Classe de PSI

Feuille
d'Exercices 9
Variables aléatoires

Lois de Probabilités / Espérances

Lois Usuelles :
- ***Bernoulli :*** $X \sim \mathscr{B}(p)$: $X(\Omega) = \{0,1\}$ $P(X=1) = p$ $P(X=0) = 1-p$ $E(X) = p$ $V(X) = p(1-p)$
- ***Binomiale :*** $X \sim \mathscr{B}(n,p)$: $X(\Omega) = [[1;n]]$ $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ $E(X) = np$ $V(X) = np(1-p)$
- ***Géométrique :*** $X \sim \mathscr{G}(p)$: $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ $P(X=n) = (1-p)^{n-1}p$ $E(X) = \frac{1}{p}$ $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- ***Poisson :*** $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$: $X(\Omega) = \mathbb{N}$ $P(X=n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ $E(X) = \lambda$ $V(X) = \lambda$

Espérance :
• Si X est une va ≥ 0, ***à valeurs dans*** $[0,+\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, on appelle espérance de X et on note :
$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$ qui est alors ou un réel ≥ 0 ou $+\infty$.
• Si X est une va ***quelconque*** complexe, on dit que X est dite ***d'espérance finie*** ssi la famille $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est ***sommable***. On note alors $E(X)$ la somme de cette famille et on a aussi $E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$

Théorème de Transfert : Si X est une va ***discrète*** à valeurs dans E et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors la va $f(X)$ est dite ***d'espérance finie*** ssi la famille $(f(x)\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est ***sommable*** et on a : $E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x)$

Variance : Si X est une va telle que X^2 est ***d'espérance finie***, on appelle variance de X et on note $V(X) = E((X-E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$ (on dit X est de variance finie)

Ex 1 ✌On lance 4 fois de suite une pièce. Soit X le nbre de fois qu'apparaît la séquence PF. Déterminez loi de X.

Ex 2 ✍ ✌Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Montrez que la probabilité que X soit paire est plus forte que X impaire.

Ex 3 ✍

1) Etablir $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$. (formule de Vandermonde) (*Utilisez* $(1+X)^{n+m} = (1+X)^n\,(1+X)^m$)

2) Soient X, Y deux vas tq $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$. Peut-on reconnaître la loi de $X+Y$?

Ex 4 Un livre contient 5 erreurs. A chaque relecture, la probabilité qu'une erreur soit détectée est de $\frac{1}{3}$.

1) On fait une seule relecture. Soit X le nombre d'erreurs non corrigées. Donnez sa loi.

2) On fait n relectures indépendantes et on note X_n le nombre d'erreurs non corrigées. Loi de X_n ?

3) Déterminez n pour qu'en n lectures, la probabilité qu'il ne reste aucune erreur dépasse 90%.

CCPBQ MP 2021->2015 (loi du r^e succès)
Ex 5
On admet que $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k\geq q}\binom{k}{q}x^{k-q}$ converge et $\forall x \in \left]-1,1\right[$, $\sum_{k=q}^{+\infty}\binom{k}{q}x^{k-q}=\dfrac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$. On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t=0$. Toutes les secondes à partir de $t=1s$, on envoie un rayon laser dans l'enceinte. Chaque tir laser est indépendant du précédent et la bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser. La bactérie meurt lorsqu'elle a été touchée $r=3$ [**MP :** r **quelconque**] fois par le rayon laser. Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1) Déterminez la loi de X.

2) Prouvez que X admet une espérance et la calculer

Ex 6 ✌Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Vérifiez l'existence et calculez $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$

Ex 7 ✍ ✌D'un jeu de 32 cartes, on tire une à une des cartes avec remise, jusqu'à obtenir un as.

1) Soit X le nombre de tirages. Donnez la loi de X et calculez $E(X)$.

2) Soit Y le nombre de cartes autres qu'un as qu'il aura fallu tirer pour obtenir le 1er As. Exprimez Y en fonction de X. en déduire la loi de Y et calculez $E(Y)$.

Mines-Ponts PSI 2018 (probabilité matrice de projecteur)
Ex 8 Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une famille de variables i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p. On considère la matrice aléatoire $M=(X_iX_j)_{1\leq i,j\leq n}$.

1) Donnez la loi du rang et de la trace de M.

2) Quelle est la probabilité que M représente un projecteur?

Ex 9 ✌Une composante électronique produit en moyenne 1 erreur par 100000 heures. Quelle est la probabilité d'une erreur si la pièce fonctionne 20000 heures?

Mines-Ponts PSI 2022 (matrice aléatoire 2×2) ✷✍
Ex 10 Soient X_1, X_2 2 vas indépendantes suivant les lois de Poisson de paramètres respectifs λ_1 et λ_2. Soit Y une va indépendante des2 autres tq $Y(\Omega)=\{-1,1\}$ et $P(Y=1)=p\in\left]0,1\right[$. On pose $M=\begin{pmatrix} X_1 & X_2\\ YX_2 & X_1\end{pmatrix}$

1) Probabilité que M soit inversible?

2) Probabilité que les vp de M soient réelles?

3) Probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Ex 11 ✍ Soit X, Y deux va discrètes et indépendantes qui suivent la même loi géométrique de paramètre p.

1) Déterminez $P(X>n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

2) En déduire $P(Z>n)$ et la loi de $Z=\min(X,Y)$. Reconnaître la loi de Z.

Centrale PSI 2021 (limite suite espérance de vas) ✷✍
Ex 12 Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de vas de loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

1) Pour $t\in\mathbb{R}$, justifiez $\exp(tX_n)$ admet une espérance et la calculer. Mz $E(\exp(tX_n))\leq e^{t^2/2}$ pour $(n,t)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}$.

2) justifiez que $\exp(tS_n)$ admet une espérance et la calculer. Déterminez $\lim_{n\to+\infty}E\big(\exp(tS_n/\sqrt{n})\big)$.

IMT PSI 2022 (deux piles consécutifs) ✷✍
Ex 13 On lance une pièce donnant pile avec une probabilité $\frac{2}{3}$. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux piles consécutifs. On pose $a_n=P(X=n)$

1) Calculez a_1 et a_2.

2) A l'aide des formules de probabilités totales, montrez $a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{2}{9}a_{n-2}$.

3) Montrez que le jeu se termine presque sûrement.

4) L'espérance de X est-elle finie? Si oui, la calculer.

Mines-Ponts PSI 2022 (longueur des deux 1re suites identiques) ✷

Ex 14 On effectue une infinité de lancers indépendants avec une pièce qui donne pile avec probabilité $p \in \left]0,1\right[$. Soit X la longueur de la première suite identique et Y de la seconde : par exemple pour le tirage $PPPFFP\dots$ (ou $FFFPPF\dots$), on a $X=3$ et $Y=2$.

1) Soient $m,n\in\mathbb{N}^*$. Montrez que $(X=m,Y=n)$ est un événement et calculez sa probabilité. On pourra utiliser les événements P_n:« *le n-ième tirage donne pile* »

2) Montrez que X est une va et précisez sa loi.

3) Montrez que la variable X admet une espérance et la calculer.

4) Déterminez la loi de Y et calculez son espérance. Comparez les espérances de$X$ et Y selon la valeur de p.

Ex 15 ✍ Lors d'une compétition, les candidats portent des dossards numérotés de 1 à n et chacun tire un rang de passage entre 1 et n. Plusieurs candidats peuvent se trouver sur la même ligne de départ. A la fin du tirage, si un au moins des candidats a le même numéro de passage que son dossard, on annule le tirage et on recommence. On appelle X_n le nombre de fois qu'il a fallu procéder aux tirages.

1) Reconnaître X_n. Donnez son espérance.

2) Pour tout entier k, on pose $P\big(Y=k\big)=\lim\limits_{n\to+\infty}P\big((X_n=k)\big)$. Reconnaitre Y. Interpréter.

Mines-Ponts PSI 2021 (min et max de variables aléatoires géométriques) ✷✍

Ex 16 Soient $0<p<1$ et (X_n) une suite i.i.d. de vas suivant la loi géométrique de paramètre p.

1) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $Y_n=\min(X_1,\dots,X_n)$. Déterminez la loi puis l'espérance de Y_n.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, soit $Z_n=\max(X_1,\dots,X_n)$. Déterminez la loi de Z_n, puis un équivalent de $E(Z_n)$ quand $n\longrightarrow+\infty$.

IMT PSI 2017 (calcul espérance) ✌✍

Ex 17 Soient $n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}$ et X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant $\forall 0\le k\le n,\ P(X=k)=a\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}$.

1) Déterminez la valeur de a.

2) Déterminez l'espérance et la variance de X.

Ex 18 Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombres de boules rouges obtenues lors de ce tirage. Quelle est la loi de X? son espérance? sa variance? (utilisez la formule du 8)

CCPBQ MP 2023->2015 (calcul d'espérance et de variance) ✌

Ex 19

Soit $\lambda>0$. Soit X une va discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(X=n)=\dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $R(x)=\frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

2) Calculez λ.

3) Prouvez que X admet une espérance et la calculer.

4) X admet-elle une variance? Justifiez.

Ex 20 Une urne contient 3 boules numérotées. On tire avec remise une boule dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir les 3 boules, Y_i le nombre de tirages pour obtenir la boule i.

1) Exprimez X en fonction des Y_i, puis $(X>n)$ en fonction des Y_i.

2) En déduire $P\big((X>n)\big)$ puis la loi de X.

3) Calculez l'espérance de X. Interprétation?

Ex 21 Chez un marchand, on peut acheter des pochettes, chacune contenant une image d'un joueur de football. La collection complète comporte N images disctinctes de joueurs de foot. On note X_k la va comptant le nombre d'achats ayant permis d'obtenir k images distinctes.

1) Que vaut X_1 ?

2) Déterminez la loi de la va $X_{k+1}-X_k$.

3) En déduire l'espérance de X_N. Qu'en déduit-on?

Centrale PSI 2018 (espérance de $\frac{1}{X}$) ✷

Ex 22 Soit X une variable aléatoire vérifiant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

1) Montrez que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie

2) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p < 1$. Montrez que $\frac{1}{E(X)} \leq E\left(\frac{1}{X}\right)$.

3) Montrez cette inégalité dans le cas général.

Ex 23 ✍ ✷ Soit $(X_n)_n$ une suite de va de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie et N une va à valeurs dans $[\![0\,;k]\!]$. On suppose les va $X_0, \dots, X_n, Z$ mutuellement indépendantes. On définit une va Y par $Y = \sum_{i=0}^{N} X_i$.

1) Montrez que Y est d'espérance finie.

2) Calculez $E(Y)$ en fonction de $E(X_0)$ et $E(N)$.

Ex 24 ✍ Soit X, Y, Z 3 variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi $\hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

1) Déterminez la loi de la somme $S = X + Y$.

2) Déterminez la loi conditionnelle de X sachant $(S = k)$, avec $k \in S(\Omega)$.

3) Pour $n \in S(\Omega)$ calculez $P\big((S \geq n)\big)$.

4) Déterminez $P\big((S \geq Z)\big)$, $P\big((S \leq Z)\big)$ et $P\big((S = Z)\big)$.

Ex 25 $X \sim \mathcal{G}(a)$ et $Y \sim \mathcal{G}(b)$. On les suppose indépendantes.

1) $Z = Y - X$. Loi de Z?

2) On pose $T = 1$ si $X \leq Y$ et $T = 0$ sinon. Covariance de Z et T?

Ex 26 Les Barres d'admissibilité du concours sont tombées. Jean consulte les résultats à partir de son ordinateur etarrive à se connecter au site 1 fois sur 10. Julie consulte les résultats à partir de son smartphone et arrive à se connecter 1 fois sur 5. X est le nombre de tentatives de connexion de Jean et Y celles de Julie.

1) ✌Déterminez les lois de X et Y, espérance et variance.

2) Déterminez la loi de $X + Y$, espérance et variance.

3) ✷ Probabilité pour que Jean se connecte après Julie?

Couples de Variables Aléatoires

Ex 27 ✍ Soit X, Y deux va discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et p.

1) Déterminez la loi conjointe de (X, Y).

2) Reconnaître la loi de Y.

Ex 28 Soit X, Y deux va discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie $P\big(X = j, Y = k\big) = a\,\dfrac{j+k}{2^{j+k}}$ avec a réel.

1) Déterminez a.

2) Déterminez les lois marginales de X et Y. Les va X et Y sont-elles indépendantes?

3) Calculez $P\big((X = Y)\big)$.

IMT PSI 2019 (loi conjointe et covariance) ✍

Ex 29 On tire simultanément 2 cartes dans un jeu de 52 cartes. Chaque carte tirée rapporte sa valeur, le valet valant 11, la dame 12 et le roi 13. On note respectivement X et Y les variables aléatoires représentant la carte de plus basse et plus haute valeur tirée.

1) Déterminez la loi conjointe de (X, Y) et leur loi marginale.

2) Donnez la covariance de (X, Y).

ENTPE-EIVP PSI 2015 (loi conjointe $(\max, \min)$ *de vas indépendantes)* ✷✍

Ex 30 Deux va indépendantes X et Y suivent la loi donnée par $P(X = k) = P(Y = k) = p(1-p)^k$, $p \in [0, 1]$

1) Donnez la loi conjointe de $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$, puis en déduireles lois de U et V. sont-elles indépendantes?

2) Donnez la loi de $S = U + V$. Admet-elle une espérance?

Ex 31 On suppose que le nombre N d'enfants d'une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A chaque naissance, on suppose que la probabilité que l'enfant soit une fille est $0 < p < 1$ et que les « *sexes des naissances* » successives sont indépendants. On note X le nombre de filles par famille et Y le nombre de garçons.

1) Déterminez loi conjointe du couple (N, X).

2) Quelle est la loi de X ? de Y ?

Mines-Ponts PSI 2018 (urne et séries de même couleur) ✷

Ex 32 Une urne contient une proportion de p boules blanches et $1-p$ de boules noires. On effectue des tirages avec remise. On note X le nombre de boules de même couleur tirées successivement au départ et Y le nombre de boules de même couleur tirées successivement lors de la seconde série. Par exemple, si on obtient $BBBNNB\ldots$, alors $X = 3$ et $Y = 2$.

1) Donnez la loi conjointe de (X, Y).

2) Déterminez la loi, l'espérance et la variance de X.

3) Même question avec Y.

Séries Génératrices

Définition : Pour toute va X ***à valeurs dans*** $\mathbb{N}$, on définit sa ***fonction génératrice*** notée G_X par la somme de la série entière : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\big(X = n\big)\, t^n \;=\; E\big(t^X\big)$

Cette série entière a un rayon $R \geq 1$ et G_X est définie, continue sur au moins $\big[-1, 1\big]$, C^∞ sur au moins $\big]-1, 1\big[$

Théorème : La va X a une ***espérance*** (finie) ssi G_X ***est dérivable en 1***, et alors : $E(X) = G_X'(1)$.

La va X a une variance finie ssi G_X est ***2 fois dérivable en 1*** et : $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \big(G_X'(1)\big)^2$

Ex 33 ✌ Calculez la fonction génératrice d'une va $X \sim \mathscr{G}\big(p\big)$.

Ex 34 ✌✍ Soit X une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{N}$.

1) Exprimez G_{aX+b} en fonction de G_X.

2) Montrez $P\big(X \text{ pair}\big) = \frac{1}{2}\big(G_X(1) + G_X(-1)\big)$

Ex 35 On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $0 < p < 1$ de réussir et $1-p$ d'échouer. On répéte l'expérience indépendamment jusqu'à l'obtention de m succès et on note X le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

1) Donnez la loi de X pour $m = 1$

2) Donnez la loi de X dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.

3) Donnez le DSE de $\dfrac{1}{(1-t)^m}$.

4) Calculez la fonction génératrice de X puis son espérance.

CCINP PSI 2021-2019-2018 (variable aléatoire $Z = X + Y + 1$) ✍

Ex 36 Soit X et Y 2 vas indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et de même loi et admettant un moment d'ordre 2 (cad $E(X^2)$ existe). On suppose que la variable $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1) Déterminez l'espérance et la variance de X. [**201x :** Pas la variance] .

2) Calculez la fonction génératrice de X.

3) En déduire la loi de X. [**201x :** Reconnaître la loi] .

Mines-Ponts PSI 2022 (min de 2 vas géométriques) ✷

Ex 37 Soient X, Y 2 vas indépendantes suivant de même loi géométrique de paramètre p.

1) Déterminez la loi de la variable $T = \min(X, Y)$. Précisez son espérance et sa fonction génératrice.

2) Montrez que la va $\frac{1}{T(T+1)}$ admet une espérance finie puis la calculer.

Mines-Ponts PSI 2022 (proba du n-ième succès)

Ex 38

On effectue une infinité de lancers indépendants avec une pièce qui donne pile avec une probabilité $p \in \left]0,1\right[$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez l'événement {on obtient au moins n pile} est certain. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit X_n la va correspondant au nombre de lancers nécessaires pour obtenir n piles. On pose $Y_1 = X_1$ et, pour $n \geq 2$, $Y_n = X_n - X_{n-1}$.

2) déterminez la loi de variable Y_n et précisez sa fonction génératrice.

3) En déduire la fonction génératrice de X_n puis la loi de X_n.

Ex 39 ✷ Soit (X_n) une suite de va à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes suivant une même loi qu'une va X.

1) On pose $S = \sum_{k=1}^{n} X_i$. Montrez $G_S(t) = G_X(t)^n$.

2) N est aussi une va entière discrète. On pose ici, pour $\omega \in \Omega, S(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega)$. Montrez $G_S = G_N \circ G_X$ (sur $[0,1]$).

On appliquera la formule des probas totales.

3) On suppose que X et N a mettent une espérance. Montrez S aussi et la calculer. Idem avec la variance.

Ex 40 Soient X, Y 2 va indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre a et $Z = X + 3Y$.

1) Déterminez la fonction génératrice de Z.

2) Trouvez espérance et variance de Z de 2 façons.

Ex 41 Soit $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. Utilisez la fonction génératrice de X pour calculer $E(X^3)$.