait que la série-entière produit de Cauchy f a un rayon $R \geq R_a$, donc est définie sur au moins $]-R_a, R_a[$ et $f(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\Big)^2$.

En revenant à cette exercice, la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n$ a un rayon de convergence $R_a = 1$ (je ne le démontre pas ici :

3. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe, en théorie des groupes.

immédiat par d'**Alembert**[1]). Calculons sa somme, en séparant ≥ 0 et ≤ 0 :

$$\forall 0<x<1,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n=\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sqrt{x}^{2n+1}=\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\quad(\text{car }|\sqrt{x}|<1)$$
$$\forall -1<x<0,\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^n(-x)^n=\frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{-x}^{2n+1}}{2n+1}$$

Calculons à part cette dernière somme de série entière (via $X=\sqrt{-x}$ que je vais noter finalement x pour le calcul intermédiaire car c'est plus « *pratique* ») par dérivation. On peut dériver terme à terme sur $]-1,1[$, puisqu'elle est de rayon $R=1$:

$$\forall |x|<1,\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x^{2n+1})'}{2n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-0=\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}=\int_0^x\frac{1/2}{1+t}+\frac{1/2}{1-t}\,dt=\left[\frac12\ln|1+t|-\frac12\ln|1-t|\right]_0^x=\frac12\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

On remplace par $\sqrt{-x}$ et finalement :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arctan^2\sqrt{x}}{x} & \text{si } 0<x<1\\ 1 & \text{si } x=0\\ \left(\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right)\right)^2=\dfrac{1}{-4x}\ln^2\left(\dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}\right) & \text{si } -1<x<0\end{cases}$$

2) Pour prouver la limite nulle, il fallait d'abord « *décomposer* » la fraction :

$$c_n=\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{(-1)^{n-k}}{2n-2k+1}=(-1)^n\sum_{k=0}^n\frac{\frac{1}{2n+2}}{2k+1}+\frac{\frac{1}{2n+2}}{2n-2k+1}=\frac{(-1)^n}{2n+2}\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2k+1}+\sum_{k=0}^n\frac{1}{2n-2k+1}\right)$$

Il faut ensuite remarquer que ce sont les ***mêmes sommes!*** (mais en ordre inverse, l'idée générale est que $n-k$ est dans l'ordre inverse de k). Finalement $c_n=\dfrac{(-1)^n 2}{2(n+1)}\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{1}{2k+1}$.

Ensuite, cà se complique : il faut se rappeler $H_n=\sum_{k=1}^n\frac1k\sim\ln n$ qui est à connaître pour les élèves « *ambitieux* » mais pas stricto sensu au programme (démo par comparaison série-intégrale). Ensuite on écrit :

$$\sum_{k=1}^n\frac{1}{2k+1}=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac1k-\sum_{k=1}^n\frac{1}{2\,k}=H_{2n+1}-\frac12H_n=\ln(2n+1)+o(\ln(2n+1))-\frac12\big(\ln n+o(\ln n)\big)\sim\ln n$$

Par suite $c_n\sim\dfrac{(-1)^n\ln n}{2n}\longrightarrow 0$

Passons à la décroissance de c_n qui n'a rien d'évident!

$$\begin{aligned}|c_n|-|c_{n+1}|&=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{n+2}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{2k+1}=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\sum_{k=0}^n\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{(n+2)(2n+3)}\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2k+1}-\frac{n+1}{2n+3}\right)\geq\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\sum_{k=0}^n\frac{1}{2n+1}-\frac{n+1}{2n+3}\right)\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{n+1}{2n+1}-\frac{n+1}{2n+3}\right)\geq 0\end{aligned}$$

1. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).

On a démontré $\forall x\in\left[0,1\right[,\ S(x)=\left(\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2$ et on a montré l'existence de $S(1)$. ***Reste à démontrer*** $\lim_1 S(x)=S(1)$, cad la ***continuité*** de S en 1. On sait qu'on a la continuité, par théorème, ***mais*** sur $\left[0,1\right[$. Il faut utiliser le théorème de continuité des séries de fonctions sur $\left[0,1\right]$:

- Les fonctions $x\to c_n x^n$ sont clairement continues sur $\left[0,1\right]$.
- On a ***convergence uniforme*** de la série de fonctions $\sum c_n x^n$ sur $\left[0,1\right]$ par application du CSSA. En effet, comme x^n décroit aussi pour $0\le x\le 1$, $|c_n x^n|$ décroit vers 0 et la série est alternée (car x positif!). Il en résulte le résultat sur le reste :

$$\forall x\in\left[0,1\right],\ \left|R_n(x)\right|\le\left|c_{n+1}x^{n+1}\right|\Longrightarrow\sup_{x\in[0,1]}\left|R_n(x)\right|\le\sup_{x\in[0,1]}\left|c_{n+1}x^{n+1}\right|=\left|c_{n+1}\right|\longrightarrow 0$$

On termine

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k a_{n-k}=S(1)=\lim_{x\longrightarrow 1}S(x)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{\pi^2}{16}$$

Ex 41

$f(x)=\sin^3 x$

Ici, l'idée est de linéariser. Je rappelle comment on linéarise :

$$\sin^3 x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=\frac{-1}{8i}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i}-e^{-3i}}{2i}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i}-e^{-i}}{2i}\right)=-\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{1}{4}\sin(x)$$

Grâce au développement en série entière de sin, on obtient un DSE ***sur tout*** $\left]-\infty,+\infty\right[$:

$$\forall x\in\left]-\infty,+\infty\right[,\ \sin^3 x=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3x)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1-3^{2n+1}}{4\,(2n+1)!}x^{2n+1}}$$

$f(x)=\ln(x^2-8x+15)$

Méthode 1 (par dérivation) : Remarquons d'abord que les racines de $x^2-8x+15$ sont 5 et 3 par conséquent f est définie et dérivable sur $\left]-\infty,3\right[\cup\left]5,+\infty\right[$. Le DSE ne pourra donc être vrai que ***au plus sur*** $\left]-3,3\right[$. Ensuite, après une décomposition en éléments simples :

$$f'(x)=\frac{2x-8}{x^2-8x+15}=\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-5}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}-\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{x}{5}}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3^{n+1}}+\frac{-1}{5^{n+1}}\right)x^n$$

Le développement DSE de ces 2 séries géométriques ont lieu, le premier sur]-3,3[et le deuxième sur]-5,5[, par conséquent, l'égalité globale ne peuit avoir lieu que sur]-3,3[. Sans oublier la constante d'intégration qui est $f(0)=\ln(15)$, on trouve immédiatement le DSE de f et ***sur tout***]-3,3[:

$$\ln(x^2-8x+15)=\ln(15)+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3^{n+1}}+\frac{-1}{5^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}=\boxed{\ln(15)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3^n}+\frac{-1}{5^n}\right)\frac{x^n}{n}}$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle convient quand les racines sont complexes.

Méthode 2 : Cette méthode ne convient qu'aux racines réelles : On ramène à $\ln(a-x)$ ou $\ln(1-x)$. Pas de ln complexe (à votre programme) donc a ne peut pas être complexe :

$$\ln(x^2-8x+15)=\ln\big((3-x)(5-x)\big)=\ln 15+\ln\left(1-\frac{x}{3}\right)+\ln\left(1-\frac{x}{5}\right)=\ln 15-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n3^n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n5^n}=\boxed{\ln(15)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{3^n}+\frac{-1}{5^n}\right)\frac{x^n}{n}}$$

Le premier développement de ln n'est possible que pour $|x|<3$ et le 2e pour $|x|<5$, donc finalement l'inégalité a lieu sur $\left]-3,3\right[$. Comme le rayon de cette série entière est $R=3$, il n'est pas possible de développer sur un intervalle plus grand.

Mines-Ponts 2017-2015-2012 | CCP PSI 2011 (calcul de somme de série numérique) ✷

Ex 42

1) Etablir la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$. On note sa somme S.

2) [**CCP :** Donnez un DSE de $f: x\longrightarrow \frac{1}{1+x^3}$ au voisinage de 0. Calculez de 2 façons $\int_0^1 f$ et en déduire S.]

2) [**Mines :** Calculez S.]

---

1) La convergence de la série $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$ résulte clairement du CSSA.

2) ***Méthode 1 (Indications CCP) :***

Pour $|x^3|<1$, qui équivaut Ã $|x|<1$, on a immédiatement, par le DSE de $\frac{1}{1+u}$, $\dfrac{1}{1+x^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n}$

On demande de calculer de 2 faÃ§ons l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}$.

Une ***première faÃ§on*** est de la calculer par primitivation qui provient d'une décomposition ***en éléments simples sur*** $\mathbb{R}$ (je vous écris quand mÃªme la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ pour info mais je ne la calcule pas). Comme $(1+x^3)=(1+x)(j+x)(j^2+x)=(1+x)(1-x+x^2)$, on écrit :

$$\frac{1}{1+x^3}=\frac{a}{1+x}+\frac{bx+c}{1-x+x^2}=\frac{a'}{1+x}+\frac{\omega}{j+x}+\frac{\overline{\omega}}{j^2+x}\text{ avec }\omega=b'+ic'$$

Pour info aussi, par unicité de la décomposition en élément simples, $a'=a$. On $\times(1+x)$ et on prend la valeur en -1 qui amène $a=\frac{1}{3}$. On $\times x$ et on prend la limite en $+\infty$ qui amène $b=-\frac{1}{3}$ puis pour terminer, la valeur en 0 qui amène $c=\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{dt}{1+t^3}&=\int_0^1\frac{1/3}{1+t}+\frac{-t/3+2/3}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dt=\int_0^1\frac{1/3}{1+t}-\frac{1}{6}\,\frac{2(t-\frac{1}{2})-3}{(t-\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,dt\\&=\left[\frac{1}{3}\ln|1+t|+-\frac{1}{6}\ln\left|(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right|+\frac{1}{2}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\right]_0^1\\&=\frac{1}{3}(\ln 2-0)-\frac{1}{6}(0-0)+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3}\ln 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Je rappelle que $\frac{1}{a^2+t^2}$ se primitive en $\frac{1}{a}\arctan(\frac{t}{a})$

La ***deuxième faÃ§on*** de calculer l'intégrale nous ramène Ã une ***intégration terme Ã terme*** :

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{(-1)^n x^{3n}}_{f_n(x)}\,dx$$

Malheureusement, les 2 théorèmes du cours ne s'appliquent pas! On ne regarde que l'hypothèse principale :

• Pour le premier, il faut la série $\sum \int_I |f_n|$ convergente. Or ici, cette série-intégrale se calcule et vaut $\sum \int_0^1 x^{3n}\,dx = \sum \frac{1}{3n+1}$, série visiblement divergente.

• Pour le second, il faut la convergence uniforme sur [0,1] de $\sum(-1)^n x^{3n}$ (je vous laisse réfléchir au fait asseez facile que la convergence normale y est fausse). On regarde le reste qui ne ***tend pas uniformément*** vers 0 :

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^{3k} = (-1)^n x^{3n+3} \frac{1}{1-(-x^3)} \Longrightarrow \|R_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|x|^{3n+3}}{1+x^3} \geq \text{« } \textit{valeur en 1} \text{ »} = \frac{1}{2}$$

On va alors essayer d'appliquer le théorème de ***convergence dominée de*** **Lebesgue**[4]aux suites de sommes partielles $(S_N(x))$de la série car s'il s'applique :

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n} = \int_0^1 \lim_{N\to+\infty} \underbrace{\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3n}}_{S_N(x)} \overset{(1)}{=} \lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3n} \overset{(2)}{=} \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\int_0^1(-1)^n x^{3n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

- **(1)** L'application du théorème de Lebesgue Ã la suite (S_N) sur [0,1] résulte de :
  - S_N est bien continue par morceaux sur [0,1].
  - ***Domination*** sur [0,1] : $\forall x \in [0,1], \left|S_N(x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{3n}\right| = \left|\frac{1-(-x^3)^{n+1}}{1+x^3}\right| \leq \frac{1+1}{1+x^3}$ Cette dernière fonction étant clairement continue sur le ***segment*** [0,1] donc y est ***intégrable***.
- **(2)** L'interversion de la somme et de l'intégrale est licite car résulte de la ***finitude*** de la somme.

On en déduit donc $\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = S$

Méthode 2 :

L'idée est d'introduire une série entière auxiliaire $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$. C'est plus subtil que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{3n+1}$ car elle se prÃªte mieux Ã la dérivation. Vous voyez? Il est immédiat que son rayon de convergence est $R = \sqrt[3]{1} = 1$ (je ne le traite pas ici)

$$\forall x \in\,]-1,1[\,,\ S'(x) \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\left((-1)^n\left(\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right)'\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^3)^n \overset{(2)}{=} \frac{1}{1-(-x^3)} = \frac{1}{1+x^3}$$

$$\Longrightarrow S(x) \overset{(3)}{=} S(0) + \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \overset{(4)}{=} \left[\frac{1}{3}\ln|1+t| + -\frac{1}{6}\ln\left|(t-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\right| + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t-1/2}{\sqrt{3}/2}\right)\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{3}\ln|1+x| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

- **(1)** Cette série entière est ***dérivable terme Ã terme*** sur $]-R,R[\ =\ ]-1,1[$.
- **(2)** Cette série ***géométrique converge simplement*** ssi $|-x^3| < 1 \iff |x| < 1$.
- **(3)** On primitive en utilisant l'intégrale, c'est mieux. Ne pas oublier la constante. Ici, c'est $S(0) = 0$.
- **(4)** Je reprends le calcul plus haut.

Malheureusement, cette égalité, consécutivement aux (1) et (2) ne peut Ãªtre considérée comme valide pour $x \in]-1,1[$ et pas pour $x = 1$! Nous allons donc effectuer une limite lorsque $x \longrightarrow 1$, limite qui ***conserve l'égalité*** (si les limites existent!). Le membre de droite étant composé de fonctions usuelles sans problème visible en 1 est ***continue en*** 1. Par suite, il suffit de remplacer par $x = 1$ et on trouve, en se rappelant $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$, la quantité $\frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Pour le membre de gauche, il faut aussi étudier la continuité en 1. Or, c'est une ***série entière*** : on sait seulement, ***Ã priori***, qu'elle est continue sur $]-R,R[\ =\ ]-1,1[$. On est donc amené Ã utiliser le ***théorème de continuité d'une série***

de fonctions sur [0,1] :

- $f_n(x)=(-1)^n\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}$ est clairement continue sur $[0,1]$
- Il n'y a pas de convergence normale sur [0,1] car $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1}\right|=\dfrac{1}{3n+1}$ dont la série diverge trivialement. Nous allons donc montré la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n(x)$ via les théorèmes du CSSA : pour tout $x\geq 0$, la suite $f_n(x)$ est clairement ***alternée*** et par produit de 2 quantités positives décroissant vers 0 : $\frac{1}{3n+1}$ et x^{3n+1} puisque $x\in[0,1]$, il suit que la série $\sum f_n(x)$ vérifie le ***CSSA pour tout*** $x\in[0,1]$. On peut alors majorer :

$$\forall x\in\left[0,1\right],\ \left|R_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{3k+1}}{3k+1}\right|\leq\left|\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\right|\Longrightarrow \|R_n\|_\infty\leq\sup_{[0,1]}\left|\frac{x^{3n+4}}{3n+4}\right|=\frac{1}{3n+4}\longrightarrow 0$$

La convergence uniforme de la ***série de fonctions*** $\sum f_n(x)$ est ainsi établie par la convergence ***uniforme*** de la ***suite*** des restes (R_n) vers 0, et ceci uniformément sur $[0,1]$.

De la continuité de S en 1, il résulte : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}S(x)=S(1)=\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}=\dfrac{1}{3}\ln 2+\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

CCP PSI 2014 (fonction - intégrale)

Ex 43 On considère $f(x)=e^{x^2/2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,dt$.

1) Etudiez la parité de f. Montrez f C^∞ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle à déterminer.

2) Montrez f développable en série entière et déterminez ce développement.

Mines-Ponts PSi 2014-2013 | Centrale PSI 2012 (développement en série entière) ✷

Ex 44 Soit $f\colon x\mapsto(\arcsin x)^2$.

1) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera sur un intervalle que l'on précisera également.

2) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Expliciter les coefficients ainsi que le rayon de convergence.

La fonction $f:x\to\arcsin^2 x$ est continue et définie sur $\left[-1,1\right]$ et dérivable, C^1 et même C^∞ ***seulement sur*** $\left]-1,1\right[$. On calcule, pour $x\in\left]-1,1\right[$:

$$f'(x)=2\arcsin x\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x)=2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+2\arcsin x\,\frac{-(-2x)/2\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}=\frac{2}{1-x^2}+2\arcsin x\,\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{1-x^2}+\frac{x}{1-x^2}f'(x)$$

Par suite f est ***unique solution*** de l'équation différentielle $(1-x^2)y''-xy'=2$ sur $\left]-1,1\right[$ aux ***conditions initiales*** $f(0)=f'(0)=1$, unicité ***car*** le « *coefficient dominant* » $1-x^2$ ne s'y annule pas.Ensuite, une fonction ***développable en série entière*** $y=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ de rayon de convergence R est solution de l'équation différentielle sur $\left]-R,R\right[$ ***ssi*** (en rappelant qu'on peut dériver terme à terme sur $\left]-R,R\right[$) :

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y''-xy'=2 &\iff (1-x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n x^{n-1}=2\\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n x^{n}=2\\
&\underbrace{\iff}_{(1)} \sum_{n=-2}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n} - \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n x^{n}=2\\
&\iff \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - na_n\Big)x^n = 2\\
&\underbrace{\iff}_{(2)} \begin{cases} 2a_2-0a_0=2 \\ (n+2)(n+1)a_{n+2}-n^2a_n=0 \quad \text{pour } n\geq 1\end{cases}
\end{aligned}$$

- **(1)** En $n=-2,-1$, les termes de la première somme sont, par chance, nuls.
- **(2)** On applique le développement en série entière est unique ce qui ***permet d'identifier***. Attention ! au cas de la constante à gérer à part à cause du 2 sur la droite.

La fonction f étant paire, $a_{2n+1}=0$, puis $a_2=1$ et enfin la récurrence ne « *marchant que* » jusqu'à 1, donc 2, ***on en déduit*** a_0 ***quelconque***. On calcule a_{2n} par la récurrence :

$$a_{2n}=\frac{4(n-1)^2}{(2n)(2n-1)}\,a_{2n-2}=\frac{2^4(n-1)^2(n-2)^2}{(2n)(2n-1)(2n-2)(2n-3)}a_{2n-4}$$

comme le dernier terme est $a_4=\dfrac{2^2 1^2}{2\times 1}a_2$, il vient :

$$a_{2n}=\frac{2^{2n-2}\big((n-1)(n-2)\dots 1\big)^2}{(2n)(2n-1)\dots 2\times 1}a_2=\frac{2^{2n-2}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!}$$

Les séries entières paires solutions sont donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-2}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!}\,x^{2n}+a_0$. ***Pour être parfait***, il faudrait vérifier que le rayon $R\neq 0$, sinon la série entière n'existe pas vraiment. Je ne le fais pas ici. La condition ***d'unicité*** et $f(0)=f'(0)=0$ amènent $a_0=0$ puis : $\boxed{\arcsin^2 x=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n-2}\,(n!)^2}{n^2\,(2n)!}\,x^{2n}}$

Ensea PSI 2021 (série entière solution équation différentielle)

Ex 45 Déterminez les solutions de $xy''-(x+1)y'+y=0$ (E) développables en série entière.

Equation différentielle linéaire. Solutions « *immédiates* » sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$.

$\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ de rayon R est solution sur $\left]-R,R\right[$ ssi, sachant qu'on peut y dériver terme à terme :

$$\begin{aligned}
&x\sum_{n=0}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-(x+1)\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\
\iff &\sum_{n=-1}^{+\infty}(n+1)na_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}na_nx^n-\sum_{n=-1}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=0\\
\iff &\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((n+1)(n-1)a_{n+1}-(n-1)a_n\Big)\,x^n=0=\sum_{n=0}^{+\infty}0x^n\\
\iff &\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)(n-1)a_{n+1}-(n-1)a_n=0
\end{aligned}$$

On a utilisé l'***unicité d'un DSE*** pour identifier les coefficients de part et d'autre de l'égal.

Attention ! à ne pas « *enlever* » le $n-1$. Il faut distinguer proprement ce cas $n=1$. On regarde les cas suivants :

- $n=0$ donne $a_1 - a_0 = 0$
- $n=1$ donne rien ...
- $\forall n \geq 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n$. Le dernier est $a_3 = \frac{1}{3} a_2$. Il « *manque donc un 2* » dans la factorielle et $a_{n+1} = \frac{2}{(n+1)!} a_2$

On a donc 2 indéterminée a_0 et a_2. C'est ***important*** car c'est, in fine, ce qui donne la dimension de l'ev trouvé. Les séries entières solutions sur $\left]-R,R\right[$ ou mieux, les fonctions développables en série entière sont :

$$a_0(1+x) + a_2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{n!} x^n = a_0(1+x) + 2a_2\left(e^x - 1 - x\right) = A(x+1) + Be^x$$

Le rayon de convergence est bien $R \neq 0$ car clairement $R = +\infty$.

Remarque : A-t-on trouvé ***toutes*** les solutions ? La structure de $\mathbb{R}$-ev de dimension 2 nous amène que l'on a bien trouvé toutes les solutions ***mais seulement sur*** $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$. Sur $\mathbb{R}$, il y a celles-là, mais il « *pourrait* » y en avoir d'autres, les différents recollements (jusqu'à la double dérivabilité) de ***ces*** solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$ (2 constantes A et B) et ***ces*** solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ (2 autres constantes A' et B'), la dimension maximum étant donc de 4 (puisque au maximum 4 indéterminées possibles et d'ailleurs au minimum 2). Mais ces autres recollements, s'ils existent, ne seront pas développables en série entière. Vous suivez ? En fait, il n'y en a pas d'autres...

Mines-Ponts PSI 2022 (dse intégrale à paramètre) ✷

Ex 46 On considère la fonction $f : x \longrightarrow \int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t(t-2)(t-x)}}\, dt$.

1) Déterminez le domaine de définition de f.

2) Montrez que f est développable en série entière au voisinage de 0.

CCINP PSI 2024-2023 -2022 -2021 (dse fonction-intégrale)

Ex 47

1) Donnez le domaine de définition de $F(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\, dt$

2) Montrez, pour tout $x \in [0,1]$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

3) [**<2024 :** Montrez, pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $F(x)+F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$. On rappelle $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$] [**2021-2022 :** *Indication :* on pourra procéder à une intégration par parties].

1) ***Attention!*** à bien raisonner par rapport à t ***mais sans négliger*** le rôle de x. La fonction $f(t) = \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ n'existe que pour $1-t>0$ et $t \neq 0$, soit $t \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,1\right[$.

Méthode 1 : D'après le cours, l'existence de l'intégrale ***nécessite au moins*** que l'intervalle $\left]0,x\right[$ vérifie $\left]0,x\right[\subset \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,1\right[$. Je vous laisse réfléchir au fait que ceci ***impose*** $x \in \left]-\infty,0\right[\cup \left]0,1\right[= D$.

- f est ***continue*** sur $\left]0,x\right[$, d'après la remarque au dessus
- ***Etude en*** $t=0$ **:**

  $f(t) \sim_0 \frac{-t}{t} = -1$, f se prolonge en une fonction continue en 0, donc intégrable en 0 ; et ce, ***pour tout*** $x \in D$.
- ***Etude en*** $t=x$ **:**

  La fonction f est continue en x si $x \neq 1$, par conséquent on étudie que le cas $x=1$, soit l'étude en $t=1$. Le changement de variables $u = 1-t$ amène $f^*(u) = \frac{\ln u}{1-u} \sim_{u=0} \ln u$ intégrable en 0, c'est du cours ! Donc f ***intégrable*** en 1, ***pour tout*** $x \in D$

f est donc ***intégrable*** sur $\left]0,x\right[$, pour tout $x \in D$, donc l'intégrale F est bien définie soit Def$F = D$

Méthode 2 : On peut s'y prendre un peu mieux : comme $f(t) \sim_0 -1$, f peut se prolonger en une fonction continue sur $J = \left]-\infty, 1\right[$ que l'on notera $\widehat{f}$ pour ne pas « *tricher* » avec les raisonnements. On sait alors, théorème fondamental de l'Analyse de Sup, que $G : x \to \int_0^x \widehat{f}(t)\, dt$ est définie et même continue, dérivable, C^1 sur I, c'est la primitive de $\widehat{f}$ qui s'annule en 0. Or comme $\widehat{f}$ et f sont continues par morceaux et ne diffèrent que d'un point, on sait $F(x) = G(x)$

Remarque : On s'aperçoit que la 2e méthode ne donne pas tout à fait le même domaine : il y a 0 en plus ...En fait dans la première méthode on peut montrer que F se prolonge par continuité en 0. Et d'ailleurs aussi en 1, puisque l'intégrale $\int_0^1 f$ converge. Bref, on pourrait dire $\text{Def}F = \left]-\infty, 1\right]$. Tout ceci est complexe.

2) Par la 2e méthode F est dérivable sur J et $F'(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$. On a immédiatement le DSE sur $\left]-1, 1\right[$:

$$\forall x \in \left]-1,1\right[,\ F'(x) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2}$$

Attention! , Reste la valeur en 1. Une « *histoire* » de continuité, on passe à la limite lorsque $x \longrightarrow 1$, mais on justifie ***proprement*** son existence des 2 côtés de l'égalité :

- la série entière est continue en 1, puisqu'il y a convergence normale sur $[0,1]$: $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{x^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$.
- Quant à la fonction F, elle n'est pas définie en 1, il faut la prolonger par continuité ce qui est possible puisque l'intégrale $\int_0^1 f$ converge, déjà dit dans la remarque.

3) Il faut penser à dériver :

$$\big(F(x)+F(1-x)\big)' = F'(x) - F'(1-x) = -\frac{1}{x}\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\ln x = \big(-\ln(x)\,\ln(1-x)\big)'$$

Comme $\left]0,1\right[$ est ***un intervalle***, les deux fonctions diffèrent à une constante près : On prend la valeur en 0 (ou la limite par continuité) : $\ln(1-x)\ln(x) \sim_0 -x\ln(x) \longrightarrow 0$ et $\big(F(x)+F(1-x)\big)(0) = F(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$

Remarque : L'indication (pas en 2023!) d'effectuer une IPP n'est donc pas nécessaire.

CCP PSI 2013 (dse intégrale à paramètre fonction de Bessel)

Ex 50 Donner le développement en série entière de $x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\cos t)\,\mathrm{d}t$.

$$\int_0^\pi \cos(x\cos t)\,dt \overset{(1)}{=} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{(-1)^n\frac{x^{2n}\cos^{2n}t}{(2n)!}}_{f_n(t)}\,dt \overset{(2)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^\pi (-1)^n\frac{x^{2n}\cos^{2n}t}{(2n)!}\,dt = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^\pi \cos^{2n}t\,dt\ x^{2n}}$$

- **(1)** On utilise le DSE de cos valide sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- **(2)** On applique le 1er théorème d'intégration terme à terme sur $I = [0,\pi]$
  - Les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,\pi]$: continuité sur le ***segment***.
  - La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $[0,\pi]$: c'est un développement en série ... et sa somme est ***continue par morceaux*** sur $[0,\pi]$.
  - La série numérique $\sum_n \int_{[0,\pi]}|f_n|$ converge : $\displaystyle\int_0^\pi \frac{|x|^{2n}\,|\cos^{2n}t|}{(2n)!} \le \pi\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}$: terme général du DSE de cosinus hyperbolique $\cosh|x|$ qui converge pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque.

Remarque : $\displaystyle\int_0^\pi \cos^{2n}t\,dt = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}\cos^{2n}t\,dt = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt$ via le changement de variables $u = \pi - t$.
On reconnaît l'intégrale de Wallis calculée dans des précédentes feuilles d'exercice.

Ex 51 Soit a_n le nombre de manières de rendre n euros avec des pièces de 2 et 3 euros. Développer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$ en série entière de 2 façons et en déduire a_n

En utilisant une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ (je ne mets pas les détails du calcul des coefficients) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)} &= \frac{1}{(1-t)^2(1+t)(t-j)(t-j^2)} = \frac{1/4}{t+1} + \frac{1/4}{1-t} + \frac{1/6}{(1-t)^2} + \frac{-i/3\sqrt{3}}{t-j} + \frac{i/3\sqrt{3}}{t-j^2} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} t^n + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{1-t}\right)' + \underbrace{\frac{i}{3\sqrt{3}j}\,\frac{1}{1-t/j}}_{Z} + \underbrace{\frac{-i}{3\sqrt{3}j^2}\,\frac{1}{1-t/j^2}}_{\overline{Z}} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+1)t^n + \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty} n t^{n-1} + \frac{i}{3\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^n}{j^{n+1}} + \overline{Z} \quad \text{avec } Z+\overline{Z} = 2\Re Z \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}((-1)^n+1)t^n + \frac{1}{6}(n+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\Re\left(\frac{i}{j^{n+1}}\right)\right)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}(1+(-1)^n) + \frac{1}{6}(n+1) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2(n+1)\pi}{3}\right)\right)t^n\end{aligned}$$

On calcule la partie réelle en écrivant $\dfrac{i}{j^{n+1}} = ie^{-i(n+1)2\pi/3}$

En utilisant le produit de **Cauchy**[3] et les séries géométriques, on peut écrire pour $|t|<1$:

$$\frac{1}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad \frac{1}{1-t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \qquad \frac{1}{1-t^2}\times\frac{1}{1-t^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \quad \text{avec } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

On remarque que $a_k = 0$ si $k \neq 2m$ et $b_{n-k} = 0$ si $n-k \neq 3p$ par conséquent dans la somme, ***il ne reste*** que les k tels que $k = 2m$ et $n = k+3p = 2m+3p$, d'où finalement $c_n = \sum\limits_{\substack{m,p\geq 0\\ 2m+3p=n}} t^{2m}t^{3p} = t^n \sum\limits_{\substack{m,p\geq 0\\ 2m+3p=n}} 1$. Si l'on réfléchit $\sum\limits_{\substack{m,p\geq 0\\ 2m+3p=n}} 1$ n'est rien d'autres que le cardinal de toutes les façons de comptabiliser n euros avec des pièces de 2 et de 3.

Conclusion : De l'unicité d'un DSE, il résulte que le cardinal recherché vaut $\boxed{\dfrac{1}{4}(1+(-1)^n) + \dfrac{1}{6}(n+1) + \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{2(n+1)\pi}{3}\right)}$

Remarques

- Cà semble compliqué ! Prenons un cas particulier pour vérifier ; par exemple $n = 10$. A la main, on trouve $10 = 5\times 2 = 2\times 2 + 2\times 3$, soit 2 possibilités. La formule donne $\dfrac{1}{4}\times 2 + \dfrac{11}{6} + \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\sin(\dfrac{22\pi}{3}) = \dfrac{7}{3} + \dfrac{2}{3\sqrt{3}}\,\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = 2$. Ok.
- En fait, en prenant par exemple un nombre pair, $n = 2m$, on a $n = m\times 2 + 0\times 3$, puis $n = 2m-6+6 = (m-3)\times 2 + 2\times 3$, puis $n = 2m-12+12 = (m-6)\times 2 + 4\times 3$ et ainsi de suite. Bref, on trouve simplement que le nombre recherché est $\lfloor n/6\rfloor + 1$! Procédé similaire avec n impair. Reprenons la formule et écrivons n pair : $n = 6m+r$ avec $r \in \{0,2,4\}$ et montrons qu'elle donne bien $m+1$; $\frac{1}{4}(1+(-1)^n) + \frac{1}{6}(n+1) = \frac{1}{2} + \frac{6m+r+1}{6} = m + \frac{r+4}{6}$. Ensuite $\frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2(6m+r+1)\pi}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sin\left(\frac{(2r+2)\pi}{3}\right)$. Pour $r = 0,2,4$, cela donne respectivement $\frac{2}{3\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0, $\frac{2}{3\sqrt{3}}\times\frac{-\sqrt{3}}{2}$. Le tout donne bien $m+1$ dans les 3 cas.
- La formule n'est donc finalement pas très intéressante ! La méthode peut être néanmoins plus adaptée dans des cas plus compliqués moins faciles à deviner. Par exemple, toutes les façons de décomposer n euros avec des pièces

3. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe, en théorie des groupes.

de $1,2$ et 3 euros. On peut d'ailleurs dire aussi que c'est le cardinal des solutions ***entières*** (a,b,c) de $a+2b+3c=n$.

Le lecteur comprendra qu'il faut alors obtenir un DSE de $\frac{1}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}$.
On trouverait ici la formule $\dfrac{17}{72}+\dfrac{1}{8}(-1)^n+\dfrac{1}{4}(n+1)+\dfrac{1}{12}(n+2)(n+1)+\dfrac{2}{9}\cos\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$