Quelques Corrections sur les Probabilités

Ex 1 ✌ Montrez que l'ensemble des entiers impairs est dénombrable.

L'ensemble des entiers impairs $2\mathbb{N}+1$ est dénombrable car en bijection avec $\mathbb{N}$ par $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow 2\mathbb{N}+1$ $n \longrightarrow 2n+1$. ϕ est clairement bijective car de réciproque immédiate $n \longrightarrow \frac{n-1}{2}$. ***Autre Méthode :*** $2\mathbb{N}+1$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$, donc au plus dénombrable. Comme il est de cardinal infini, il est nécessairement dénombrable.

Ex 3 ✷

1) On rappelle que tout entier $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire en binaire. Ecrire les nombres 11, 1245, 2^n, $2^n - 1$ en binaire.

2) On admet que tout réel peut s'écrire sous la forme d'un développement binaire $\sum_{k=-\infty}^{n} a_k 2^k$ avec $a_k \in \{0,1\}$ et $a_n = 1$. Donnez le développement de $1.5, 1/8, 1/3$.

3) Construire alors « *naturellement* » une application de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ dans $[0,1]$.

4) En déduire $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ non dénombrable, puis $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ non dénombrable.

1) $11 = 8+2+1 = 2^3+2^1+2^0 = \overline{1011}^2$ $\quad 1245 = 1024+128+64+16+8+4+1 = 2^{10}+2^7+2^6+2^4+2^3 = 2^2+2^0 = \overline{10011011101}^2$
$2^n = \overline{1\underbrace{0\dots0}_{n \text{ fois}}}^2$ $\quad 2^n - 1 = \overline{\underbrace{1\dots1}_{n \text{ fois}}}^2$

2) $1,5 = 1+0.5 = 2^0+2^{-1} = \overline{1,1}^2$ $\quad \dfrac{1}{8} = 2^{-3} = \overline{0,001}^2$. $\quad \dfrac{1}{3} = \dfrac{1/4}{1-1/4} = 2^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\dfrac{1}{4})^n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-2n} = \overline{0,01010101010101\dots}^2$

3) On rappelle que $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\{0,1\}$. On considère l'application ϕ qui à la « *suite* » quelconque $(u_1, u_2, u_3, \dots)$ (avec $u_i = 0$ ou 1), via le nombre binaire $\overline{0, u_1 u_2 u_3 \dots}^2$, fait correspondre le réel $u_1 \frac{1}{2} + u_2 \frac{1}{2^2} + u_3 \frac{1}{2^3} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n 2^{-n}$, réel de $[0,1[$ (positivité immédiate et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n 2^{-n} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = 1$) et même de $[0,1]$ car $\sum_{n=1}^{+\infty} 1 \times 2^{-n} = 1$.
Attention! ϕ n'est pas ***injective*** car, par exemple, $\overline{0,1}^2 = \overline{0,0111111\dots}^2$ (C'est quel nombre en décimal ?), exactement comme $0,999999\dots = 1$ en décimal. Elle est par contre ***surjective*** d'après Q2.

4) A cause de la surjection, $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ est de cardinalité infinie « *plus grande* » que celle de $[0,1]$. Comme $[0,1]$ n'est pas dénombrable, car il a la « *puissance du continu* », $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ ne l'est pas non plus. Or, il y a une bijection entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ et $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. C'est l'application ψ qui à $(u_1, u_2, u_3, \dots)$ associe le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ contenant exactement tous les entiers n tels que $u_{n+1} = 1$ (le décalage tient au fait que la suite commence à l'indice 1). Rappelons que les éléments de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ sont exactement tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$.
Par exemple, $\psi(1,1,0,\dots) = \{0,1\}$, $\psi(0,1,0,1,1,0,\dots) = \{1,3,4\}$, $\psi(1,0,1,0,1,0,1,0,\dots) = 2\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers pairs, sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Vous avez compris ? Quel est l'image par ψ^{-1} de l'ensemble des entiers impairs ? des multiples de 3 ?

CCP PSI 2017 (probabilité d'union et intersection)

Ex 6 Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Montrez $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n) \leq P(A_1 \cap \dots \cap A_n) + n - 1$

On démontre les 2 inégalités par récurrence sur n, la 1[re] étant du cours.

- $\mathscr{P}(1)$: immédiat
- $n=2$. On sait $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)\leq P(A_1)+P(A_2)$ par positivité de $P(A_1\cap A_2)$. $\mathscr{P}(2)$ Ok.
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vrai

$$P(A_1\cup\cdots\cup A_{n+1})=P\big(A_1(\cup\cdots\cup A_n)\cup A_{n+1}\big)\underset{\mathscr{P}(2)}{\leq}P\big(A_1(\cup\cdots\cup A_n)\big)+P(A_{n+1})\underset{\mathscr{P}(n)}{\leq}P(A_1)+\cdots+P(A_n)+P(A_{n+1})$$

$\mathscr{P}(n+1)$ Ok.

La 2[e]

- $\mathscr{P}(1)$: $P(A_1)\leq P(A_1)+1-1$. Ok.
- $\mathscr{P}(2)$: $P(A_1)+P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cup A_2)\leq P(A_1\cap A_2)+1=P(A_1\cap A_2)+2-1$. Ok.
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vrai

$$\begin{aligned}P(A_1)+\cdots+P(A_n)+P(A_{n+1})&\underset{\mathscr{P}(n)}{\leq}P(A_1\cap\cdots\cap A_n)+n-1+P(A_{n+1})\underset{\mathscr{P}(2)}{\leq}P\big((A_1\cap\cdots\cap A_n)\cap A_{n+1}\big)+n-1+2-1\\&=P(A_1\cap\cdots\cap A_{n+1}+(n+1))-1\qquad\mathscr{P}(n+1)\text{ Ok}\end{aligned}$$

Mines-Ponts PSI 2018 (majoration probabilité d'une intersection)

Ex 7 Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ des événements mutuellement indépendants. Montrez que la probabilité qu'aucun des A_k ne se réalise est inférieure à $\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\Big)$.

L'événement « *aucun des A_k ne se réalise* » est $E=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}=\overline{\bigcup_{k=1}^{n}A_k}$.

$$P(E)\overset{(1)}{=}\prod_{k=1}^{n}P(\overline{A_k})=\prod_{k=1}^{n}(1-P(A_k))\overset{(2)}{\leq}\prod_{k=1}^{n}\exp\Big(-P(A_k)\Big)=\exp\Big(-\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\Big)$$

- **(1)** Indépendance des A_k
- **(2)** Inégalité de convexité usuelle $1-x\leq e^{-x}$

Ex 9 ✌Un tricheur dispose de 4 pièces dont une a 2 côtés pile. Il prend une pièce au hasard et la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir pile? (*utilisez la formule des probabilités totales*). Comparez.

On note T l'évènement « *la pièce est truquée* » et L l'évènement « *la pièce donne pile* ». $(T,\overline{T})$ est clairement un système complet d'événements. On applique la formule des probabilités totales à l'événement L :

$$P(L)=\underbrace{P(L|T)}_{1}\times\underbrace{P(T)}_{1/4}+\underbrace{P(L|\overline{T})}_{1/2}\times\underbrace{P(\overline{T})}_{3/4}=\frac{5}{8}$$

Il y a une pièce truquée sur 4, donc $P(T)=1/4$ et $P(\overline{T})=3/4$. La pièce truquée a 2 faces piles, donc $P(L|T)=1$!

S'il n'y avait pas de pièce truquée, la probabilité cherchée d'avoir pile aurait été de $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ probabilité bien entendu inférieure à celle lorsqu'on joue avec une pièce truquée , comme le montre le calcul au-dessus.

Ex 10 Une suite d'individus $I_1, \ldots, I_n$ se transmet une information. On suppose que l'individu I_k transmet l'information qu'il a reçu à l'individu I_{k+1} avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, ou sinon il transmet l'information « *contraire* » avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

1) Calculez p_1 et p_2.

2) Calculez la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1 (*utilisez la formule des probabilités totales*).

3) Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$? Interprétation ?

---

1) L'individu I_1 possède la même information que lui-même de façon certaine, donc $p_1 = 1$. Par définition I_1 transmet son information à I_2 avec la probabilité p. I_2 aura donc alors la ***même information*** que I_2 avec cette probabilité p ! soit $p_2 = p$.

2) Utilisons l'événement $A_n = \{$L'individu I_n possède la même information que l'individu $I_1\}$. Par définition, $p_n = P(A_n)$. $(A_n, \overline{A_n})$ est clairement un ***système complet d'événements*** (immédiat : $A_n \cup \overline{A_n} = \Omega$ $A_n \cap \overline{A_n} = \emptyset$), on utilise alors la ***formule des probabilités totales*** à l'événement A_{n+1} :

$$\underbrace{P(A_{n+1})}_{p_{n+1}} = \underbrace{P(A_{n+1} \mid A_n)}_{p} \underbrace{P(A_n)}_{p_n} + \underbrace{P(A_{n+1} \mid \overline{A_n})}_{1-p} \underbrace{P(\overline{A_n})}_{1-p_n} = p\, p_n + (1-p)(1-p_n) = \boxed{(2p-1)p_n + 1 - p = p_{n+1}}$$

La probabilité $P(A_{n+1}|A_n)$ qui est la probabilité pour que l'individu I_{n+1} détienne la même information que I_1 sachant que l'individu I_n possède la même information que I_1 est clairement la probabilité pour que I_n lui transmette l'information qu'il possède lui-même de façon correcte, soit p. Je vous laisse « *rédiger* » l'autre.

On a donc une suite arithmético - géométrique , cad $u_{n+1} = a u_n + b$ (avec $a \neq 1$). On cherche d'abord le « *point fixe* » ω :

$$\omega = (2p-1)\omega + 1 - p \iff \omega = \frac{1-p}{1-(2p-1)} = \frac{1}{2}$$

On considère ensuite la suite $v_n = p_n - \omega$ (qui va être géométrique...) :

$$v_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{2} = \left((2p-1)\left(v_n + \frac{1}{2}\right) + 1 - p\right) - \frac{1}{2} = (2p-1)v_n$$

Il vient donc $v_n = (2p-1)^{n-1} v_1 = (2p-1)^{n-1}\frac{1}{2}$ puis $\boxed{p_n = v_n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2}}$

3) Comme $0 < p < 1$, il vient $-1 = 2\times 0 - 1 < 2p - 1 < 2\times 1 - 1 = 1$, d'où $(2p-1)^n \longrightarrow 0$, puis $p_n \longrightarrow \frac{1}{2}$. Si le nombre d'individus est très grand, la probabilité pour qu'un individu détienne la même information que le premier est $\frac{1}{2}$, même si p très petit. C'est à dire que même si I_1 transmet « *son* » information à I_2 avec une probabilité ***quasi-nulle***, alors le « *millionième* » individu a ***1 chance sur 2*** de détenir cette information. Surprenant !

BQCCP MP 2023->2015 (dés pipés)

Ex 12

1) Enoncez et démontrez la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chifre 6 vaut $\frac{1}{2}$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Probabilité que le dé soit pipé ?

3) Mêmes conditions. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ? Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interprétez le résultat.

Cet exercice fait partie de la banque d'exos CCINP MP, n°105.

Vous pouvez regarder la correction fournie par le concours : Banque CCINP MP 2023 avec corrigés

CCINP PSI 2021 (tirage nombre pair de boules dans une urne)

Ex 13 Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On réalise n tirages avec remise.

1) Soit B_i l'événement « *on tire i boules blanches* ». Calculez $P(B_i)$

2) Montrez $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{1}{2}\big((1+x)^n + (1-x)^n\big)$.

3) Calculez la probabilité de tirer un nombre pair de boules blanches.

1)

- L'expérience réalisée est le tirage dans une urne où le ***succès*** est le tirage d'une boule blanche, probabilité $p = \frac{a}{a+b}$.
- Le tirage est avec remise, les expériences sont répétées ***indépendamment***.
- Si on pose Y le nombre de succès en n tirages, on a alors que Y suit la ***loi binomiale*** de paramètre (n, p)

Par suite $\boxed{P(B_i) = P(Y = i) = \binom{n}{i}\left(\frac{a}{a+b}\right)^i \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-i} = \binom{n}{i}\frac{a^i\, b^{n-i}}{(a+b)^n}}$

2) La bonne idée est de prendre l'égalité « *à l'envers* » et d'appliquer le binôme de Newton :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big((1+x)^n + (1-x)^n\big) &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-x)^k\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(2\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ pair } =2m}}\binom{n}{k}x^k\Big) = \sum_{0\le 2m\le n}\binom{n}{2m}x^{2m} = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2m}x^{2m}\end{aligned}$$

3) Si B est l'événement « *tirer un nombre pair de boules blanches* », sous-entendu en n tirages, $B = \bigcup_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} B_{2i}$, puis :

$$\begin{aligned}P(B) &\overset{(1)}{=} \sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} P(B_{2i}) = \frac{1}{(a+b)^n}\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}a^{2i}b^{n-2i} = \frac{b^n}{(a+b)^n}\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2i}\left(\frac{a}{b}\right)^{2i}\\ &\overset{(2)}{=} \frac{b^n}{(a+b)^n}\,\frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1-\frac{a}{b}\right)^n\right) = \frac{b^n}{2(a+b)^n}\left(\left(\frac{b+a}{b}\right)^n + \left(\frac{b-a}{b}\right)^n\right) = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{b+a}\right)^n}\end{aligned}$$

- **(1)** Les événements B_{2i} sont clairement incompatibles.
- **(2)** Question Q2

Mines-Ponts PSI 2022 (probabilité dans étage d'un immeuble) ✷

Ex 14 Considérons un immeuble à 7 étages où l'on cherche une personne. Cette personne est dans l'immeuble avec une probabilité $p \in \,]0,1[$ et, si elle est dans l'immeuble, elle se trouve à chaque étage avec la même probabilité. On a cherché dans les 6 premiers étages en vain. Probabilité qu'elle soit dans le dernier étage?

On note A_i l'événement « *la personne est au i-ième étage* ». Par hypothèse, on a $P(\bigcup_{i=1}^{7} A_i) = p$ et $P(A_i) = \frac{1}{7}p$. La probabilité demandée est :

$$P(B) = P(A_7 \mid \overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_6}) = \frac{P(A_7\cap\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_6})}{P(\overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_6})} \overset{(1)}{=} \frac{P(A_7)}{1-P(A_1\cup\cdots\cup A_6)} \overset{(2)}{=} \frac{p/7}{1-6p/7} = \frac{p}{7-6p}$$

- **(1)** $A_7 \subset \overline{A_1}\cap\cdots\cap\overline{A_6}$
- **(2)** Incompatibilité des A_i.

On constate heureusement que si $p = 1$ (rp. $p = 0$), $P(B) = 1$ (rp. $P(B) = 0$)

Mines-Ponts PSI 2022 (probabilité d'être un dérangement) ✷

Ex 15 Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, D_n le nombre de permutations de $[\![1 ; n]\!]$ sans point fixe et p_n la probabilité qu'une permutation de $[\![1 ; n]\!]$ choisie au hasard soit sans point fixe. Par convention, $p_0 = 1$.

1) Montrez, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)!} = 1$

2) En déduire que, pour $x \in \left] -1, 1 \right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}$

3) Montrez $p_n \longrightarrow \frac{1}{e}$

1) Les permutations sans point fixe s'appellent dérangements. On note D_n le nombre de dérangements des permutations de $[\![1 ; n]\!]$ (et même d'un ensemble quelconque de cardinal n) et A_k l'ensemble des permutations à exactement k points fixes, pour $0 \leq k \leq n$. On a immédiatement $A_0 = D_n$, $A_n = \{ \mathrm{Id} \}$ et cette famille $(A_k)_{0 \leq k \leq n}$ forme une partition de S_n (ensemble de toutes les permutations de $[\![1 ; n]\!]$ cardinal $n!$). Dénombrer A_k équivaut à choisir k entiers parmi $[\![1 ; n]\!]$ et de n'avoir aucun point fixe parmi les permutations des $n-k$ entiers restants, d'où :

$$n! = \mathrm{Card}\,(S_n) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}\,(A_k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_k \quad \Longrightarrow \quad 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{D_k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} p_k$$

2) Il fallait reconnaître un produit de Cauchy... Plus précisément, en notant $S(x)$ la somme de la série (entière) de $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$ (de rayon R), on reconnaît en la somme précédente le terme du produit de Cauchy de la série (entière) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n$ (de rayon $R = +\infty$) et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$, égal à la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} 1 x^n$ de rayon 1. Il vient alors, par théorème $1 \geq \inf(R, +\infty) = R$, et :

$$\forall x \in \left] -R, R \right[, \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

En effectuant le produit (de Cauchy) de e^{-x} par $\frac{1}{1-x}$, on trouve $R \geq \inf(1, +\infty) = 1$, soit $R = 1$.

3) On applique la formule de Leibniz :

$$p_n = \frac{1}{n!} \Big(\frac{e^{-x}}{1-x} \Big)^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(e^{-x} \right)^{(k)}(0) \Big(\frac{1}{1-x} \Big)^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} (-1)^k e^{-0} \frac{(n-k)!}{(1-0)^{n-k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-1}$$

a

Ex 16 Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène Face avec la probabilité $p \in \left] 0, 1 \right[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1) Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son n-ième lancer ?

2) Quelle est la probabilité pour que A gagne ?

3) Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?

4) Y a t-il une valeur de p qui assure que les 2 joueurs aient la même probabilité de gagner ?

Choisissons bien nos événements : $F_k = \{$On obtient un face au k-ième lancer pour la 1re fois$\}$ et $A_n = \{$le joueur A gagne au n-ième lancer$\}$.

1) Commençons par remarquer que si A gagne à ***son*** n-ième lancer, c'est qu'on en est au $2n-1$-ième lancer car il ne faut pas oublier que B joue entre temps. On a donc $A_n = F_{2n-1} \cap \overline{F_{2n-2}} \cap \cdots \cap \overline{F_1}$. Ici les tirages sont indépendants, donc :

$$P(A_n) = P\big(F_{2n-1} \cap \overline{F_{2n-2}} \cap \cdots \cap \overline{F_1}\big) = P(F_{2n-1}) \times P\big(\overline{F_{2n-2}}\big) \times \cdots \times P\big(\overline{F_1}\big) = p(1-p)^{2n-2}$$

2) A gagne ssi il existe un n entier tel que A gagne lors de son n-ième lancer ; on note aussi par commodité, A cet évenement. Ceci s'écrit $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Les événements A_n sont incompatibles entre eux, car si A a gagné au tirage n (par ex., $n > m$), alors il ne peut pas avoir gagné au tirage m. Donc la probabilité de l'union des événements en est la somme :

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-2} = p\sum_{n=1}^{+\infty}\big((1-p)^2\big)^{n-1} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \boxed{\frac{1}{2-p}}$$

3) On calcule de la même manière, la probabilité pour que B gagne (notations des événements analogues) :

$$P(B) = P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(F_{2n}\cap\overline{F_{2n-1}}\cap\cdots\cap\overline{F_1}) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{2n-1}$$

$$= p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty}\big((1-p)^2\big)^{n-1} = p(1-p)\sum_{n=0}^{+\infty}\big((1-p)^2\big)^{n} = \frac{p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \boxed{\frac{1-p}{2-p}}$$

La probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas, cad personne ne gagne, est la probabilité de l'événement $\overline{A}\cap\overline{B}$. A et B sont évidemment des événements incompatibles (pour la justification du 3e égal) :

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B) = 1-P(A)-P(B) = 1-\frac{1}{2-p}-\frac{1-p}{2-p} = 1-\frac{2-p}{2-p} = 0$$

4) On a calculé $P(A) = \dfrac{1}{2-p}$ $P(B) = \dfrac{1-p}{2-p}$. Comme on a toujours $1 > 1-p$, le joueur A qui commence a toujours plus de chances de gagner, quelque soit le trucage de la pièce. Vaut mieux donc être le premier joueur qui commence à jouer !

BQCCINP MP 2023->2015 (animal dans le désert et point d'eau)

Ex 17

Dans une zone désertique, un animal erre entre 3 points d'eau A, B et C. A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point d'eau qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n (rp. B_n, C_n) l'événement « *l'animal est en A (rp. B, C) après son n^e trajet* ». On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1) Exprimez, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.

2) On considère la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

• Justifiez, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

• Prouvez que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminez le sous-espace propre associé.

• Déterminez une matrice P inversible et une matrice D diagonales de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).

3) Calculez a_n, b_n, c_n puis leur limites lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Interprétation ?

1) (A_n, B_n, C_n) est bien un ***système complet d'événements*** car d'une part ces événements sont clairement incompatibles (si l'animal est en A, il n'est pas en B...) et d'autre part, leur réunion est l'univers Ω car, l'animal est nécessairement ou en A, ou en B, ou en C. On applique la formule des probabilités totale à l'événement A_{n+1} :

$$\underbrace{P(A_{n+1})}_{a_{n+1}} = \underbrace{P(A_{n+1}|A_n)}_{0}\,\underbrace{P(A_n)}_{a_n} + \underbrace{P(A_{n+1}|B_n)}_{\frac12}\,\underbrace{P(B_n)}_{b_n} + \underbrace{P(A_{n+1}|C_n)}_{\frac12}\,\underbrace{P(C_n)}_{c_n} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

Si l'animal est en un point d'eau après son n-ième trajet, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des 2 ***autres*** point d'eau.
Par conséquent, $P(A_{n+1}|B_n) = P(A_{n+1}|C_n) = \frac{1}{2}$ et $P(A_{n+1}|A_n) = 0$.
Par un raisonnement identique, on obtient $b_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}c_n \quad c_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2}b_n$

Remarque : Attention ! comme j'ai vu l'erreur sur plusieurs copies, système complet d'événements ne se ***traduit pas*** par $A_n\cap B_n\cap C_n = \varnothing$ mais par $A_n\cap B_n = \varnothing$ $A_n\cap C_n = \varnothing$ $B_n\cap C_n = \varnothing$. Si vous ne comprenez pas pourquoi ce n'est pas pareil, considérez l'exemple : $A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $C = \{1,3\}$.

2) La matrice A est symétrique ***réelle*** donc diagonalisable.

Méthode 1 (maladroite ici)

Pour trouver les valeurs propres, on calcule le polynôme caractéristique (on aura remarqué après le calcul la racine évidente 1 ou celle fournie par l'énoncé $-\frac{1}{2}$). ***Attention!*** au rôle perturbateur de $\frac{1}{2}$ dans le ***calcul*** : regardez-bien :

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2\lambda \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2^3}\begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2\lambda \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^3 - \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = \big(\lambda - 1\big)\Big(\lambda + \frac{1}{2}\Big)^2$$

Méthode 2

Comme l'énoncé vous fournit la valeur propre $-\frac{1}{2}$, il est beaucoup plus simple de vérifier $\det(-\frac{1}{2}I_3 - A) = 0$:

$$\det\Big(-\frac{1}{2}I_3 - A\Big) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

Vecteurs propres associés à $-\frac{1}{2}$:

Si on a utilisé la méthode 1, on voit que la multiplicité est 2 et comme A est diagonalisable, c'est la dimension de $E(-\frac{1}{2})$. Si on a utilisé la méthode 2, on voit que $\operatorname{rg}(-\frac{1}{2}I_3 - A) = 1$, donc $\dim\ \operatorname{Ker}(-\frac{1}{2} - A) = 2$, on retrouve la même chose. Un calcul immédiat montre que c'est le plan $x + y + z = 0$.

On vous demande ensuite de diagonaliser A. Reste à cacluler l'espace propre $E(1)$. Si on a utilisé la méthode 2, on n'a pas la valeur propre qui manque : on peut la trouver par la ***trace***! (méthode à ne pas oublier) : $\operatorname{tr}(A) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 1$. On sait alors que c'est une droite puisque la multiplicité est 1.

Vecteurs propres associés à 1 :

Méthode 1 : Comme la matrice est ***symétrique*** réelle, c'est la droite ***orthogonale*** au plan $x+y+z = 0$, soit $E(1) = \operatorname{Vect}(1,1,1)$.

Méthode 2 : On résout le système 3×3

$$AX = X \Longleftrightarrow (I - A)X = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - z & = & 0 \\ -x + 2y - z & = & 0 \\ -x - y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & x \\ z & = & x \end{array}\right. \qquad E(1) = \operatorname{Vect}(1,1,1)$$

Comme $E(1) \oplus E(-\frac{1}{2}) = \mathbb{R}^3$, on sait alors que $\mathscr{E} = \big((1,1,1),(1,-1,0),(1,0,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de A. Par conséquent, via la formule de changement de bases de l'endomorphisme canoniquement associé :

$$\text{en posant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{on a} \quad P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3) On remarque en posant $X_n = (a_n, b_n, c_n)^{\mathrm{T}}$, que les 3 équations de la question Q1 s'écrivent $X_{n+1} = AX_n$ qui, par récurrence immédiate, amène à $X_n = A^n X_1$. On a $X_1 = (a_1, b_1, c_1)^{\mathrm{T}} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$

Méthode 1 : Calcul de A^n par la diagonalisation

Cette méthode ne « *marche* » que lorsque la matrice est diagonalisable et est un peu lourde de calculs. Il faut calculer P^{-1} puis, in fine, calculer le produit PD^nP^{-1}, en ajoutant qu'il faut aussi avoir préalablement calculé les vecteurs propres … C'est néanmoins la plus simple et utile à retenir car diagonaliser est une méthode qui sert dans beaucoup d'autres exercices (calcul de racine carrées, système différentiel, …).

Calcul de P^{-1} par la méthode usuelle d'inversion du système associé :

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} Y=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix} Y=PX \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} u & = & x+y+z\\ v & = & x-y\\ w & = & x-z\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & \frac{1}{3}(u+v+w)\\ y & = & \frac{1}{3}(u-2v+w)\\ z & = & \frac{1}{3}(u+v-2w)\end{array}\right. \Longrightarrow P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{pmatrix}$$

Puis calcul de $A^n=(PDP^{-1})^n=PD^nP^{-1}$:

$$\overbrace{\begin{pmatrix}1^n & 0 & 0\\ 0 & (-\frac{1}{2})^n & 0\\ 0 & 0 & (-\frac{1}{2})^n\end{pmatrix}}^{D^n}\overbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\end{pmatrix}}^{P^{-1}}$$

$$A^n=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & (-\frac{1}{2})^n & (-\frac{1}{2})^n\\ 1 & -(-\frac{1}{2})^n & 0\\ 1 & 0 & -(-\frac{1}{2})^n\end{pmatrix}}_{PD^n}\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\big(1+2(-\frac{1}{2})^n\big) & \frac{1}{3}\big(1-(-\frac{1}{2})^n\big) & \frac{1}{3}\big(1-(-\frac{1}{2})^n\big)\\ \frac{1}{3}\big(1-(-\frac{1}{2})^n\big) & \frac{1}{3}\big(1+2(-\frac{1}{2})^n\big) & \frac{1}{3}\big(1-(-\frac{1}{2})^n\big)\\ \frac{1}{3}\big(1-(-\frac{1}{2})^n\big) & \frac{1}{3}\big(1-(-\frac{1}{2})^n\big) & \frac{1}{3}\big(1+2(-\frac{1}{2})^n\big)\end{pmatrix}}_{PD^nP^{-1}}$$

Méthode 2 : Calcul de A^n par un polynôme annulateur

Cette méthode est efficace ***si l'on sait*** trouver un polynôme annulateur de bas degré (2 voire 3, quelle que soit la taille de la matrice). Elle marche même quand la matrice n'est pas diagonalisable.

Revenons à notre exemple. La matrice A est diagonalisable et de valeurs propres 1 et $-\frac{1}{2}$ donc ***on sait*** (cours!) que le polynôme $P(X)=(X-1)(X=\frac{1}{2})$ est ***annulateur de*** A (et c'est même celui de plus bas degré). Effectuons alors la ***division euclidienne*** du polynôme X^n par le polynôme P : il existe un quotient $Q(X)$ et un reste $R(X)$ tel que $\deg R<\deg Q$ (soit $\deg R\leq 1$) tels que :

$$X^n=Q(X)(X-1)(X+\frac{1}{2})+R(X)=Q(X)(X-1)(X+\frac{1}{2})+\ p_nX+q_n$$

En évaluant cette égalité polynomiale en les 2 valeurs propres $X=1$ et $X=-\frac{1}{2}$, on obtient le système :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1^n & = & p_n+q_n\\ (-\frac{1}{2})^n & = & -\frac{1}{2}p_n+q_n\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} p_n & = & \frac{2}{3}\big(1-(-\frac{1}{2})^n\big)\\ q_n & = & \frac{1}{3}\big(1+2(-\frac{1}{2})^n\big)\end{array}\right.$$

Puis en « *remplaçant* » X par A dans l'égalité polynomiale, comme $(A-I)(A+\frac{1}{2}I)=0$:

$$A^n=p_nA+q_nI=\frac{2}{3}\Big(1-\big(-\frac{1}{2}\big)^n\Big)\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\Big(1+2\big(-\frac{1}{2}\big)^n\Big)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n\\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n\\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n\end{pmatrix}$$

4)

$$X_n=A^nX_1 \quad\Longrightarrow\quad \begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n\\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n\\ 1-(-\frac{1}{2})^n & 1-(-\frac{1}{2})^n & 1+2(-\frac{1}{2})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\big(1+2(-\frac{1}{2})^{n-1}\big)\\ \frac{1}{3}\big(1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\big)\\ \frac{1}{3}\big(1-(-\frac{1}{2})^{n-1}\big)\end{pmatrix}$$

Comme $(-\frac{1}{2})^{n-1}\longrightarrow 0$, il vient immédiatement que $a_n, b_n, c_n \longrightarrow \frac{1}{3}$. Ceci signifie qu'après le $n$ième trajet, pour n assez grand, l'animal a une chance sur 3 d'être en A ou en B ou en C, ce qui se conçoit assez bien intuitivement…

Ex 18 Dans une succession de n lancers « *pile / face* » indépendants, on note p_n la probabilité qu'on n'obtienne pas deux piles consécutifs.

1) Calculez p_1, p_2 et p_3.

2) On considère les événements $F_i = \left\{\text{on obtient face au } i\text{-ième lancer}\right\}$ avec $i \in \{1,2\}$. Montrez que $(F_1 \cap F_2, \overline{F_1} \cap F_2, F_1 \cap \overline{F_2}, \overline{F_1} \cap \overline{F_2})$ est un système complet d'événements de Ω.

3) En utilisant un système complet d'événements un peu mieux choisi, établir la réc. $p_{n+2} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}p_{n+1}$.
(*Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales*)

4) Montrez que la suite (p_n) converge vers 0.

5) Dans cette question, on effectue successivement et indéfiniment des lancers « *pile / face* » (supposés indépendants). Soit l'événement $A = \left\{\text{on obtient deux piles consécutifs}\right\}$. Donner un univers décrivant cette expérience aléatoire, et précisez, en le justifiant, $P(A)$.

On prend comme modèle de tirage, lors d'une succession de n lancers, un n-uplet à valeurs dans $B = \{P, F\}$. L'univers Ω_n est donc l'ensemble des n-uplets à valeurs dans B, soit (cours), $\operatorname{Card}(\Omega_n) = 2^n$.

1) On a immédiatement $p_1 = 1$, puisque obtenir 2 piles est impossible en un lancer… En notant l'événement $A_n = \left\{\text{on a obtenu 2 piles consécutifs en } n \text{ lancers}\right\}$ et en reprenant notre « *modèle* », on a :

$$A_2 = \left\{(P,P)\right\} \quad \Longrightarrow \quad p_2 = P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2) = 1 - \frac{\operatorname{Card}(A_2)}{\operatorname{Card}(\Omega_2)} = 1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

$$A_3 = \left\{(P,P,F),(F,P,P),(P,P,P)\right\} \quad \Longrightarrow p_3 = P(\overline{A_3}) = 1 - P(A_3) = 1 - \frac{\operatorname{Card}(A_3)}{\operatorname{Card}(\Omega_3)} = 1 - \frac{3}{2^3} = \frac{5}{8}$$

2) Etant donné qu'au k-ième lancer, l'élément $\omega \in \Omega$ correspondant à notre modèle de tirage, nécessairement appartient à F_k ou $\overline{F}_k$, il est clair que $(F_1 \cap F_2) \cup (\overline{F_1} \cap F_2) \cup (F_1 \cap \overline{F_2}) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \Omega$. De même ces 4 événements sont clairement incompatibles à cause de l'incompatibilité de F_k et $\overline{F_k}$ pour $k \in \{1,2\}$. On en déduit que ce système est bien un système complet d'événements.

3) Après avoir remarqué que $(F_1 \cap F_2) \cup (F_1 \cap \overline{F_2}) = F_1 \cap (F_2 \cup \overline{F_2}) = F_1 \cap \Omega = F_1$, on a aussi que $(F_1, \overline{F_1} \cap F_2, \overline{F_1} \cap \overline{F_2})$ est un système complet d'événements. Appliquons la formule des probabilités totales à l'événement $\overline{A_n} = B_n$. Par définition $p_n = P(B_n)$:

$$p_{n+2} = P(B_{n+2}) = \underbrace{P(B_{n+2}|F_1)}_{p_{n+1}} \times \underbrace{P(F_1)}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{P(B_{n+2}|\overline{F_1} \cap F_2)}_{p_n} \times \underbrace{P(\overline{F_1} \cap F_2)}_{P(\overline{F_1}) \times P(F_2) = \frac{1}{4}} + \underbrace{P(B_{n+2}|\overline{F_1} \cap \overline{F_2})}_{0} \times \underbrace{P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2})}_{P(\overline{F_1}) \times P(\overline{F_2}) = \frac{1}{4}}$$

Expliquons un peu ces probabilités :

- On a $P(B_{n+2}|\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = 0$ car lors de ces $n+2$ lancers on a obtenu pile au 1er et 2ième lancer (à cause de $\overline{F_1} \cap \overline{F_2}$), donc on a obtenu 2 piles consécutifs…

- $P(B_{n+2}|F_1) = p_{n+1}$ car ayant obtenu un face au premier tirage, la probabilité de ne pas avoir 2 piles consécutifs du 2e tirage au $n+2$ième tirage est la même que celle ***partant*** du 1er tirage au $n+1$ième tirage (par indépendance et répétition des expériences).

- Comme pour le précédent, $P(B_{n+2}|\overline{F_1} \cap F_2) = p_n$ car ayant obtenu face au 2ième tirage, la probabilité de ne pas obtenir 2 piles consécutifs entre le 3ième tirage et le $n+2$ième tirage est la même que celle entre le 1er tirage et le n-ième tirage, qui par définition est p_n.

4) J'espère que vous savez correctement résoudre ce genre de récurrences à 2 termes car c'est au programme. On écrit l'équation caractéristique qui est $X^2 = \frac{1}{2}X + \frac{1}{4}$ dont les 2 racines sont $\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$. On sait alors que les suites vérifient $p_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ On trouve α,β par les conditions initiales : $p_1 = \alpha+\beta = 1$ et $\frac{3}{4} = p_2 = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$ plus compliqué… Mais heureusement, on n'a pas besoin de résoudre : comme $\left|\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}\right| < 1$, on a immédiatement que $p_n \longrightarrow 0$ ce qui correspond bien à l'intuition : on finira par avoir 2 piles consécutifs…

5) On a évidemment, que si on a obtenu 2 piles consécutifs, il existe n entier tel que on les a obtenus au bout de n tirages, donc $\exists n \in \mathbb{N},\ A \subset A_n$. Ceci nous donne $A \subset \bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n$. On a aussi, pour tout entier n, si on a obtenu 2 piles consécutifs en n tirages, on les a obtenus… donc $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A$. Ceci nous donne $\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n \subset A$, soit finalement $A = \bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n$. Je laisse, de la même manière, le lecteur constater par lui-même que la suite A_n est croissante $A_n \subset A_{n+1}$. On applique alors la propriété de ***continuité croissante*** d'une probabilité (cours) :

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{n=2}^{+\infty} A_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - p_n = 1$$

On vient donc de démontrer qu'on aura ***presque sûrement*** 2 piles consécutifs sur un lancer illimité.

Centrale PSI 2018 (tirage dans une urne avec remise boules) ✷

Ex 19 Soit a et b deux entiers strictement positifs. On place b boules blanches et b boules noires dans une urne. On effectue une succession de tirages avec remise et chaque fois que l'on tire une boule blanche, on rajoute a boules blanches supplémentaires dans l'urne. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement « on n'a tiré que des boules blanches au cours des n premiers tirages »et on pose $p_n = P(A_n)$.

1) Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{b+an}{2b+an} p_n$.

2) Déterminez la limite de la suite p_n.

1) On note l'événement $B_k = \{$on a tiré une boule blanche au k-ième tirage$\}$. Alors $A_n = B_1 \cap \cdots \cap B_n$ puis :

$$P(A_{n+1}) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_n \cap B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) = P(B_{n+1}|A_n)P(A_n) = \frac{b+na}{2b+na}P(A_n)$$

puisque, si l'événement A_n est réalisé, il y a $b+na$ boules blanches dans l'urne et b boule noires

2) $p_n \geq 0$ et $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ dc $p_n \searrow$ puis $p_n \geq 0$ est minorée donc la suite (p_n) converge. Une récurrence immédiate amène :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{b+ka}{2b+ka} \quad \Longrightarrow \quad \ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\Big(\frac{b+ka}{2b+ka}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \ln\Big(1 - \frac{b}{2b+ka}\Big)$$

La suite $(\ln p_n)$ converge ssi la série $\sum \ln\big(1 - \frac{b}{2b+na}\big)$ converge. Or $\ln\big(1-\frac{b}{2b+na}\big) \sim \frac{-1}{2b+na}$. Il en suit la divergence de la série et, comme les termes sont ***négatifs*** (au moins àpcr par l'équivalence), $\ln(p_n) \longrightarrow -\infty$ puis $p_n = \exp\big(\ln(p_n)\big) \longrightarrow e^{-\infty} = 0$.

Ex 20 On met en vente 50 « *enveloppes mystère* ». Chaque joueur ouvre l'enveloppe dès qu'il l'a achetée et découvre s'il a gagné ou perdu. Une seule des enveloppes est gagnante et on suppose que le jeu s'arrête dès que l'enveloppe a été découverte. Préférez-vous être le 1er acheteur ? le deuxième ? En supposant que l'on peut choisir, quel rang d'acheteur est le « *plus stratégique* » ?

Pour réussir ce genre d'exercices, il faut bien « *nommer* » ses événements. On note les événements $A_i = \{$le i-ième acheteur a gagné$\}$ et $G_i = \{$le jeu s'arrête à la i-ième étape$\}$. On a par définition du jeu $G_i = A_i \cap \overline{A_{i-1}} \cap \cdots \cap \overline{A_1}$. Les événements A_i ne sont pas indépendants, on applique donc la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
&P(G_1) = P(A_1) && = \frac{1}{50}\\
&P(G_2) = P(A_2 \cap \overline{A_1}) = P(A_2|\overline{A_1}) \times P(\overline{A_1}) = \frac{1}{49} \times \frac{49}{50} && = \frac{1}{50}\\
&P(G_3) = P(A_3 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_1}) = P(A_3|\overline{A_2} \cap \overline{A_1}) \times P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) \times P(\overline{A_1}) = \frac{1}{48} \times \frac{48}{49} \times \frac{49}{50} && = \frac{1}{50}\\
&\quad \dots\\
&P(G_i) = \underbrace{P(A_i|\overline{A_{i-1}} \cap \dots \cap \overline{A_1})}_{\frac{1}{50-i+1}} \times \underbrace{P(\overline{A_{i-1}}|\overline{A_{i-2}} \cap \dots \cap \overline{A_1})}_{\frac{50-i+1}{50-i+2}} \times \dots \times \underbrace{P(\overline{A_2}|\overline{A_1})}_{\frac{48}{49}} \times \underbrace{P(\overline{A_1})}_{\frac{49}{50}}\\
&\qquad = \frac{1}{50-i+1} \times \prod_{k=2}^{i} \frac{50-i+k-1}{50-i+k} && = \frac{1}{50}
\end{aligned}$$

Expliquons $P(A_3|\overline{A_2} \cap \overline{A_1})$: à la 1[re] étape et à la 2[e] étape, les 2 joueurs ont tiré des enveloppes perdantes, par conséquent il ne reste que 48 enveloppes dont 1 gagnante, d'où probabilité de $\frac{1}{48}$. Expliquons $P(A_i|\overline{A_{i-1}} \cap \dots \cap \overline{A_1})$. Il y a eu $i-1$ tirages d'enveloppes perdantes, par conséquent au i-ième tirage (achat d'enveloppe exactement), il ne reste plus que $50-(i-1) = 50-i+1$ enveloppes dont une gagnante, donc $P(A_i|\overline{A_{i-1}} \cap \dots \cap \overline{A_1}) = \frac{1}{50-i+1}$ et ***inversement***, $P(\overline{A_i}|\overline{A_{i-1}} \cap \dots \cap \overline{A_1}) = \frac{50-i+1-1}{50-i+1}$. Pour répondre à la question, comme toutes les probabilités valent $\frac{1}{50}$, on n'a pas plus de chances de gagner quel que soit l'ordre de tirage de l'enveloppe…

Centrale PSI 2018 (tirage dans une urne avec remise boules) ✷

Ex 24 Soit a et b deux entiers strictement positifs. On place b boules blanches et b boules noires dans une urne. On effectue une succession de tirages avec remise et chaque fois que l'on tire une boule blanche, on rajoute a boules blanches supplémentaires dans l'urne. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement « on n'a tiré que des boules blanches au cours des n premiers tirages »et on pose $p_n = P(A_n)$.

1) Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{b+an}{2b+an} p_n$.

2) Déterminez la limite de la suite p_n.

1) On note l'événement $B_k = \{\text{on a tiré une boule blanche au k-ième tirage}\}$. Alors $A_n = B_1 \cap \dots \cap B_n$ puis :

$$P(A_{n+1}) = P(B_1 \cap \dots \cap B_n \cap B_{n+1}) = P(A_n \cap B_{n+1}) = P(B_{n+1}|A_n)P(A_n) = \frac{b+na}{2b+na} P(A_n)$$

puisque, si l'événement A_n est réalisé, il y a $b+na$ boules blanches dans l'urne et b boule noires

2) $p_n \geq 0$ et $\frac{p_{n+1}}{p_n} < 1$ dc $p_n \searrow$ puis $p_n \geq 0$ est minorée donc la suite (p_n) converge. Une récurrence immédiate amène :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{b+ka}{2b+ka} \implies \ln(p_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{b+ka}{2b+ka}\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 - \frac{b}{2b+ka}\right)$$

La suite $(\ln p_n)$ converge ssi la série $\sum \ln\left(1 - \frac{b}{2b+na}\right)$ converge. Or $\ln\left(1 - \frac{b}{2b+na}\right) \sim \frac{-1}{2b+na}$. Il en suit la divergence de la série et, comme les termes sont ***négatifs*** (au moins àpcr par l'équivalence), $\ln(p_n) \longrightarrow -\infty$ puis $p_n = \exp\left(\ln(p_n)\right) \longrightarrow e^{-\infty} = 0$.

Ex 22 On considère 3 urnes A, B et C identiques : elles contiennent boules blanches et noires, la proportion de boules blanches étant de $p = \frac{2}{3}$. On effectue n tirages avec remise selon le même protocole suivant : au départ on tire une boule dans l'urne A. Si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne. Sinon, on tire la boule suivante dans l'une des 2 autres urnes choisie équiprobablement.

On appelle p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche an n-ième tirage et a_n (rp. $b_n,\ c_n$) la probabilité pour que le n-ième tirage soit effectué dans l'urne A (rp. B, C). On note aussi X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1) Donnez p_1 et X_1.

2) Avec la formule des probabilités totales, montrer il existe une matrice M indépendante de n, tq $X_{n+1} = MX_n$.

3) Diagonalisez la matrice $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4) En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n puis leurs limites. Qu'en déduit-on?

---

1) Par définition, $p_1 = p = \dfrac{2}{3}$ et comme la première boule est tirée dans l'urne A, $a_1 = 1,\ b_1 = 0$ et $c_1 = 0$ soit $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ (la transposée est là pour une commodité de traitement de texte).

2) On utilise les événements $A_n = \{\text{le } n\text{-ième tirage est effectué dans l'urne } A\}$ et identiquement pour B_n, C_n. Par définition $a_n = P(A_n),\ b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$. (A_n, B_n, C_n) est clairement un ***système complet d'événements***, cad $A_n \cup B_n \cup B_n = \Omega$ (puisque l'on tire nécessairement ***ou*** dans A ***ou*** dans B ***ou*** dans C) et l'***incompatibilité*** est immédiate aussi. On applique donc la ***formule des probabilités totales*** à l'événement A_{n+1} :

$$\underbrace{P(A_{n+1})}_{a_{n+1}} = P(A_{n+1} \mid A_n)\ \underbrace{P(A_n)}_{a_n} + P(A_{n+1} \mid B_n)\ \underbrace{P(B_n)}_{b_n} + P(A_{n+1} \mid C_n)\ \underbrace{P(C_n)}_{c_n}$$

▶ $P(A_{n+1}|A_n)$: ***Sachant qu'***on a tiré la n-ième boule dans l'urne A, alors on n'effectue le $n+1$-ième tirage dans cette même urne ***que si*** la boule tirée est blanche, tirage de probabilté $\frac{2}{3}$. Par conséquent $P(A_{n+1} \mid A_n) = \dfrac{2}{3}$

▶ $P(A_{n+1}|B_n)$: ***Sachant qu'***on a tiré la n-ième boule dans l'urne A, alors on n'effectue le $n+1$-ième tirage dans l'urne B ***que si*** la boule tirée est noire, tirage de probabilité $\frac{1}{3}$, avec équiprobabilité avec l'urne C. Par conséquent $P(A_{n+1} \mid B_n) = P(A_{n+1} \mid C_n) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2}{3}$

On obtient $a_{n+1} = \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{1}{6}c_n$. De même, $b_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{2}{3}b_n + \dfrac{1}{6}c_n,\ c_{n+1} = \dfrac{1}{6}a_n + \dfrac{1}{6}b_n + \dfrac{2}{3}c_n$ d'où :

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

3) La matrice M étant ***symétrique réelle*** est diagonalisable et les espaces propres sont ***orthogonaux*** (c'est utile pour les calculs). ***Prêter attention*** au $\frac{1}{6}$: je rappelle $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$ et aussi $\lambda I_3 - \dfrac{1}{6}A = \dfrac{1}{6}(6\lambda I_3 - A)$. On calcule usuellement les valeurs propres par les racines du polynôme caractéristique et on se rappelle, pour gagner du temps, que les 2 premiers termes sont ***toujours*** $\lambda^n - \operatorname{tr}(M)\lambda^{n-1}$:

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) = \left|\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6\lambda-4 & -1 & -1 \\ -1 & 6\lambda-4 & -1 \\ -1 & -1 & 6\lambda-4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6^3}\begin{vmatrix} 6\lambda-4 & -1 & -1 \\ -1 & 6\lambda-4 & -1 \\ -1 & -1 & 6\lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{Sarrus[1]}}{=} \frac{1}{6^3}\Big((6\lambda-4)^3 - 2 - 3(6\lambda-4)\Big) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \frac{1}{216}\big(288-18\big)\lambda + \frac{1}{216}\big(-64+10\big)$$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 + \frac{5}{4}\lambda - \frac{1}{4} = \big(\lambda-1\big)\big(\lambda - \frac{1}{2}\big)^2$$

▶ Comme on sait la matrice M diagonalisable, on sait que l'espace propre associé à $\frac{1}{2}$ est de dimension égale à sa multiplicité, soit 2, cad un plan (hyperplan de $\mathbb{R}^3$), qu'on trouve immédiatement : $P : x+y+z=0$:

$$MX = \frac{1}{2}X \iff \big(\frac{1}{2}I - M\big)X = 0 \iff \begin{cases} -x-y-z &= 0 \\ -x-y-z &= 0 \\ -x-y-z &= 0 \end{cases}$$

▶ Comme les espaces propres sont orthogonaux, c'est une perte de temps de calculer la droite espace propre associé à 1, c'est nécessairement $D = P^{\perp} = \operatorname{Vect}(1,1,1)$.

Pour diagonaliser, on prend pour base de $E(\frac{1}{2})$: $\big((1,-1,0) = u_1, (1,0,-1) = u_2\big)$ et $u_3 = (1,1,1)$ pour $E(1)$. Comme $E(\frac{1}{2}) \oplus E(1) = \mathbb{R}^3$ par diagonalisabilité, on sait (u_1, u_2, u_3) base de $\mathbb{R}^3$.

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et par formule de changement de bases, on sait que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$

4)

Méthode 1 : Calcul usuel de la puissance n-ième par diagonalisation

On calcul d'abord P^{-1} par la méthode usuelle du système associé, cad $Y = PX \iff X = P^{-1}Y$:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x+y+z &= u \\ -x+z &= v \\ -y+z &= w \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z \\ y &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z \\ z &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \end{cases} \Longrightarrow P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $M^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$ qui amène la ***disposition*** du calcul suivant :

$$\begin{array}{cccc} & & \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{D^n} & \overbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{P^{-1}} \\ M^n = & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{P} & \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} & 1 \\ -\frac{1}{2^n} & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2^n} & 1 \end{pmatrix}}_{PD^n} & \underbrace{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{2^n}+1 & \frac{-1}{2^n}+1 & \frac{-1}{2^n}+1 \\ \frac{-1}{2^n}+1 & \frac{2}{2^n}+1 & \frac{-1}{2^n}+1 \\ \frac{-1}{2^n}+1 & \frac{-1}{2^n}+1 & \frac{2}{2^n}+1 \end{pmatrix}}_{PD^nP^{-1}=M^n} \end{array}$$

1. **Sarrus Pierre-Frédéric** : français (1798-1861). Connu pour méthode de calcul éponyme du déterminant d'ordre 3.

Méthode 2 : Calcul usuel par un polynôme annulateur :

Je rappelle que cette méthode est en général plus rapide (on ne calcule ni les vecteurs propres, ni P^{-1}) et a en plus l'avantage de « *marcher* » même quand la matrice n'est pas diagonalisable. Il faut juste disposer d'un polynôme annulateur de bas degré. M étant ***diagonalisable*** de spectre $\mathrm{Sp}\, M = \{\frac{1}{2}, 1\}$, on sait que $P(X) = (X-1)(X-\frac{1}{2})$ est un ***polynôme annulateur*** de M (révisez votre cours!). Le ***théorème de la division euclidienne*** de X^n par $P(X)$ amène l'existence d'un quotient Q_n et d'un reste (de degré ≤ 1) donné par les deux réels a_n et b_n tels que $X^n = Q_n(X)(X-1)(X-\frac{1}{2}) + a_n X + b_n$. les valeurs en $X = 1$ et $X = \frac{1}{2}$ amènent :

$$\left\{\begin{array}{ccc} 1^n & = & a_n + b_n \\ \frac{1}{2^n} & = & \frac{1}{2}a_n + b_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} a_n & = & \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big) \\ b_n & = & \frac{2}{2^n} - 1 \end{array}\right.$$

Puis en « *remplaçant* » X par M, il vient :

$$M^n = \frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{2^n}\Big)M + \Big(\frac{2}{2^n}-1\Big)I_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{2^n}+1 & \frac{-1}{2^n}+1 & \frac{-1}{2^n}+1 \\ \frac{-1}{2^n}+1 & \frac{2}{2^n}+1 & \frac{-1}{2^n}+1 \\ \frac{-1}{2^n}+1 & \frac{-1}{2^n}+1 & \frac{2}{2^n}+1 \end{pmatrix}$$

Terminaison (pour les 2 méthodes) :

$$X^n = M^{n-1}X_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{2}{2^{n-1}}+1 & \frac{-1}{2^{n-1}}+1 & \frac{-1}{2^{n-1}}+1 \\ \frac{-1}{2^{n-1}}+1 & \frac{2}{2^{n-1}}+1 & \frac{-1}{2^{n-1}}+1 \\ \frac{-1}{2^{n-1}}+1 & \frac{-1}{2^{n-1}}+1 & \frac{2}{2^{n-1}}+1 \end{pmatrix}$$

On en tire $a_n = \dfrac{2}{3\,2^{n-1}} + \dfrac{1}{3}$ et $b_n = c_n = \dfrac{-1}{3\,2^{n-1}} + \dfrac{1}{3}$. On a immédiatement $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n = \dfrac{1}{3}$. Le tirage devient donc équiprobable entre les 3 urnes, même en « *partant* » de l'urne A avec une probabilité plus forte.