Quelques corrections sur les Variables Aléatoires

Ex 2 ✌Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Montrez que la probabilité que X soit paire est plus forte que X impaire.

$$P\big(X \text{ paire}\big) = P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X=2n)\Big) \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda}\cosh(\lambda)$$

$$P\big(X \text{ impaire}\big) = P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X=2n+1)\Big) \overset{(2)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=2n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-\lambda}\sinh(\lambda)$$

- **(1)** Les événements $(X=2n)$ sont clairement ***incompatibles*** car si $\omega \in \Omega$ vérifie $X(\omega)=2n$, évidemment il ne vérifie pas $X(\omega)=2m$ (pour $m \neq n$), donc $(X=2n)\cap(X=2m)=\emptyset$.
- **(2)** Raisonnement similaire sur les événements $(X=2n+1)$.

De $\sinh(x) < \frac{1}{2}e^x < \cosh(x)$ pour tout x réel, il suit $P\big(X \text{ paire}\big) > P\big(X \text{ impaire}\big)$.

Ex 3

1) Etablir $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$. (formule de Vandermonde) (*Utilisez* $(1+X)^{n+m} = (1+X)^n\,(1+X)^m$)

2) Soient X, Y deux vas tq $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$. Peut-on reconnaître la loi de $X+Y$?

1) Je rappelle que lorsqu'on utilise plusieurs polynômes, dans certains cas, il est « *pratique* » de les noter $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ ***en n'oubliant pas implicitement*** que $a_n = 0$ à partir d'un certain rang, sinon cela oblige à utiliser autant de lettres qu'il y a de degré, ce qui alourdit l'écriture. De toute façon, un polynôme est une série entière! Par exemple pour un produit de polynômes, je rappelle la formule-produit : si $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$, alors $P \times Q = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n X^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (on reconnaît la formule de Cauchy des séries entières)

Revenons à notre exercice. $(1+X)^{n+m}$ et $(1+X)^n(1+X)^m$ ont évidemment même coefficients d'indices k, puisqu'égaux.

- Celui de $(1+X)^{n+m}$, par formule de **Newton**[1], comme $(1+X)^{n+m} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}X^k$, est donc $\displaystyle\binom{n+m}{k}$.
- De même, $(1+X)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ $\quad (1+X)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k$ (avec les conventions rappelées de la nullité des $(a_k), (b_k)$ à partir du degré).

  La formule produit donne alors que le coefficient d'indice k de $(1+X)^n \times (1+X)^m$ est $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$

On retrouve bien la formule demandée.

1. **Isaac Newton** : anglais (1643-1727). Partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Connu pour la formule du binôme et la méthode éponyme d'approximation des zéros d'une fonction.

2) Par hypothèse $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ $Y \sim \mathscr{B}(m, p)$. On a déjà $(X+Y)(\Omega) = X(\Omega)+Y(\Omega) = [\![0; n]\!] + [\![0; m]\!] = [\![0; n+m]\!]$. (***Attention!*** au + : par exemple $\mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*$ ***ne fait pas*** $\mathbb{N}^*$! Autre exemple avec les pairs : $2\mathbb{N} + \{0,1\} = \mathbb{N}$: je vous laisse y réfléchir)

$$\begin{aligned}
\forall 0 \le k \le n+m,\ P(X+Y=k) &\overset{(1)}{=} P\Big(\bigcup_{i=0}^{+\infty}(X=i)\cap(Y=k-i)\Big) \overset{(2)}{=} P\Big(\bigcup_{\substack{i=0\\k-i\ge 0}}^{+\infty}(X=i)\cap(Y=k-i)\Big)\\
&\overset{(3)}{=} P\Big(\bigcup_{i=0}^{k}\underbrace{(X=i)\cap(Y=k-i)}_{U_i}\Big) \overset{(4)}{=} \sum_{i=0}^{k} P\big((X=i)\cap(Y=k-i)\big)\\
&\overset{(5)}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X=i)\times P(Y=k-i) \overset{(6)}{=} \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{m-k+i}\\
&= p^k(1-p)^{n+m-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} \overset{(7)}{=} p^k(1-p)^{n+m-k}\binom{n+m}{k}
\end{aligned}$$

- **(1)** On « *balaye* » par toutes les valeurs possible, en n'oubliant pas que X est à valeurs entières donc ne prend que des valeurs $X = i$ avec $i \in \mathbb{N}$.
- **(2)** Y est à valeurs entières donc ne prend que des valeurs $Y = k-i$ avec $k-i \in \mathbb{N}$.
- **(3)** On a $i \ge 0$ et $i \le k$.
- **(4)** Les événements U_i sont incompatibles : $U_i \cap U_j = \emptyset$ (pour $i \ne j$); en effet, si $\omega \in \Omega$ vérifie $\omega \in U_i$, il vérifie en particulier $X(\omega) = i$ et donc il est impossible que $X(\omega) = j$, soit $\omega \notin U_j$.
- **(5)** Les varaibles aléatoires X et Y sont indépendantes d'où le produit.
- **(6)** On applique la définition d'une loi binomiale.
- **(7)** On applique la formule de Vandermonde de Q1.

On reconnaît alors une loi binomiale de paramètres $n+m$ et p.

Remarque : Plus rapidement, on pouvait aussi utiliser que X (rp Y) est la somme de n va de Bernoulli X_i (rp Y_i) i.i.d. de paramètres p Comme les vas $(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,X_m)$ sont aussi i.i.d., on en déduit que leur somme, qui n'est rien d'autre que $X+Y$ suit une loi binomiale $\sim \mathscr{B}(n+m, p)$

Ex 3 Bis Soient X,Y deux variables aléatoires finies de même loi définie par la donnée de $\{a_1,\dots,a_n\}$ et de $P(X=a_i) = p_i$ et indépendantes. Montrez $P(X \ne Y) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i)$

$$\begin{aligned}
P(X=Y) = P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(X=Y=a_k)\Big) &= P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}\underbrace{(X=a_k)\cap(Y=a_k)}_{U_k}\Big) \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{n} P\big((X=a_k)\cap(Y=a_k)\big)\\
&\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} P(X=a_k)\times P(Y=a_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k^2
\end{aligned}$$

- **(1)** Cette sommation résulte du fait que les événements U_k sont incompatibles entre eux : $U_k \cap U_m = \emptyset$ (pour $k \ne m$). En effet si $\omega \in \Omega$ vérifie $\omega \in U_k$, il vérifie $X(\omega) = a_k$ et donc ne vérifie pas $X(\omega) = a_m$, soit $\omega \notin U_m$.
- **(2)** Les va X et Y étant indépendantes, les événements $(X = a_k)$ et $(Y = a_k)$ sont indépendants d'où le produit

$$P(X \neq Y) \overset{(1)}{=} 1 - P(X = Y) \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} p_k - \sum_{k=1}^{n} p_k^2 = \sum_{k=1}^{n} p_k - p_k^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i(1 - p_i)$$

- **(1)** $(X = Y)$ et $(X \neq Y)$ sont des événements contraires!
- **(2)** Par définition d'une loi de probabilité, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

CCPBQ MP 2021->2015 (loi du r^e succès)

Ex 5

On admet que $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall x \in \left]-1, 1\right[$, $\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$. Toutes les secondes à partir de $t = 1s$, on envoie un rayon laser dans l'enceinte. Chaque tir laser est indépendant du précédent et la bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. La bactérie meurt lorsqu'elle a été touchée $r = 3$ **[MP : r quelconque]** fois par le rayon laser. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1) Déterminez la loi de X.

2) Prouvez que X admet une espérance et la calculer

Cet exercice fait partie de la banque d'exos CCINP 2021 MP, n°96.

Vous pouvez regarder la correction fournie par le concours : Banque CCINP MP 2021 avec corrigés

Ex 7 ✌ D'un jeu de 32 cartes, on tire une à une des cartes avec remise, jusqu'à obtenir un as.

1) Soit X le nombre de tirages. Donnez la loi de X et calculez $E(X)$.

2) Soit Y le nombre de cartes autres qu'un as qu'il aura fallu tirer pour obtenir le 1er As. Exprimez Y en fonction de X. en déduire la loi de Y et calculez $E(Y)$.

1)

- Nous sommes dans le cas d'une suite d'expériences ***indépendantes*** de type succès-échec puisque le tirage est avec remise. La probabilité d'obtenir un As est $p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$
- X est le nombre de tirages ***jusqu'à l'obtention*** d'un As, cad du 1^{er} succés

On a bien alors une va suivant une ***loi géométrique*** de paramètre $p = \frac{1}{8}$, $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{8}\right)$. On sait alors $E(X) = \frac{1}{p} = 8$.

2) Si on note Y la va donnant le nombre de cartes obtenues ***avant*** le tirage du 1er As, il faut comprendre qu'on a $Y = X - 1$. Comme $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{8}\right)$ on en déduit immédiatement la loi de Y :

$$X(\Omega) = [\![1; +\infty[\![\ \forall n \geq 1,\ P(X = n) = \left(\frac{7}{8}\right)^{n-1} \frac{1}{8} \quad \Longrightarrow \quad Y(\Omega) = [\![0; +\infty[\![\ \forall n \in \mathbb{N},\ P(Y = n) = P(X = n+1) = \left(\frac{7}{8}\right)^{n} \frac{1}{8}$$

Par linéarité de l'espérance, on en déduit aussi $E(Y) = E(X) - 1 = 7$.

Mines-Ponts PSI 2022 (matrice aléatoire 2×2) ✷

Ex 10 Soient X_1, X_2 2 vas indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Soit Y une va indépendante des2 autres tq $Y(\Omega)=\{-1,1\}$ et $P(Y=1)=p\in\,]0,1[$. On pose $M=\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1\end{pmatrix}$

1) Probabilité que M soit inversible?

2) Probabilité que les vp de M soient réelles?

3) Probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

1) $A=\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ yx_2 & x_1\end{smallmatrix}\right)$ avec x_1, x_2, y réels est inversible ssi $x_1^2\neq yx_2$. Par suite on calcule :

$$\begin{aligned}
P(X_1^2=YX_2^2) &\overset{(1)}{=} P((X_1^2=YX_2^2)|(Y=1))P(Y=1)+P((X_1^2=YX_2^2)|(Y=-1))P(Y=-1)\\
&\overset{(2)}{=} P(X_1^2=X_2^2)p+P(X_1=X_2=0)(1-p) \overset{(3)}{=} pP(X_1=X_2)+(1-p)P(X_1=0)P(X_2=0)\\
&= pP\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}((X_1=n)\cap(X_2=n))\Big)+(1-p)e^{-\lambda_1-\lambda_2} \overset{(4)}{=} p\sum_{n=0}^{+\infty}P((X_1=n)\cap(X_2=n))+(1-p)e^{-\lambda_1-\lambda_2}\\
&\overset{(5)}{=} p\sum_{n=0}^{+\infty}P(X_1=n)P(X_2=n)+(1-p)e^{-\lambda_1-\lambda_2} = pe^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda_1^n\lambda_2^n}{n!^2}+(1-p)e^{-\lambda_1-\lambda_2}\\
&= e^{-\lambda_1-\lambda_2}+pe^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_1^n\lambda_2^n}{n!^2}
\end{aligned}$$

- **(1)** Formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $((Y=1),(Y=-1))$
- **(2)** $(X_1^2=-X_2^2)$ n'est possible que pour $X_1=X_2=0$
- **(3)** on a $X_1, X_2\geq 0$
- **(4)** Les événements $((X_1=n)\cap(X_2=n))$ sont incompatibles 2 à 2
- **(5)** Les événements $(X_1=n)$ et $(X_2=n)$ sont indépendants par indépendance des 2 vas X_1 et X_2.

Par suite $P(M\text{inversible})=1-e^{-\lambda_1-\lambda_2}-pe^{-\lambda_1-\lambda_2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda_1^n\lambda_2^n}{n!^2}$

2) Pour une matrice 2×2, on sait que le polynôme caractéristique est $X^2-\operatorname{tr}(A)X+\det(A)$. Il suit que ses 2 vp sont réelles ssi $\Delta=\operatorname{tr}(A)^2-4\det(A)\geq 0$. $\Delta=4x_1^2-4(x_1^2-yx_2^2)=4yx_2^2$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}
P(\text{vp de } M \text{ réelles}) &= P(YX_2^2\geq 0)=P((YX_2^2\geq 0)|(Y=1))P(Y=1)+P((YX_2^2\geq 0)|(Y=-1))P(Y=-1)\\
&= pP(X_2\geq 0)+(1-p)P(X_2=0)=p+(1-p)e^{-\lambda_2}
\end{aligned}$$

3) Si les deux vp d'une matrice 2×2 sont égales (notons la α), la matrice n'est diagonalisable que ssi c'est αI_2. Par suite, A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ssi $\Delta>0$ ou $\Delta=0$ et $x_2=0$ ce qui équivaut à $yx_2^2>0$ ou $x_2=0$. Je vous laisse calculer la probabilité.

Ex 11 Soit X, Y deux va discrètes et indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre p.

1) Déterminez $P\big(X>n\big)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

2) En déduire $P\big(Z>n\big)$ et la loi de $Z=\min(X,Y)$. Reconnaître la loi de Z.

1) ***Méthode 1 :*** L'événement $(X > n)$ peut s'écrire « *dans les n premières expériences, on n'a obtenu que des échecs* ». De l'indépendance, on en déduit $P(X > n) = (1-p)^n$

Méthode 2 : On effectue ici un calcul direct, après avoir remarqué que : $(X > n) = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} (X = k)$. Puis, de l'***incompatibilité*** immédiate des événements $(X = k)$, il suit :

$$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = p(1-p)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-(n+1)} = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

2) On pose $Z = \min(X, Y)$. En se rappelant que, pour des nombres, $z = \min(x, y) > a \iff x > a$ ***et*** $y > a$, puis

$$P(Z > n) = P\big((X > n) \cap (Y > n)\big) = P(X > n) \times P(Y > n) = (1-p)^{2n}$$

L'indépendance des événements $(X > n)$ et $(Y > n)$ résulte immédiatement de l'indépendance des 2 vas X et Y.

Comme $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, il est clair que $Z = \min(X, Y) = \mathbb{N}^*$. Ensuite :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\big((Z = n)\big) &\overset{(1)}{=} P\big((Z > n-1) - (Z > n)\big) \overset{(2)}{=} P\big((Z > n-1)\big) - P\big((Z > n)\big) \\ &= (1-p)^{2n-2} - (1-p)^{2n} = (1-p)^{2n-2}\left(1-(1-p)^2\right) = \boxed{\left(1-(1-(1-p)^2)\right)^{n-1}\left(1-(1-p)^2\right)}\end{aligned}$$

- **(1)** On a la différence « *ensembliste* » $(Z = n) = (Z > n-1) - (Z > n)$.
- **(2)** ***Attention !*** $P(A - B) = P(A) - P(B)$ est faux ***en général***. Il est vrai ***si*** $B \subset A$. C'est le cas ici : $(Z > n) \subset (Z > n-1)$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $1 - (1-p)^2 = 2p - p^2$.

Mines-Ponts PSI 2021 | Mines-Telecom PSI 2018 (probabilité matrice 2×2 diagonalisable)

Ex 11 Soient 2 vas X, Y indépendantes tq elles suivent les lois $X \sim \mathcal{G}(p)$ et $Y \sim \mathcal{G}(q)$.

1) Quelle est la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

2) Soit Z une 3e va suivant la loi de Bernoulli de paramètre p_2. Ces 3 vas étant supposées mutuellement indépendantes, déterminer la probabilité pour que la matrice $\begin{pmatrix} X & Z \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ? [**Telecom :** Question absente] .

1) ***Attention !*** , stricto-sensu, M n'est pas une matrice, mais une matrice aléatoire ou un vecteur aléatoire : c'est une application de Ω dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Considérons $A = M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. A étant triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur la diagonale : ce sont x et y

- Si $x \neq y$, A a 2 vp ***distinctes*** en dimension 2 et est donc diagonalisable.
- Si $x = y$, x est de multiplicité 2, et $xI - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de rang 1, donc $\dim E(x) = 1 < 2$, A n'est pas diagonalisable. ***Autre méthode :*** on pouvait aussi dire : comme A n'a ***qu'une seule vp*** x, elle n'est diagonalisable que ***ssi*** $A = x.I_2$, ce qui n'est pas (à cause du 1).

Conclusion : $A = M(\omega)$ est diagonalisable ssi $x \neq y$. Puis on passe aux probas :

$$\begin{aligned}P(M \text{ diagonalisable }) &= P(X \neq Y) \overset{(1)}{=} 1 - P(X = Y) \overset{(2)}{=} 1 - P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = Y = n)\Big) = 1 - P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = n) \cap (Y = n)\Big) \\ &\overset{(3)}{=} 1 - \sum_{n=P}^{+\infty} \big((X = n) \cap (Y = n)\big) \overset{(4)}{=} 1 - \sum_{n=P}^{+\infty} (X = n)P(Y = n) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} pq(1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1} \\ &\overset{(5)}{=} 1 - pq\frac{1}{(1-p)(1-q)} = \boxed{\frac{1-q-p}{pq-p-q}}\end{aligned}$$

- **(1)** Evénement contraire

- **(2)** On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$
- **(3)** Les événements $U_n = (X = n) \cap (Y = n)$ sont clairement incompatibles 2 à 2.
- **(4)** X et Y sont indépendantes.
- **(5)** On aura reconnu une série géométrique de raison $(1-p)(1-q)$ avec ***tous*** les termes

2) On reprend le raisonnement sur la matrice $\left(\begin{smallmatrix} x & z \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right)$. Il faut juste adapter le cas où $x = y$ où la diagonalisabilité est possible pour $z = 0$. ***Conclusion :*** $M(\omega)$ est diagonalisable ssi $\big(x \neq y\big)$ ou $\big((x = y)$ et $(z = 0)\big)$. Puis :

$$P\big(M \text{ diagonalisable }\big) = P\Big((X \neq Y) \bigcup \big((X = Y) \cap (Z = 0)\big)\Big) \overset{(1)}{=} P(X \neq Y) + P\big((X = Y) \cap (Z = 0)\big)$$
$$\overset{(2)}{=} P(X \neq Y) + P(X = Y)P(Z = 0) \overset{(3)}{=} \frac{pq}{pq - p - q} + \frac{pq}{pq - p - q} \times (1 - p_2) = \boxed{\frac{pq(2 - p_2)}{pq - p - q}}$$

- **(1)** Les 2 événements $(X \neq Y)$ et $(X = Y) \cap (Z = 0)$ sont incompatibles puisque le 2e est inclus dans $(X = Y)$
- **(2)** (X, Y, Z) mutuellement indépendantes et lemme des coalitions en coalisant (X, Y) et Z
- **(3)** $Z \sim \mathscr{B}\big(p_2\big)$ et on reprend la calcul de Q1 pour $P(X = Y)$

Centrale PSI 2021 (limite suite espérance de vas) ✷

Ex 12 Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de vas de loi uniforme sur $\big\{-1, 1\big\}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1) Pour $t \in \mathbb{R}$, justifiez $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer. Mz $E(\exp(tX_n)) \leq e^{t^2/2}$ pour $(n, t) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

2) justifiez que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer. Déterminez $\lim_{n\to+\infty} E\big(\exp(tS_n/\sqrt{n})\big)$.

1) D'après le théorème de transfert, e^{tX_n} admet une espérance, puisque X_n, donc e^{tX_n} est une va finie (à 2 éléments!) :
$E\big(e^{tX_n}\big) = e^{-t}P(X_n = -1) + e^t P(X_n = 1) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) = \cosh t$
Comme on a $(2n)! \geq (2n)!! = (2n)(2n-2)(2n-4)\dots 2 = 2^n\ n!$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ E\big(e^{tX_n}\big) = \cosh t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^n}{n!} = e^{t^2/2}$$

2) La va S_n est finie (prend toutes les valeurs entières entre $-n$ et $+n$), donc e^{tS_n} aussi, son espérance existe alors.

$$E\big(e^{tS_n}\big) = E\big(e^{tX_1 + \cdots + tX_n}\big) = E\Big(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\Big) \overset{(1)}{=} \prod_{i=1}^{n} E\big(e^{tX_i}\big) = \cosh^n t$$

- **(1)** Les X_i étant indépendantes, les e^{tX_i} les sont aussi d'où la propriété de l'espérance

$$u_n = E\Big(\exp\Big(\frac{tS_n}{\sqrt{n}}\Big)\Big) = \cosh^n\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big) \quad\Longrightarrow\quad \ln u_n = n\ \ln \underbrace{\cosh \frac{t}{\sqrt{n}}}_{\to 1}\ \sim\ n\left(\cosh \frac{t}{\sqrt{n}} - 1\right) \sim n\frac{(t/\sqrt{n})^2}{2} = \frac{t^2}{2}$$

On en déduit $u_n = \exp(\ln u_n) \xrightarrow{n\to+\infty} e^{t^2/2}$, par continuité de l'exponentielle.

IMT PSI 2022 (deux piles consécutifs) ✷

Ex 13 On lance une pièce donnant pile avec une probabilité $\frac{2}{3}$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs. On pose $a_n = P(X = n)$

1) Calculez a_1 et a_2.

2) A l'aide des formules de probabilités totales, montrez $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}$.

3) Montrez que le jeu se termine presque sûrement.

4) L'espérance de X est-elle finie? Si oui, la calculer.

1) Evidemment $P(X=1)=0=a_1$ et en notant usuellement A_n l'événement « *obtenir pile au n-ième lancer* », on a $(X=2)=A_1\cap A_2$ puis, par indépendance des lancers, $a_2=P(X=2)=P(A_1)\times P(A_2)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$.

2) Pour raisonner correctement, on utilise le système complet d'événements $(\overline{A_1},A_1\cap\overline{A_2},A_1\cap A_2)$: l'incompatibilité est immédiate (vu les contraires) et :

$$\overline{A_1}\cup(A_1\cap\overline{A_2})\cup(A_1\cap A_2)=\overline{A_1}\cup\big(A_1\cap(\overline{A_2}\cup A_2)\big)=\overline{A_1}\cup(A_1\cap\Omega)=\overline{A_1}\cup A_1=\Omega$$

On applique alors la formule des probabilités totales à $(X=n)$ (en supposant $n\geq 3$) :

$$a_n=P(X=n)=\underbrace{P\big((X=n)|\overline{A_1}\big)}_{a_{n-1}}\underbrace{P(\overline{A_1})}_{\frac{1}{3}}+\underbrace{P\big((X=n)|A_1\cap\overline{A_2}\big)}_{a_{n-2}}\underbrace{P(A_1\cap\overline{A_2})}_{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}+\underbrace{P\big((X=n)|A_1\cap A_2\big)}_{0}\underbrace{P(A_1\cap A_2)}_{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}$$

Expliquons un peu ces probabilités :

- On a $P\big((X=n)|A_1\cap A_2\big)=0$ car lors de ces n lancers on a obtenu pile au 1er et 2ième lancer donc on a obtenu 2 piles consécutifs à l'étape 2 et donc impossibilité que ce soit à l'étape $n\geq 3$.
- $P\big((X=n)|\overline{A_1}\big)=a_{n-1}$ car ayant obtenu un face au premier tirage, la probabilité d'avoir 2 piles consécutifs du 2e tirage au n-ième tirage est la même que celle ***partant*** du 1er tirage au $n-1$-ième tirage (par indépendance et répétition des expériences).
- Comme pour le précédent, $P\big((X=n)|A_1\cap\overline{A_2}\big)=a_{n-2}$ car ayant obtenu face au 2ième tirage, la probabilité de d'obtenir 2 piles consécutifs entre le 3ième tirage et le n-ième tirage est la même que celle entre le 1er tirage et le $n-2$-ième tirage, qui par définition est a_{n-2}.

3) Le jeu se termine presque sûrement ssi $P\Big(\bigcup\limits_{n=2}^{+\infty}(X=n)\Big)=1$ (je vous laisse y réfléchir).
On va évidemment avoir besoin de calculer $P(X=n)=a_n$ qui est une suite récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique est $X^2-\frac{1}{3}X-\frac{2}{9}$ qui a pour racines $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. On sait alors $a_n=\alpha\big(-\frac{1}{3}\big)^n+\beta\big(\frac{2}{3}\big)^n$. On utilise les conditions initiales $a_1=0$ et $a_2=\frac{4}{9}$ et on arrive à $a_n=\frac{4}{3}\big(-\frac{1}{3}\big)^n+\frac{2}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^n$ (je ne vous mets pas les détails du système 2×2).
On applique la propriété de continuité croissante (les événements $\bigcup_{k=2}^{n}(X=k)$ sont croissants) :

$$\begin{aligned}P\Big(\bigcup_{n=2}^{+\infty}(X=n)\Big)&=\lim_{n\to+\infty}P\Big(\bigcup_{k=2}^{n}(X=k)\Big)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}P(X=k)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{4}{3}(-\frac{1}{3})^k+\frac{2}{3}(\frac{2}{3})^k\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{4}{3}(-\frac{1}{3})^2\frac{1-(-\frac{1}{3})^{n-1}}{1-(-\frac{1}{3})}+\frac{2}{3}(\frac{2}{3})^2\frac{1-(\frac{2}{3})^{n-1}}{1-(\frac{2}{3})}=\frac{4}{3}\frac{1}{9}\frac{1}{\frac{4}{3}}+\frac{2}{3}\frac{4}{9}\frac{1}{\frac{1}{3}}=1\end{aligned}$$

4) L'espérance de X est finie ssi la famille $\Big(n\Big(\frac{4}{3}\big(-\frac{1}{3}\big)^n+\frac{2}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^n\Big)\Big)_{n\geq 1}$ est sommable, et, comme c'est une suite, ceci équivaut à la série absolument convergente. On l'a immédiatement en appliquant le critère d'Alembert, plus simplement à l'équivalent (de la valeur absolue) qui est $n\big(\frac{2}{3}\big)^{n+1}$.
On calcule ensuite (les 3/2 ne peuvent encore traiter cette question de calcul de somme) :

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}n\Big(\frac{4}{3}\big(-\frac{1}{3}\big)^n+\frac{2}{3}\big(\frac{2}{3}\big)^n\Big)=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}n\big(-\frac{1}{3}\big)^n+\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}n\big(\frac{2}{3}\big)^n=\frac{4}{3}\frac{-\frac{1}{3}}{\big(1-(-\frac{1}{3})\big)^2}+\frac{2}{3}\frac{\frac{2}{3}}{\big(1-\frac{2}{3}\big)^2}=\frac{15}{4}$$

On a utilisé $\sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$, pour $x\in\,]-1,1[$, par une ***dérivation terme à terme*** d'une série entière sur $]-1,1[$ car son rayon est $R=1$:

$$\forall x\in\,]-1,1[\,,\ \sum_{n=1}^{+\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n)'=x\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}x^n\Big)'=x\Big(\frac{1}{1-x}-1\Big)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

Ex 15 Lors d'une compétition, les candidats portent des dossards numérotés de 1 à n et chacun tire un rang de passage entre 1 et n. Plusieurs candidats peuvent se trouver sur la même ligne de départ. A la fin du tirage, si un au moins des candidats a le même numéro de passage que son dossard, on annule le tirage et on recommence. On appelle X_n le nombre de fois qu'il a fallu procéder aux tirages.

1) Reconnaître X_n. Donnez son espérance.

2) Pour tout entier k, on pose $P\big(Y=k\big)=\lim\limits_{n\to+\infty} P\big((X_n=k)\big)$. Reconnaitre Y. Interpréter.

1)

On peut modéliser un tirage tout simplement par une application i de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$, qui associe au numéro (de dossard) du candidat, le numéro de passage tiré.

- Il y a répétition du même tirage de façon indépendante de type succès / échec où le succès est i n'a pas de point fixe (un point fixe est un x tq $i(x)=x$). On note la probabilité de réussite p_n. Calcul après.
- X_n retourne le numéro de tirage du 1^{er} succés

On a donc $X_n \sim \mathscr{G}\big(p_n\big)$ et $E(X_n)=\frac{1}{p_n}$

Pour terminer et calculer p_n, il faut ***dénombrer*** toutes les applications i (en nombre n^n) n'ayant pas de point fixe. Pour la ***première*** image, l'image de 1, comme le 1 est exclus, nous avons $n-1$ ***possibilités***. Pour l'image de 2, comme seulement le 2 est exclus, nous avons également $n-1$ possibilités. Finalement, le nombre total est $(n-1)\times(n-1)\times\cdots\times(n-1)=(n-1)^n$, d'où $p_n=\dfrac{(n-1)^n}{n^n}=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

Remarque :

$$p_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\exp\Big(n\ln\big(1-\frac{1}{n}\big)\Big)=\exp\Big(n\big(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\big)\Big)=\exp\Big(-1+o(1)\Big)\to\frac{1}{e}$$

on peut en « *déduire* » que, dès que le nombre de candidats est « *assez grand* », on peut espérer en moyenne $3\simeq e$ tirages pour obtenir ce que « *l'on veut* ».

2)

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\quad P\big((X_n=k)\big)=\Big(1-\big(1-\frac{1}{n}\big)^n\Big)^{k-1}\ \big(1-\frac{1}{n}\big)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Big(1-\frac{1}{e}\Big)^{k-1}\frac{1}{e}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{e}$, $Y\sim\mathscr{G}\big(\frac{1}{e}\big)$, d'où $E(Y)=e$. L'interprétation a déjà été faite plus haut …

Mines-Ponts PSI 2021 (min et max de variables aléatoires géométriques) ✷

Ex 16 Soient $0<p<1$ et (X_n) une suite i.i.d. de vas suivant la loi géométrique de paramètre p.

1) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $Y_n=\min(X_1,\dots,X_n)$. Déterminez la loi puis l'espérance de Y_n.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $Z_n=\max(X_1,\dots,X_n)$. Déterminez la loi de Z_n, puis un équivalent de $E(Z_n)$ quand $n\longrightarrow+\infty$.

1) Pour k entier, on a $Y_n\geq k$ ssi $\forall 1\leq i\leq n,\ X_i\geq k$. $(X_i\geq k)$ étant l'événement « *en* $k-1$ *1*^{re} *tentatives,* $k-1$ *échecs* », il vient $P(X_i\geq k)=(1-p)^{k-1}=q^{k-1}$ puis :

$$P(Y_n\geq k)=P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i\geq k)\Big)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\geq k)=q^{n(k-1)}$$

On a utilisé l'indépendance des (X_i). On a immédiatement $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}^*$ puisque pour tout i, $X_i(\Omega) = \mathbb{N}^*$.On écrit $(Y_n = k) = (Y_n \geq k) \setminus (Y_n \geq k+1)$ et ceci pour tout entier k. Comme $(Y_n \geq k+1) \subset (Y_n \geq k)$, en passant aux probas :

$$\forall k \geq 1,\ P(Y_n = k) = P(Y_n \geq k) - P(Y_n \geq k+1) = q^{n(k-1)} - q^{nk} = q^{n(k-1)}(1-q^n)$$

On reconnaît que Y_n suit une loi géométrique de paramètre $1-q^n$, soit $E(Y_n) = \frac{1}{1-q^n}$

2) Par un procédé analogue, $Z_n \leq k$ ssi pour tout $1 \leq i \leq n$, $X_i \leq k$ puis :

$$\forall k \geq 1, P(Z_n \leq k) = P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i \leq k)\Big) = \prod_{i=1}^{n}\Big(1 - P(X_i > k)\Big) = (1-q^k)^n$$
$$P(Z_n = k) = P(Z_n \leq k) - P(Z_n \leq k-1) = (1-q^k)^n - (1-q^{k-1})^n$$

La famille $\big(kP(Z_n = k)\big)_{k\geq 1}$ est sommable car, comme c'est une suite, la série « *correspondante* » est absolument convergente, cad convergente par positivité (d'Alembert par exemple). On applique la formule de calcul d'une espérance pour une va à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$E(Z_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_n > k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - P(Z_n \leq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 1 - (1-q^k)^n$$

On constate lorsque $k \nearrow$ que $1 - q^k \nearrow$ puis $1-(1-q^k)^n \searrow$. On peut appliquer une comparaison séries-intégrale (je ne mets pas de détails). On arrive à

$$I_n - 1 \leq E(Z_n) \leq \int_0^{+\infty} 1-(1-q^t)^n\, dt = I_n$$
$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{+\infty} (1-q^t)^{n-1} - (1-q^t)^n\, dt = \int_0^{+\infty} (1-q^t)^{n-1} q^t\, dt = \frac{-1}{\ln q}\int_0^1 (1-y)^{n-1}\, \mathrm{d}y = \frac{-1}{n\ln q}$$

avec le changement de variables $y = q^t$ C^1 bijectif de $\left]0,+\infty\right[$ dans $\left]0,1\right[$ (car $q<1$) On termine avec l'application du résultat (hors programme PSI d'ailleurs) que si $u_n \sim v_n$, $v_n \geq 0$, la série $\sum u_n$ diverge alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$. Ici cela amène (je vous laisse vérifier les hypothèses) :

$$I_n = I_n - I_0 = \sum_{k=1}^{n} I_k - I_{k-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{k\ln q} \sim \frac{-1}{\ln q}\ln n$$

En utilisant l'équivalent bien connu $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

IMT PSI 2017 (calcul espérance) ✌

Ex 17 Soient $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\forall 0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = a\binom{n}{k}$.

1) Déterminez la valeur de a.

2) Déterminez l'espérance et la variance de X.

1) Le a est déterminé par la vérification de loi de probablité, soit $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$. Comme $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, il suit $a = \frac{1}{2^n}$

2) Voilà 4 méthodes qui sont toutes intéressantes.

Méthode 1 : En écrivant $P(X=k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$, on reconnaît une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$, donc, d'après le cours,

$$E(X) = np = \frac{n}{2} \qquad V(X) = np(1-p) = \frac{n}{4}$$

Méthode 2 : On utilise la fonction génératrice $G_X(t) = a\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^k = \frac{1}{2^n}(1+t)^n$. Il suit, comme l'existence des dérivées en 1 ne pose pas de problèmes :

$$E(X) = G_X'(1) = \left[\frac{n}{2^n}(1+t)^{n-1}\right](t=1) = \frac{n2^{n-1}}{2^n} = \frac{n}{2}$$
$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X(1)^2 = \left[\frac{n(n-1)}{2^n}(1+t)^{n-2}\right](t=1) + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{n(n-1)2^{n-2}}{2^n} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{n}{4}$$

Méthode 3 : On utilise la formule du binôme de Newton $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ que l'on dérive 2 fois :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1} \qquad n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1)x^{k-2}$$

$$E(X) = a\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = a\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}1^{k-1} = \frac{1}{2^n}n2^{n-1} = \frac{n}{2}$$
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}1^{k-2} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4}$$
$$= \frac{n(n-1)2^{n-2}}{2^n} + \frac{n}{2} - \frac{n^2}{4} = \frac{n}{4}$$

Méthode 4 : on utilise la petite formule : $\forall 1 \leq k \leq n,\ \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} \qquad \forall 2 \leq k \leq n,\ \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\binom{n-2}{k-2}$

$$E(X) = a\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = \frac{n}{2^n}2^{n-1} = \frac{n}{2}$$
$$E(X^2) = \ldots$$

Ex 17Bis Soit X, Y deux vas indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre p et q. Espérance de $Z = \max(X,Y)$? (*On utilisera la formule de l'espérance pour une va à valeurs dans* $\mathbb{N}$)

La formule de l'espérance (supplémentaire à celle générale), pour une va Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ est : $E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z > n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(Z \geq n)$. On se rappelle qu, dans $\mathbb{R}$, $\max(x,y) > a \iff x > a$ ***ou*** $y > a$. Ensuite :

$$E(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z>n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\big((X>n)\cup(Y>n)\big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n) + P(Y>n) - P\big((X>n)\cap(Y>n)\big)$$
$$\overset{\textbf{(1)}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X>n) + P(Y>n) - P(X>n)P(Y>n) \overset{\textbf{(2)}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n + (1-q)^n - (1-p)^n(1-q)^n$$
$$\overset{\textbf{(3)}}{=} \frac{1}{1-(1-p)} + \frac{1}{1-(1-q)} - \frac{1}{1-(1-p)(1-q)} = \boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p+q-pq}}$$

- **(1)** X et Y sont indépendantes, $X \perp\!\!\!\perp Y$
- **(2)** $(X > n)$ est l'événement « *n échecs en n premières tentatives* », donc de probabilité $(1-p)^n$
- **(3)** Séries géométriques ***convergentes*** car de raison $|1-p| < 1$, $|1-q| < 1$ et $|1-p||1-q| < 1 \times 1 = 1$

CCPBQ MP 2023->2015 (calcul d'espérance et de variance) ✌

Ex 20

Soit $\lambda > 0$. Soit X une va discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

2) Calculez λ.

3) Prouvez que X admet une espérance et la calculer.

4) X admet-elle une variance ? Justifiez.

Cet exercice fait partie de la banque d'exos CCINP MP, n°100.

Vous pouvez regarder la correction fournie par le concours : Banque CCINP MP 2023 avec corrigés

Ex 23

✷ Soit $(X_n)_n$ une suite de va i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie et N une va à valeurs dans $[\![0 ; k]\!]$. On suppose les va $X_0, \ldots, X_n, Z$ mutuellement indépendantes. On définit une va Y par $Y = \sum\limits_{i=0}^{N} X_i$.

1) Montrez que Y est d'espérance finie.

2) Calculez $E(Y)$ en fonction de $E(X_0)$ et $E(N)$.

1) Comme X_i est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $Y = \sum_{i=0}^{N} X_i$, on en déduit que Y est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Par conséquent, Y est d'espérance finie ssi la famille $\big(nP(Y = n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} nP(Y = n)$ converge absolument (ce qui équivaut à converge puisque c'est une série positive). La va N est à valeurs dans $[\![0 ; k]\!]$, on sait alors que $\big((N = i)\big)_{1\leq i\leq k}$ est un système complet d'événements. On applique la formule des probabilités totales :

$$P(Y = n) = \sum_{i=0}^{k} P\big((Y = n) \mid (N = i)\big) P(N = i) = \sum_{i=0}^{k} P\Big(\sum_{p=1}^{i} X_p = n \mid (N = i)\Big) P(N = i)$$
$$\overset{(1)}{=} \sum_{i=0}^{k} P(X_1 + \cdots + X_i = n)\, P(N = i)$$

- **(1)** Résulte de les variables $X_1, \ldots, X_i, N$ sont mutuellement indépendantes et du lemme des coalitions. Rappel : si 2 événements A et B sont indépendants, alors $P(A|B) = P(A)$

Bien comprendre que la série $\sum nP(Y = n)$ est donc la ***combinaison linéaire finie*** de $k + 1$ termes, par les scalaires $P(N = i)$, des $k + 1$ séries $\sum_n nP(X_1 + \cdots + X_i = n)$. Il ***suffit*** de montrer que chacune des ces séries est convergente. Or on remarque que c'est la série de l'espérance de la va $X_1 + \cdots + X_i$ qui est ***finie*** car celle de ***chaque*** X_i l'est par hypothèse. Cette série converge donc.

2)

$$E(Y)=\sum_{n=0}^{+\infty} nP(Y=n) \overset{(1)}{\underset{\sim}{=}} \sum_{n=0}^{+\infty} n\sum_{i=0}^{k} P(X_1+\cdots+X_i=n)\,P(N=i)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{k} n\,P(N=i)\,P(X_1+\cdots+X_i=n)$$
$$\overset{(2)}{\underset{\sim}{=}} \sum_{i=0}^{k}\sum_{n=0}^{+\infty} n\,P(N=i)\,P(X_1+\cdots+X_i=n)=\sum_{i=0}^{k} P(N=i)\sum_{n=0}^{+\infty} n\,P(X_1+\cdots+X_i=n)$$
$$\overset{(3)}{\underset{\sim}{=}} \sum_{i=0}^{k} P(N=i)E(X_1+\cdots+X_i)=\sum_{i=0}^{k} P(N=i)\big(E(X_1)+\cdots+E(X_i)\big) \overset{(4)}{\underset{\sim}{=}} \sum_{i=0}^{k} P(N=i)i\,E(X_1)$$
$$=E(X_1)\sum_{i=0}^{k} i\,P(N=i) \overset{(5)}{\underset{\sim}{=}} \boxed{E(X_1)\,E(N)}$$

- **(1)** On a repris tout le calcul de Q1)
- **(2)** On peut intervertir les deux Σ car il y a une somme ***finie***.
- **(3)** On a reconnu la série de l'espérance de $X_1+\cdots+X_i$.
- **(4)** Les va X_i sont de même loi.
- **(5)** On a reconnu la somme finie de l'espérance de N

Ex 24 Soit X, Y, Z 3 variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi $\sim \mathcal{G}(p)$.

1) Déterminez la loi de la somme $S=X+Y$.

2) Déterminez la loi conditionnelle de X sachant $(S=k)$, avec $k\in S(\Omega)$.

3) Pour $n\in S(\Omega)$ calculez $P\big((S\geq n)\big)$.

4) Déterminez $P\big((S\geq Z)\big)$, $P\big((S\leq Z)\big)$ et $P\big((S=Z)\big)$.

---

1) X, Y sont à valeurs dans $[\![1;+\infty[\![$, donc $Z=X+Y$ est à valeurs dans $[\![2;+\infty[\![$. Ensuite on écrit :

$$\forall n\geq 2,\ P(S=n)=P(X+Y=n) \overset{(1)}{\underset{\sim}{=}} P\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{R}}(X=k)\cap(Y=n-k)\Big) \overset{(2)}{\underset{\sim}{=}} P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty}(X=k)\cap(Y=n-k)\Big)$$
$$\overset{(3)}{\underset{\sim}{=}} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n-1}\underbrace{(X=k)\cap(Y=n-k)}_{U_k}\Big) \overset{(4)}{\underset{\sim}{=}} \sum_{k=1}^{n-1} P\big((X=k)\cap(Y=n-k)\big)$$
$$\overset{(5)}{\underset{\sim}{=}} \sum_{k=1}^{n-1} P(X=k)\times P(Y=n-k)=\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{k-1}p\,(1-p)^{n-k-1}p=p^2\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^{n-2}=\boxed{(n-1)p^2(1-p)^{n-2}}$$

- **(1)** On « *balaye* » par toutes les possibilités pour X.
- **(2)** $X(\Omega)=[\![1;+\infty[\![$.
- **(3)** Y est à valeurs dans $[\![1;+\infty[\![$, donc $n-k\geq 1$, soit $k\leq n-1$
- **(4)** Les U_k sont incompatibles, cad $U_k\cap U_j=\emptyset$ (avec $k\neq j$), car si $\omega\in\Omega$ vérifie $\omega\in U_k$, alors il vérifie $X(\omega)=k$ et donc ne vérifie pas $X(\omega)=j$, soit $\omega\notin U_j$.
- **(5)** Les va X et Y sont ***indépendantes*** par hypothèse d'où le produit.

Remarque : On reconnaît la loi du 2^{e} succès, ce qui n'est pas étonnant, puisque l'on somme 2 variables géométriques : 1er succès + 1er succès ...

2) On commence par remarquer que, comme $S=X+Y=k$, et que $X, Y\geq 1$, la loi conditionnelle de X sachant $(S=k)$

prend ses valeurs dans $[\![1\,;\,k-1]\!]$. (Rappelons $k \in [\![2\,;\,+\infty[\![$). Ensuite :

$$\forall 1 \le n \le k-1,\ P\big((X=n)\mid(S=k)\big) = \frac{P\big((X=n)\cap(S=k)\big)}{P(S=k)} = \frac{P\big((X=n)\cap(Y=k-n)\big)}{P(S=k)}$$
$$= \frac{P(X=n)\times P(Y=k-n)}{P(S=k)} = \frac{p(1-p)^{n-1}\,p(1-p)^{k-n-1}}{(k-1)p^2(1-p)^{k-2}} = \boxed{\frac{1}{k-1}}$$

On reconnaît la loi ***uniforme*** sur $[\![1\,;\,k-1]\!]$.

Remarque : On peut aussi convenir : $\forall n \ge k,\ P\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty}(S=k)\Big) = 0$

3)

$$\forall n \ge 2,\ P(S\ge n) = P\Big(\bigcup_{k=n}^{+\infty}(S=k)\Big) = \sum_{k=n}^{+\infty} P(S=k) = \sum_{k=n}^{+\infty}(k-1)p^2(1-p)^{k-2} \overset{(1)}{=} p^2\sum_{k=n-1}^{+\infty} k\,(1-p)^{k-1}$$
$$= p^2\left[\sum_{k=n-1}^{+\infty} k\,x^{k-1}\right](x=1-p) = p^2\left[\sum_{k=n-1}^{+\infty}\left(x^k\right)'\right](x=1-p) \overset{(2)}{=} p^2\left[\sum_{k=n-1}^{+\infty} x^k\right]'(x=1-p)$$
$$\overset{(3)}{=} p^2\left[\frac{x^{n-1}}{1-x}\right]'(x=1-p) = p^2\,\frac{(n-1)x^{n-2}(1-x)+x^{n-1}}{(1-x)^2}(x=1-p)$$
$$= p^2\,\frac{x^{n-2}\big(n-1+(2-n)x\big)}{(1-x)^2}(x=1-p) = \boxed{(1-p)^{n-2}\big((n-2)p+1\big)}$$

- **(1)** Changement d'indices $k \longrightarrow k+1$
- **(2)** La série entière $\sum_{k\ge n-1} x^k$ de rayon $R=1$ peut se dériver terme à terme sur]-1,1[. On a bien $1-p \in]-1,1[$.
- **(3)** La somme ***étendue*** de la série géométrique, à savoir, est $\sum_{n=p}^{+\infty} x^n = \dfrac{x^p}{1-x}$.

4) La famille $\big((Z=k)\big)_{k\ge1}$ est un ***système complet*** d'événements. On applique la formule des probabilités totales :

$$P(S\ge Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\big((S\ge Z)\cap(Z=k)\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\big((S\ge k)\cap(Z=k)\big) \overset{(1)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(S\ge k)\times P(Z=k)$$
$$\overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-2}\big((k-2)p+1\big)(1-p)^{k-1}p = p^2\sum_{k=1}^{+\infty}(k-2)(1-p)^{2k-3} + p\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{2k-3}$$
$$\overset{(3)}{=} p^2\sum_{k=-1}^{+\infty} k(1-p)^{2k+1} + p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{2k-1} = \frac{-p^2}{1-p} + p^2(1-p)^3\sum_{k=0}^{+\infty} k\big((1-p)^2\big)^{k-1} + \frac{p}{1-p}\sum_{k=0}^{+\infty}\big((1-p)^2\big)^k$$
$$\overset{(4)}{=} \frac{-p^2}{1-p} + p^2(1-p)^3\left[\frac{1}{1-x}\right]'\big(x=(1-p)^2\big) + \frac{p}{1-p}\,\frac{1}{1-(1-p)^2}$$
$$= \frac{-p^2}{1-p} + p^2(1-p)^3\,\frac{1}{\big(1-(1-p)^2\big)^2} + \frac{1}{(1-p)(2-p)} = \frac{-p^2(2-p)^2+(1-p)^4+2-p}{(1-p)(2-p)^2} = \boxed{\frac{3-2p}{(2-p)^2}}$$

- **(1)** Par hypothèse X,Y,Z sont mutuellement indépendantes. On sait alors, par exemple, que ***toute*** fonction va $f(X,Y)$ est indépendante de ***toute*** fonction va $g(Z)$. En particulier $S=X+Y$ est indépendant de Z.
- **(2)** On applique la question précédente pour $P(S\ge k)$ et l'hypothèse $Z \sim \mathscr{G}(p)$.
- **(3)** Changement d'indices.
- **(4)** On réutilise la série géométrique et l'idée de la question précédente.

Ex 27 Soit X, Y deux vas discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et p.

1) Déterminez la loi conjointe de (X, Y).

2) Reconnaître la loi de Y.

1) On commence par remarquer que X, Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$: $(X \times Y)(\Omega) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Ensuite par définition des lois conditionnelles : $\forall n, m \in \mathbb{N},\ P(X = n, Y = m) = P\big((X = n) \cap (Y = m)\big) = P\big((Y = m) \mid (X = n)\big) \times P(X = n)$

Par définition, Y « *sachant* » $(X = n)$ suit une loi binomiale de paramètres n et p. Donc on peut considérer que, si $m > n$, alors $P\big((Y = m) \mid (X = n)\big) = 0$, et sinon, $\forall 0 \leq m \leq n,\ P\big((Y = m) \mid (X = n)\big) = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$. Comme $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$:

$$P(X = n, Y = m) = \boxed{\begin{cases} 0 & \text{si } m > n \\ e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!} \dbinom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} & \text{si } 0 \leq m \leq n \end{cases}}$$

2) La loi ***marginale*** de Y se calcule alors par la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\big((X = n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N},\ P(Y = m) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n, Y = m) \overset{(1)}{=} \sum_{n=m}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \\ &= e^{-\lambda} p^m \sum_{n=m}^{+\infty} \lambda^n \frac{1}{m!(n-m)!} (1-p)^{n-m} = e^{-\lambda} \frac{p^m \lambda^m}{m!} \sum_{n=m}^{+\infty} \lambda^{n-m} \frac{1}{(n-m)!} (1-p)^{n-m} \\ &\overset{(2)}{=} e^{-\lambda} \frac{p^m \lambda^m}{m!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n (1-p)^n}{n!} = e^{-\lambda} \frac{p^m \lambda^m}{m!} e^{\lambda(1-p)} = \boxed{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m!}} \end{aligned}$$

- **(1)** Attention ! la valeur est nulle pour $n < m$. Ne pas échanger ces 2 variables et ne pas se tromper de sens !
- **(2)** On a fait le changement d'indices « *translationnel* » $n \longrightarrow n + m$

On reconnaît que Y suit la loi de **Poisson**[2] de paramètre λp.

IMT PSI 2019 (loi conjointe et covariance)

Ex 29 On tire simultanément 2 cartes dans un jeu de 52 cartes. Chaque carte tirée rapporte sa valeur, le valet valant 11, la dame 12 et le roi 13. On note respectivement X et Y les variables aléatoires représentant la carte de plus basse et plus haute valeur tirée.

1) Déterminez la loi conjointe de (X, Y) et leur loi marginale.

2) Donnez la covariance de (X, Y).

1) $X(\Omega) \times Y(\Omega) = [\![1 ; 13]\!]^2$. Si $i > j,\ P(X = i, Y = j) = 0$. Il va falloir faire un peu de dénombrement. L'univers Ω de tous les sous-ensembles à 2 éléments parmi 52 cartes a immédiatement pour cardinal $\binom{52}{2}$:

- Le cas $i = j$ correspond au cas où on tire 2 valeurs identiques parmi les 4 couleurs soir $\binom{4}{2}$. A noter qu'on ***ne choisit pas*** la valeur (parmi 13) puisque la valeur est i donc choisie...

$$P(X = i, Y = i) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{52}{2}} = \frac{6}{\binom{52}{2}}$$

2. **Siméon Poisson** : mathématicien et physicien français (1781-1840)

- Le cas $i<j$ correspond au cas où on a choisi 1 valeur parmi 4 couleurs et 1 autre parmi 4. Ici, aussi les valeurs sont données par la donnée de i et j :

$$P(X=i,Y=j)=\frac{4^2}{\binom{52}{2}}$$

Remarque : On peut vérifier « *un minimum* » ses calculs de probas en évaluant si la somme vaut 1. Ici :

$$\sum_{1\le i,j\le 13}P(X=i,Y=j)=\sum_{i=1}^{13}P(X=i,Y=i)+\sum_{1\le i<j\le 13}P(X=i,Y=j)=\frac{6\times 13}{\binom{52}{2}}+\frac{13\times 12}{2}\frac{16}{\binom{52}{2}}=\frac{13\times(6\times 2+12*16)}{13\times 4\times 51}=1$$

$\big((Y=j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et par la formule des probabilités totale :

$$\forall i\in\mathbb{N},\ P(X=i)=\sum_{j=1}^{13}P(X=i,Y=j)=\frac{1}{\binom{52}{2}}\left(6+\sum_{j=i+1}^{13}16\right)=\boxed{\frac{1}{26\times 51}\big(6+16(13-i)\big)}$$

$$\forall j\in\mathbb{N},\ P(Y=j)=\sum_{i=1}^{13}P(X=i,Y=j)\frac{1}{\binom{52}{2}}\left(6+\sum_{i=1}^{j-1}16\right)=\boxed{\frac{1}{26\times 51}\big(6+16(j-1)\big)}$$

2) On $\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$$\begin{aligned}
E(X)&=\frac{1}{26\times 51}\sum_{i=1}^{13}i\,\big(6+16(13-i)\big)=\frac{1}{26\times 51}\left((6+16\times 13)\sum_{i=1}^{13}i-16\sum_{i=1}^{13}i^2\right)\\
&=\frac{1}{26\times 51}\left((6+16\times 13)\frac{13\times 14}{2}-16\,\frac{13\times 14\times 27}{6}\right)=\frac{13\times 14}{26\times 51}\left(3+8\times 13-8\times 9\right)=\frac{245}{51}\\
E(XY)&=\sum_{1\le i,j\le 13}i\,j\,P(X=i,Y=j)=\sum_{i=1}^{13}i^2\,P(X=i,Y=i)+\sum_{1\le i<j\le 13}i\,j\,P(X=i,Y=j)\\
&=\frac{1}{\binom{52}{2}}\left(6\sum_{i=1}^{13}i^2+16\sum_{1\le i<j\le 13}i\,j\right)=\frac{1}{\binom{52}{2}}\left(6\frac{13\times 14\times 27}{6}+16\sum_{i=1}^{13}i\sum_{j=i+1}^{13}j\right)\quad\text{assez maladroit car du } i^3!\\
&=\frac{1}{\binom{52}{2}}\left(6\sum_{i=1}^{13}i^2+8\Big(\sum_{1\le i\ne j\le 13}i\,j\Big)\right)=\frac{1}{\binom{52}{2}}\left(6\sum_{i=1}^{13}i^2+8\Big(\sum_{1\le i,j\le 13}i\,j-\sum_{i=1}^{13}i^2\Big)\right)\\
&=\frac{1}{\binom{52}{2}}\left(-2\sum_{i=1}^{13}i^2+8\Big(\sum_{i=1}^{13}i\Big)^2\right)=\frac{1}{\binom{52}{2}}\left(-2\,\frac{13\times 14\times 27}{6}+8\,\frac{13^2\times 14^2}{4}\right)\\
&=\frac{13\times 14}{26\times 51}\left(-9+2\times 13\times 14\right)=\frac{7\times 355}{51}=\frac{2485}{51}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\operatorname{Cov}(X,Y)=\frac{2485}{51}-\frac{245}{51}\times\frac{469}{51}=\frac{11830}{2601}}
\end{aligned}$$

Rappel sur le maniement d'indices et sommes : : $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}x_ix_j=\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i\ne j}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{i<j}x_ix_j$

Ex 34 Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $a,b\in\mathbb{N}$.

1) Exprimez G_{aX+b} en fonction de G_X.

2) Montrez $P\big(X \text{ pair}\big)=\frac{1}{2}\big(G_X(1)+G_X(-1)\big)$

---

1) On rappelle que $G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)t^n=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)f(n)$ avec $f(x)=t^x$. Le théorème de transfert nous donne alors $G_X(t)=E(f(X))=E(t^X)$. C'est du cours! Note : t^x existe bien car ici x prend des valeurs entières (on n'oublie pas que t peut être négatif et qu'une puissance réelle n'aurait pas de sens). Par suite :

$$G_{aX+b}(t)=E\Big(t^{aX+b}\Big)=E\Big(\underbrace{t^b}_{cste!}\ (t^a)^X\Big)=t^b\,E\Big(\big(t^a\big)^X\Big)=t^b\,G_X(t^a)$$

2) Les événements $(X=2n)$ sont clairement incompatibles et $P\big(X \text{ pair }\big)=P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X=2n)\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=2n)$. Puis :

$$\frac{1}{2}\big(G_X(1)+G_X(-1)\big)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)+\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)(-1)^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)\frac{\big(1+(-1)^n\big)}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=2n)$$

CCINP PSI 2021-2019-2018 (variable aléatoire $Z=X+Y+1$)

Ex 36 Soit X et Y 2 vas indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi et admettant un moment d'ordre 2 (cad $E(X^2)$ existe). On suppose que la variable $Z=X+Y+1$ suit une loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$.

1) Déterminez l'espérance et la variance de X. [**201x :** Pas la variance] .

2) Calculez la fonction génératrice de X.

3) En déduire la loi de X. [**201x :** Reconnaître la loi] .

1) Par ***linéarité*** de l'espérance, $E(Z)=E(X)+E(Y)+E(1)=2E(X)+1=\frac{1}{p}$, puisque X et Y suiven la même loi. L'indépendance ne sert pas ici. On en tire $\boxed{E(X)=\dfrac{1-p}{2p}}$

Par ***indépendance***, pour la variance on écrit $V(Z)=V(X)+V(Y)=2V(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$, d'où $\boxed{V(X)=\dfrac{1-p}{2p^2}}$

2)

$$\begin{aligned}G_Z(t)&\overset{(1)}{=}\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{n-1}pt^n=pt\sum_{n=1}^{+\infty}\big((1-p)t\big)^{n-1}\overset{(2)}{=}\frac{pt}{1-(1-p)t}\\&\overset{(3)}{=}E\big(t^{X+Y+1}\big)\overset{(4)}{=}E\big(t^X\,t^Y\,t\big)\overset{(5)}{=}t\,E(t^X)\,E(t^Y)=t\,\big(G_X(t)\big)^2\end{aligned}$$

- **(1)** On calcule la fonction génératrice d'une va géométrique de paramètre p
- **(2)** Ici, on a bien ***tous*** les termes de la série géométrique
- **(3)** On calcule d'une autre façon, $G_Z(t)=E(t^Z)$ est du cours
- **(4)** Ces propriétés de « *puissance* » sont valides pour t quelconque, même $t\le 0$, car X,Y sont à valeurs entières.
- **(5)** Propriété de l'espérance due à la linéarité (on sort le t) et à l'indépendance de $f(X)$ et $g(Y)$ pour tous f,g (c'est du cours, lemme des coalitions pour 2). Ici $f(x)=g(x)=t^x$

On en déduit $\boxed{G_X(t)=+\sqrt{\dfrac{p}{1-(1-p)t}}}$. le + est justifié (plutôt que le −) car la fonction génératrice est ≥ 0 pour $t\ge 0$ (comme toute va à valeur entière, je vous laisse y réfléchir)

3) En se rappelant $G_X(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=n)t^n$, on peut « *retrouver* » le coefficient $P(X=n)$ par un développement en série entière (on pourrait aussi théoriquement par $\frac{1}{n!}(G_X(t))^{(n)}(0)$, cours sur les séries entières, mais c'est moins usité). Je rappelle le développement en série entière de la « *racine* » $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et ses différentes écritures (essayez de les comprendre), sur $]-1,1[$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\big(1+x\big)^{-1/2}&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}\big(-\frac{1}{2}-1\big)\big(-\frac{1}{2}-2\big)\dots\big(-\frac{1}{2}-n+1\big)}{n!}\,x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}\big(-\frac{3}{2}\big)\big(-\frac{5}{2}\big)\dots\big(-\frac{2n-1}{2}\big)}{n!}\,x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(2n-1)!!}{2^n\,n!}\,x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2n)!}{\big((2n)(2n-2)\dots2\big)\,2^n\,n!}\,x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,x^n\end{aligned}$$

Pour remarque, cette formule s'écrit aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} x^n$ (regardez la formule du haut pour comprendre ce coefficient binomial), elle s'appelle d'ailleurs formule du ***binôme négatif***, mais elle n'est pas du tout à votre programme. A votre programme stricto-sensu, pour un coefficient binomial $\binom{n}{p}$, vous devez avoir n, p entiers positifs et $0 \le p \le n$. Revenons à notre exo :

$$G_X(t) = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \big(-(1-p)t\big)^n = \sqrt{p} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\, t^n$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit $\boxed{P(X=n) = \dfrac{\sqrt{p}\,(1-p)^n\,(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}}$

Ex 39 Soit (X_n) une suite de va à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes suivant une même loi qu'une va X.

1) On pose $S = \sum_{k=1}^{n} X_i$. Montrez $G_S(t) = G_X(t)^n$.

2) N est aussi une va entière discrète. On pose ici, pour $\omega \in \Omega$, $S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$. Montrez $G_S = G_N \circ G_X$ (sur [0,1]).
On appliquera la formule des probas totales.

3) On suppose que X et N a mettent une espérance. Montrez S aussi et la calculer. Idem avec la variance.

---

1) Le cours nous donne que si X et Y sont 2 va ***indépendantes*** (discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$), alors $G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$. Je vous le redémontre en rappelant qu'une fonction génératrice d'une va est définie sur (au moins) [-1,1] et que l'on a $\forall t \in [-1,1]$, $G_X(t) = E(t^X)$. On écrit donc, en n'oubliant pas que alors les va t^X et t^Y sont indépendantes :

$$\forall t \in [-1,1],\ G_{X+Y}(t) = E\Big(t^{X+Y}\Big) = E\Big(t^X \times t^Y\Big) = E\Big(t^X\Big) \times E\Big(t^Y\Big) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

Je rappelle aussi que ***si*** U, V sont indépendantes, alors $E(UV) = E(U)E(V)$. En revenant à l'exo, par récurrence de 2 à k, comme les va X_i sont indépendantes :

$$\forall t \in [-1,1],\ G_S(t) = G_{X_1+\cdots+X_n}(t) = G_{X_1}(t) \times \cdots \times G_{X_n}(t) = \Big(G_X(t)\Big)^n$$

Toutes les vas X_i ayant même loi que X, $G_{X_i} = G_X$.

2)

Ex 41 Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Utilisez la fonction génératrice de X pour calculer $E(X^3)$.

On calcule immédiatement :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$$

$R = +\infty$, G_X est donc trois fois dérivable en 1, en dérivant terme à terme. On calcule de 2 façons en utilisant le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
G_X'(1) &= \left[\lambda e^{\lambda(t-1)}\right](t=1) = \lambda && = \sum_{n=0}^{+\infty} n\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}1^n = E(X)\\
G_X''(1) &= \left[\lambda^2 e^{\lambda(t-1)}\right](t=1) = \lambda^2 && = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}1^n = E(X(X-1))\\
G_X'''(1) &= \left[\lambda^3 e^{\lambda(t-1)}\right](t=1) = \lambda^3 && = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\ e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}1^n = E(X(X-1)(X-2))
\end{aligned}$$

Ensuite, on décompose le polynôme X^3 dans la base $\big(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\big)$: on résout le système $X^3 = \alpha X(X-1)(X-2) + \beta X(X-1) + \gamma X + \delta$, je ne mets pas les détails :

$$\begin{aligned}
& X^3 = X(X-1)(X-2)\ + 3X(X-1)\ + X\\
\Longrightarrow\ & E(X^3) = E\big(X(X-1)(X-2)\big) + 3E\big(X(X-1)\big) + E\big(X\big) = G_X'''(1) + 3G_X''(1) + G_X'(1) = \boxed{\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda}
\end{aligned}$$

Remarque : Il est tout à fait possible de calculer directement $E(X^3)$ par la formule de transfert $\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ mais ce n'était pas la démarche demandée par l'énoncé.