Feuille d'Exercices 9

Séries entières

Rayons de Convergence

Définition du Rayon de Convergence : On appelle ***rayon de convergence*** de la série entière $\sum a_n z^n$ et on note R la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de $\{r \geq 0,$ la ***suite*** $a_n r^n$ est bornée$\}$. Ce réel $R \geq 0$ ou $R = +\infty$ vérifie :
- Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ ***converge absolument***.
- Si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ ***diverge grossièrement***.

Rayon de convergence d'une Somme : Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a, R_b, alors le rayon de convergence R de la ***série entière somme*** $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie :
- Si $R_a = R_b$, $\quad R \geq \inf(R_a, R_b) = R_a = R_b$.
- Si $R_a \neq R_b$, $\quad R = \inf(R_a, R_b)$.

Rayon de convergence du Produit de Cauchy :
Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a, R_b, alors le rayon de convergence R de la ***série entière produit de Cauchy*** définie par $\sum c_n z^n$ avec $\forall\, n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ vérifie $R \geq \inf(R_a, R_b)$.

Ex 1 Calculez le rayon de convergence :

$$✌ \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2} z^n \qquad ✌ \sum_{n\geq 1} \frac{\cosh n}{\sinh^2 n} z^n ✍ \qquad \sum_{n\geq 1} n^{\sqrt{n}} z^n \qquad ✌ \sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n+1}}{7^n} \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n} z^n ✍ \qquad \sum_{n\geq 0} z^{n!} ✍$$

$$\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) z^n \qquad \sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \frac{z^n}{n} ✍ \qquad ✷ \sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 t^n (1-t)^n \,\mathrm{d}t\right) z^n \qquad \sum_{n\geq 1} n!\, z^{n^2} \qquad \sum_{n\geq 1} 2^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$$

Ex 2 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. ✍

1) ✌ Rayon de convergence de la série entière $\sum |a_n| z^n$?, $\sum a_n z^{2n}$?

2) En utilisant $R = \sup\{|x|,\ a_n x^n \longrightarrow 0\}$, donnez le rayon de convergence de $\sum a_{2n} z^n$

CCP PSI 2010 (calcul de rayon de convergence) ✌ ✍

Ex 3 Déterminer, suivant $a \in \mathbb{R}$, le rayon de convergence de la série entière de terme général $\arctan(n^a) x^n$.

Mines-Ponts PC 2016 (rayon d'une série entière)

Ex 4 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $a_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$.

1) Nature de la série de terme général a_n ? De la série de terme général $(-1)^n a_n$?

2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Ex 5 ***D'Alembert à « tranches »***. Rayon de conv. de $\sum a_n z^n$ tq $\lim \left|\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right| = 1$ et $\lim \left|\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}\right| = 2$?

Mines-Ponts PSI 2015 (rayon d'une série entière) ✷ ✍

Ex 6 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \operatorname{tr}(A^k) z^k$.

Mines-Ponts PC 2015 (rayon d'une série entière)

Ex 7 Rayon de convergence de la série entière $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^n}{3^{n^2}} x^n$?

IMT PSI 2022 (calcul rayon de convergence)

Ex 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite (d_n) définie par $d_n = \dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

1) Trouvez une relation de récurrence entre d_n et d_{n+1}

2) Montrez par récurrence $d_n \leq 2$.

3) En conclure la convergence de (d_n).

4) Donnez le rayon de la série entière $\sum d_n x^n$.

Ex 9 On suppose que les deux séries entières $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ ont même rayon R. Montrez que la série entière $\sum a_n z^n$ a aussi pour rayon de convergence R.

Mines-Ponts PSI 2016 (rayon de convergence)

Ex 10 Déterminez le rayon de convergence de la série entière de terme général $(3+(-1)^n)^n x^n$.

Etude de Fonctions-Somme

Théorème de convergence normale : Soit une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R. Alors la série de fonctions converge ***normalement, donc uniformément*** sur tout ***segment*** $[a,b]$ de $]-R,R[$.

Théorème de dérivabilité : Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R.
Alors S est ***continue, dérivable et même*** C^∞ sur l'intervalle ***ouvert*** $]-R,R[$ et on peut ***dériver terme à terme*** :

$$\forall x \in]-R,R[, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad S^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1)\, x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p}$$

Théorème de primitivation : Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence R.
Alors S admet pour primitives sur $]-R,R[$ les séries entières $K + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Ex 11 Déterminez l'intervalle de définition et de continuité des fonctions suivantes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Ex 12 On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$. En considérant $g(x) = (1-x)f(x)$, établir que la limite à droite de f en -1 existe et est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$.

CCINP PSI 2022 (série entière)

Ex 13 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_{kn} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ et $a_n = \dfrac{n!}{n^{n+1}}$.

1) Montrez que I_{kn} est bien définie.

2) Calculez I_{kn}

3) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} a_n x^n$?

4) Montrez l'égalité $\forall x \in]-R,R[$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx}\,\mathrm{d}t$.

CCP PSI 2022-2019-2008 (série entière à terme intégral)

Ex 14 On considère la suite (u_n) dont le terme est $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. [**2008 :** Juste calculez rayon et somme] .

1) Montrez il existe 3 réels a,b,c tels que $\forall x \in]-R,R[, \forall t \in [0,1], \frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{at+b}{t^2+1} + \frac{c}{1-tx}$.

2) [**2019 :** Rappelez la définition du rayon de convergence.]

3) Donnez le rayon de la convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

4) Calculez $S(x)$ pour $x \in]-R,R[$.

5) Etudiez la limite de S en $-R$

5) [**2019 :** Montrez que $S(-1)$ existe et le calculer] .

Ex 15 On note d_n le nombre de permutations sans points fixes de $[\![1;n]\!]$ (dérangements). Par convention $d_0 = 1$.

1) Calculez d_1, d_2, d_3 et montrez, par partitionnement selon les points fixes, que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = n!$.

2) Montrez $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ définie sur $]-1,1[$, puis $e^x f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. (*Utilisez un produit de Cauchy*).

CCP PSI 2006 (calcul de somme)

Ex 16 Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(1-x)^n}{n} + \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$.

1) Déterminer le domaine de définition de $S(x)$.

2) Calculer $S(x)$.

Ex 17

1) ✌ Montrez $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ prolongeable en une fonction C^∞ sur $]-1,1[$

2) En déduire $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ prolongeable en une fonction C^∞ sur $]0,+\infty[$ notée $\widetilde{\varphi}$. Précisez $\widetilde{\varphi}(1)$ et $\widetilde{\varphi}'(1)$.

Mines-Ponts PSI 2012 | Mines-Ponts PC 2013 (équivalent série entière) ✷ ✍

Ex 18 Soit $f\colon x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n) x^n$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que la suite de terme général $\ln n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ a une limite dans $\mathbb{R}$.

3) Déterminer la limite de f en 1^-.

4) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

Mines-Ponts PSI 2018 (équivalent série entière lacunaire) ✷ ✷ ✍

Ex 19

1) Précisez le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2^n}$.

2) Montrez que $f(x) \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow 1$ et donnez un équivalent de f en 1.

Centrale PSI 2022 (équivalent série entière) ✷ ✍

Ex 20

1) Donnez un exemple de série entière de rayon égal à 1 dont la somme est définie et majorée sur $[0,1]$.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière et f la fonction somme associée.

2) On suppose $na_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

(a) Montrez f définie sur $]-1,1[$.

(b) Montrez $f(x) = o(\ln(1-x))$ quand $x \longrightarrow 1_-$.

3) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n^2+1}\, x^n$. Déterminez un équivalent au voisinage de 1 à l'aide de Q2.

Mines-Ponts PSI 2022 (dérivabilité en 1 série entière positive) ✷

Ex 21 Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière à termes positifs tq $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

1) Montrez f continue et dérivable sur $[0,1[$.

2) Montrez f continue sur $[0,1]$.

On suppose maintenant f dérivable en 1.

3) Montrez que f' croissante sur $[0,1[$ et bornée sur $[0,1]$.

4) Soit $N \geq 1$. Montrez que $\sum_{n=0}^{N} na_n \leq f'(1)$.

5) En déduire que $f'(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n$.

Ex 22 Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon $R = 1$. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1) Montrez que le rayon de convergence de g est 1.

2) Pour tout $x \in]-1,1[$, exprimez $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

CCP PSI 2018 (série entière $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$) ✍

Ex 23 Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.

1) Calculez le rayon de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$.

2) Montrez l'existence de $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et la calculer.

3) Quand elle existe, on note f la somme de la série $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$; montrez que $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Ex 24 ✍ Soit (a_n) une suite complexe telle que la série entière de la var. complexe $\sum a_n z^n$ ait un rc. $R>0$.

1) Montrez que le rayon de convergence de $F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}z^n$ est $+\infty$

2) ✷ Montrez Intégrale définie pour tout $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z|<R$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t}F(zt)dt=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n$

Mines-Ponts PSi 2014 (équivalent série entière) ✷

Ex 25 Soit $(a_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n\sim n$. On pose $f\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence de f.

2) Montrer que $f(x)$ est équivalente à $\frac{1}{(1-x)^2}$ quand $x\to 1^-$.

Ex 26 ✍ ✷ Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R>0$ telle que la série numérique $\sum a_n R^n$ converge. Etablir que la fonction-somme $f(x)$ est continue en R. On prendra $R=1$ et utilisera, après l'avoir démontré,

$$\forall x\in[0,R[\quad f(x)=S-\sum_{n=0}^{+\infty}R_n(x^n-x^{n+1}).\qquad (\textit{Transformation d'}\textbf{Abel}^1)$$

où S,R_n désignent la somme et le reste d'ordre n associés à $\sum a_n$. Montrez que la réciproque est fausse.

Calcul de Sommes

Ex 27 Calculez la Somme des séries entières (ou séries numériques suivantes) sur $]-R,R[$:

✌ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$ ✍ ✌ $\sum_{n=0}^{+\infty}(n^2+7n-2)\,x^n$ ✌ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{n(n+1)}$ ✍ $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n}{n(n-1)5^n}$ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+5}{n+3}\,\frac{x^n}{n!}$ ✍

✌ $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n}\,x^{4n-1}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$ $\sum_{n=0}^{+\infty}\cos(n\theta)\;x^n$ ✍ ✌ $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{(-1)^n}\,x^n$ ✷ $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}$

CCP PSI 2013-2011 (série entière à terme à récurrence linéaire) ✍

Ex 28 Soit (u_n) définie par $u_0=0,u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.

1) Exprimez u_n en fonction de n.

2) Déterminez le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $u_n z^n$.

✍

Ex 29 On se donne une série entière $\sum a_n x^n$ telle que $a_{3p}=0$ $a_{3p+1}=2^{2p+1}$ $a_{3p+2}=3^p$ $(p\in\mathbb{N})$ Donnez le rayon de convergence et calculez la somme de la série.

IMT PSI 2022 (rayon somme série entière) ✌

Ex 30 Rayon de convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2n+1}$

Ex 31 On pose $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n$ de rayon R.

1) Calculez en fonction de f, $\sum_{n=2}^{+\infty}a_{n-1}x^{n+2}$ $\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n+1}x^{2n}$ $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_{n+3}x^{3n+4}$, $\sum_{n=2}^{+\infty}(n+2)a_{n-1}x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}x^{2n+1}$

2) En se servant adroitement de $1^n+(-1)^n$, exprimez de même $\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n}x^{2n}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}a_{2n+1}z^{2n+1}$ avec f.

3) ✷Calculez $1^n+j^n+j^{2n}$ et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Mines-Ponts PSI 2014 (calcul de somme) ✷ ✍

Ex 32 On considère la fonction $f\colon x\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}(\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,\mathrm{d}t)x^n$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Exprimer f à l'aide de fonctions usuelles.

Ex 33 ✍ Soit $A\in\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3=-A$. Convergence et somme de $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{tr}(A^n)x^n$?

CCP PC 2012-2011-2010 (Série génératrice exponentielle des dérangements) ✍

Ex 34 Soit $(d_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $d_0 = 1$, $d_1 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $d_{n+2} = (n+1)(d_{n+1} + d_n)$.

1) Calculer d_2 et d_3. Montrer que $\forall\, n \geqslant 2$, $\frac{n!}{3} \leqslant d_n \leqslant n!$.

2) Trouver le rayon R de la série entière de terme général $\frac{d_n}{n!}x^n$. Si $x \in]-R, R[$, on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}x^n$.

3) Montrer que $\forall\, x \in]-R, R[$, $(1-x)S'(x) = xS(x)$.

4) En déduire une expression de S. Exprimer d_n en fonction de n.

Mines-Ponts PC 2008 (calcul de somme) ✷

Ex 35 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + \dfrac{u_n}{n+2}$. Calculer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $u_n x^n$.

Ex 36 ✍ On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big)x^n$ avec $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

1) Calculez $f(x)$ pour $|x| < 1$.

2) ✷Montrez la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\Big)$

Centrale PSI 2015 (Série génératrice exponentielle des involutions) ✷ ✍

Ex 37 Soit X un ensemble fini. On dit que $f\colon X \to X$ est une involution de X si $f \circ f = \mathrm{Id}$. On note pour $n \in \mathbb{N}$, I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$ et l'on convient que $I_0 = 1$.

1) Calculer I_1, I_2, I_3.

2) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$. Soit $S\colon z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!}z^n$.

3) Montrer que S a un rayon de convergence $R > 0$.

4) Soit $x \in]-R, R[$. Calculer $(1+x)S(x)$, en déduire une expression simple de $S(x)$. Puis déduire une expression de I_n.

Développements en Série Entière

Définition : Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit qu'elle est ***développable en série entière*** sur $]-r, r[$ ssi il existe une série entière de rayon de convergence $R \geq r$ telle que $\forall\, x \in\,]-r, r[\,,\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

Ex 38 Développez en Série entière les fonctions suivantes

✌$\sin^3 x$✍ $\quad \arctan\Big(\dfrac{1}{1+x}\Big) \quad \cos x \cosh x \quad \ln(x^2 - 8x + 15)$✍ $\quad \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} \quad \sinh(\arcsin x)$

Mines-Ponts 2017-2015-2012 | CCP PSI 2011 (calcul de somme de série numérique) ✷ ✍

Ex 39

1) Etablir la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$. On note sa somme S.

2) [**CCP :** Donnez un DSE de $f : x \longrightarrow \frac{1}{1+x^3}$ au voisinage de 0. Calculez de 2 façons $\int_0^1 f$ et en déduire S.]

2) [**Mines :** Calculez S.]

CCP PSI 2014 (fonction - intégrale) ✍

Ex 40 On considère $f(x) = e^{x^2/2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$.

1) Etudiez la parité de f. Montrez $f\,C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle à déterminer.

2) Montrez f développable en série entière et déterminez ce développement.

Mines-Ponts PSi 2014-2013 | Centrale PSI 2012 (développement en série entière) ✷ ✍

Ex 41 Soit $f\colon x \mapsto (\arcsin x)^2$.

1) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 que l'on précisera sur un intervalle que l'on précisera également.

2) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. Expliciter les coefficients ainsi que le rayon de convergence.

Ensea PSI 2021 (série entière solution équation différentielle) ✍

Ex 42 Déterminez les solutions de $xy'' - (x+1)y' + y = 0$ (E) développables en série entière.

Mines-Ponts PSI 2022 (dse intégrale à paramètre) ✷ ✍

Ex 43 On considère la fonction $f : x \longrightarrow \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t(t-2)(t-x)}}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminez le domaine de définition de f.

2) Montrez que f est développable en série entière au voisinage de 0.

CCINP PSI 2023 -2022 -2021 (fonction-intégrale) ✍

Ex 44

1) Donnez le domaine de définition de $F(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$

2) Montrez, pour tout $x \in \left[0,1\right]$, $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

3) Montrez, pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $F(x) + F(1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln(1-x)\ln(x)$. On rappelle $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

[**2021-2022 :** *Indication :* on pourra procéder à une intégration par parties] .

Ex 45

1) ✷ En utilisant $y' = 1 + y^2$, montrez que tan est développable en série entière dans un voisinage de 0.

2) Montrez que tan a toutes ses dérivées positives sur $[0, \pi/2[$.

3) Déduire des questions précédentes que tan est dév. en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et de rayon $\pi/2$.

CCP PSI 2013 (dse intégrale à paramètre fonction de Bessel) ✍

Ex 46 Donner le développement en série entière de $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\cos t)\,\mathrm{d}t$.

Ex 47 ✍ Soit a_n le nombre de manières de rendre n euros avec des pièces de 2 et 3 euros. Développer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$ en série entière de 2 façons et en déduire a_n

Centrale PSI 2016 (dse intégrale à paramètre) ✷

Ex 48 On considère la fonction $f\colon x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{|1 + x\cos t|}\,\mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Montrer que f est continue et paire sur ce domaine.

3) Montrer que f est développable en série entière.

Ex 49 ✷ Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$

1) Déterminer le domaine de définition D de f et montrez f C^∞ sur D.

2) Montrez que f est développable en série entière et exprimez les coefs à l'aide de la fonction ζ.

Mines-Ponts PSI 2021 (développement en série entière de $1 / \cos x$*)* ✷ ✍

Ex 50

1) Montrez que la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{\cos x}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

2) Encadrez son rayon par deux réels strictement positifs.