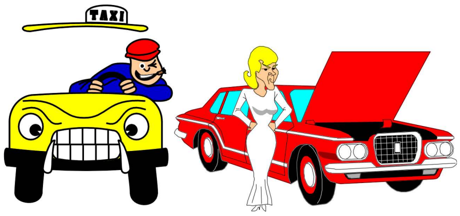
Feuille d'Exercices 9



☞ **Thèmes des semaines du 30 Janvier et 6 Février 2017 :**

- Séries Entières : rayon de convergence. continuité, dérivation et primitivation terme à terme.
- Calculs de sommes. Développement en série entière.

✌ $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^2} z^n$ ✌ $\sum_{n\geq 1} \frac{\cosh n}{\sinh^2 n} z^n$ $\sum_{n\geq 1} n^{\sqrt{n}} z^n$ ✌ $\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n+1}}{7^n}$ $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(1+\sqrt{n})^n} z^n$ $\sum_{n\geq 0} z^{n!}$ $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n z^n$

$\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) z^n$ $\sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \frac{z^n}{n}$ ✷ $\sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t\right) z^n$ $\sum_{n\geq 1} n!\, z^{n^2}$ $\sum_{n\geq 1} 2^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$

✌ **Ex 1** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de conv. R. Rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$?

Ex 2 Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1) Exprimez u_n en fonction de n.

2) Déterminez le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $u_n z^n$.

Ex 3 **D'Alembert**[1] **à « *tranches* »** Rayon de conv. de $\sum a_n z^n$ tq $\lim \left|\frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}\right| = 1$ et $\lim \left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n+2}}\right| = 2$.

Ex 4 Déterminez l'intervalle de définition et de continuité des fonctions suivantes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$

Ex 5 On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}\, x^n$. En considérant $g(x) = (1-x)f(x)$, établir que la limite à droite de f en -1 existe et est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{4}$.

Ex 6 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière vérifiant $\forall\, n \in \mathbb{N}\quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$. Etablir que $R \neq 0$, puis que sur le disque ouvert de convergence, la fonction-somme est $f(z) = \frac{a_0 + (a_1 - 5a_0)z}{1 - 5z + 6z^2}$.

Ex 7 Montrez que $\varphi(t) = \frac{\ln t}{t-1}$ est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ notée $\widetilde{\varphi}$. Précisez $\widetilde{\varphi}(1)$ et $\widetilde{\varphi}'(1)$.

Ex 8 On suppose que les deux séries entières $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$ ont même rayon R. Montrez que la série entière $\sum a_n z^n$ a aussi pour rayon de convergence R.

Ex 9 Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon $R = 1$. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ avec $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1) Montrez que le rayon de convergence de g est 1.

2) Pour tout $x \in]-1, 1[$, exprimez $g(x)$ en fonction de $f(x)$.

Ex 10 Soit (a_n) une suite complexe telle que la série entière de la var. complexe $\sum a_n z^n$ ait un rc. $R > 0$.

1) Montrez que le rayon de convergence de $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ est $+\infty$

✷ **2)** Montrez Intégrale définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t} F(zt)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Ex 11 Calculez la Somme des séries entières ou séries numériques suivantes :

✌ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+2)!}$ ✌ $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2+7n-2)\, x^n$ ✌ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(n+1)}$ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n3^n}{n(n-1)5^n}$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+5}{n+3} \frac{x^n}{n!}$ ✷ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$

1. **Jean le Rond D'Alembert** : mathématicien philosophe français (1717-1783).

✌ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n}\, x^{4n-1}$ $\quad$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \sin^n t \partial t\right) x^n$ $\quad$ ✌ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{(-1)^n}\, x^n$ $\quad$ ✌ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n\theta)\, x^n$ $\quad$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos na}{n!(\sin a)^n} x^n \ (a \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z})$

Ex 12 On se donne une série entière $\sum a_n x^n$ telle que $a_{3p} = 0$ $a_{3p+1} = 2^{2p+1}$ $a_{3p+2} = 3^p$ $(p \in \mathbb{N})$
Donnez le rayon de convergence et calculez la somme de la série.

Ex 13 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ et de somme f. Exprimez $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$. Idem avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

Ex 14 Soit $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = -A$. Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{tr}(A^n) x^n$?

Ex 15 On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) x^n$ avec $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

1) Calculez $f(x)$ pour $|x| < 1$.

2) Montrez la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)$

✷ **Ex 16** Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$. Etablir $f(x) \sim_1 \dfrac{\ln(1-x)}{x-1}$.

✷ **Ex 17** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon $R > 0$ telle que la série numérique $\sum a_n R^n$ converge. Etablir que la fonction-somme est continue en R. On prendra $R = 1$ et utilisera, après l'avoir démontré,

$$\forall x \in [0, R[\quad f(x) = S - \sum_{n=0}^{+\infty} R_n (x^n - x^{n+1}). \qquad (\textit{Transformation d'}\textbf{Abel}^2)$$

où S, R_n désignent la somme et le reste d'ordre n associés à $\sum a_n$. Montrez que la réciproque est fausse.

Ex 18 Formez le Développement en Série entière de $F(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t}{1 - x\sin t}\, dt$?

Ex 19 Soit a_n le nombre de manières de rendre n euros avec des pièces de 2 et 3 euros. Développer la fraction rationnelle $\dfrac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$ en série entière de 2 façons et en déduire a_n

Ex 20 Développez en Série entière les fonctions suivantes et précisez le domaine d'égalité

✌ $\sin^3 x$ $\quad$ $\arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ $\quad$ $\cos x \cosh x$ $\quad$ $\ln(x^2 - 8x + 15)$ $\quad$ $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ $\quad$ $\sinh(\arcsin x)$ $\quad$ $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$

Ex 21

1) Etudiez la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$. On note S sa somme.

2) Développez en série entière $x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x^3}$ au voisinage de 0. Calculez de deux façons $\displaystyle\int_0^1 f$ et en déduire S.

Ex 22

✷ **1)** En utilisant $y' = 1 + y^2$, montrez que tan est développable en série entière dans un voisinage de 0.

2) Montrez que tan a toutes ses dérivées positives sur $[0, \pi/2[$.

3) Déduire des questions précédentes que tan est dév. en série entière sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et de rayon $\pi/2$.

Ex 23 Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$

1) Déterminer le domaine de définition D de f et montrez f C^∞ sur D.

2) Montrez que f est développable en série entière et exprimez les coefs à l'aide de la fonction ζ.

✷ **Ex 24** Montrez que $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ est développable en série entière dans un voisinage de 0.