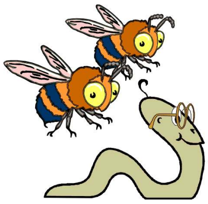
Feuille d'Exercices 8

Espaces Probabilisés



Ensembles dénombrables

Un ensemble E est dit ***dénombrable*** (ou de cardinal infini dénombrable) ssi il peut être mis en ***bijection*** avec $\mathbb{N}$.
Il est dit ***au plus dénombrable*** ssi il est de cardinal fini ou infini dénombrable.

Théorème : Une réunion ***au plus dénombrable*** $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ d'ensembles dénombrables est dénombrable.
Un produit cartésien ***fini*** $A_1 \times \cdots \times A_n$ d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Ex 1 ✍ ✌Montrez que l'ensemble des entiers impairs est dénombrable.

Ex 2 Soit (f_n) une suite d'applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et f l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(n) = f_n(n) + 1$

1) Démontrez que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $f \neq f_p$.

2) En déduire que l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Ex 3 ✍ ✷

1) On rappelle que tout entier $n \in \mathbb{N}$ peut s'écrire en binaire. Ecrire les nombres 11, 1245, 2^n, $2^n - 1$ en binaire.

2) On admet que tout réel peut s'écrire sous la forme d'un développement binaire $\sum_{k=-\infty}^{n} a_k 2^k$ avec $a_k \in \{0,1\}$ et $a_n = 1$. Donnez le développement de $1.5, 1/8, 1/3$.

3) Construire alors « *naturellement* » une application de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ dans $[0,1]$.

4) En déduire $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ non dénombrable, puis $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ non dénombrable.

Espaces Probabilisés

Soit $\mathscr{A}$ une tribu sur Ω. On appelle ***probabilité*** sur $(\Omega, \mathscr{A})$, toute application $P : \mathscr{A} \longrightarrow [0,1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***d'événements*** de $\mathscr{A}$, 2 à 2 ***incompatibles*** $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$

L'espace $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est alors appelé ***espace probabilisé***.

Ex 4 ✌Soient A, B, C 3 évènements d'un espace proba. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Exprimez (ensemblistement) l'évènement :

1) Aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé.

2) Un seul des 3 évènements A, B ou C est réalisé.

3) Au moins 2 des 3 évènements A, B ou C sont réalisés.

4) Pas plus de 2 des 3 évènements A, B ou C sont réalisés.

Ex 5

1) Combien de fois faut-il lancer un dé pour avoir au moins 1/2 chance d'obtenir un 6 ?

2) Idem avec 2 dés pour obtenir un « *double-six* » ?

CCP PSI 2017 (probabilité d'union et intersection) ✍

Ex 6 Soit $(A_k)_{1\le k\le n}$ une famille finie d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Montrez $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \le P(A_1) + \cdots + P(A_n) \le P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) + n - 1$

Mines-Ponts PSI 2018 (majoration probabilité d'une intersection)✍

Ex 7 Soit $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ des événements mutuellement indépendants. Montrez que la probabilité qu'aucun des A_k ne se réalise est inférieure à $\exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\Big)$.

Ex 8 On dispose r boules différentiées à l'intérieur de n urnes avec $r \leq n$, chaque urne pouvant contenir plusieurs boules. Les répartitions possibles sont équiprobables.

1) Donnez la probabilité de $A = \{$chaque urne contient au + une boule$\}$.

2) Donnez la probabilité de l'évènement $B = \{$il existe une urne contenant au - 2 boules$\}$.

Probabilités Conditionnelles

Formule des Probabilités Totales : Soit $(A_i)_{i\in I}$ un ***système quasi-complet d'événements***, alors :

$$\forall B \in \mathscr{A}, \quad P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i) = \sum_{i\in I} P_{A_i}(B)\, P(A_i) = \sum_{i\in I} P(B \mid A_i)\, P(A_i)$$

Formule des Probabilités composées : Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille ***finie*** d'événements tq $P\big(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\big) \neq 0$:

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) &= P(\mathbf{A_1}) \times P(\mathbf{A_2} \mid A_1) \times P(\mathbf{A_3} \mid A_1\cap A_2) \times \cdots \times P(\mathbf{A_n} \mid A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}) \\ &= P(\mathbf{A_1}) \times P_{A_1}(\mathbf{A_2}) \times P_{A_1\cap A_2}(\mathbf{A_3}) \times \cdots \times P_{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{n-1}}(\mathbf{A_n}) \end{aligned}$$

Ex 9 ✍ ✌Un tricheur dispose de 4 pièces dont une a 2 côtés pile. Il prend une pièce au hasard et la lance. Quelle est la probabilité d'obtenir pile ? (*utilisez la formule des probabilités totales*). Comparez.

Ex 10 ✍ Une suite d'individus $A_1, \dots, A_n$ se transmet une information. On suppose que l'individu A_k transmet l'information qu'il a reçu à l'individu A_{k+1} avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, ou sinon il transmet l'information « *contraire* » avec la probabilité $1-p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

1) Calculez p_1 et p_2.

2) Calculez la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1 (*utilisez la formule des probabilités totales*).

3) Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$? Interprétation ?

Mines-Ponts PSI 2015 (déplacement sur un carré)

Ex 11

1) Diagonalisez la matrice $J = \begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

2) Soit ABCD un carré sur lequel on se déplace comme suit :

- Si on se trouve sur A à l'étape n, on va en B avec la proba $\frac{1}{2}$, en D avec la proba $\frac{1}{3}$ et on reste en A avec la proba $\frac{1}{6}$.
- Si on se trouve sur B à l'étape n, on va en C avec la proba $\frac{1}{2}$, en A avec la proba $\frac{1}{3}$ et on reste en B avec la proba $\frac{1}{6}$.
- Si on se trouve sur C à l'étape n, on va en D avec la proba $\frac{1}{2}$, en B avec la proba $\frac{1}{3}$ et on reste en C avec la proba $\frac{1}{6}$.
- Si on se trouve sur D à l'étape n, on va en A avec la proba $\frac{1}{2}$, en C avec la proba $\frac{1}{3}$ et on reste en D avec la proba $\frac{1}{6}$.

On note a_n la probabilité d'être en A à l'étape n. Calculez la limite de la suite (a_n).

BQCCP MP 2023->2015 (dés pipés)✍

Ex 12

1) Enoncez et démontrez la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

2) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chifre 6 vaut $\frac{1}{2}$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Probabilité que le dé soit pipé ?

3) Mêmes conditions. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ? Déterminez $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interprétez le résultat.

CCINP PSI 2021 (tirage nombre pair de boules dans une urne)✍

Ex 13 Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On réalise n tirages avec remise.

1) Soit B_i l'événement « *on tire i boules blanches* ». Calculez $P(B_i)$

2) Montrez $\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2i} x^{2i} = \frac{1}{2}\big((1+x)^n + (1-x)^n\big)$.

3) Calculez la probabilité de tirer un nombre pair de boules blanches.

Mines-Ponts PSI 2022 (probabilité dans étage d'un immeuble) ✷✍

Ex 14 Considérons un immeuble à 7 étages où l'on cherche une personne. Cette personne est dans l'immeuble avec une probabilité $p \in \left]0,1\right[$ et, si elle est dans l'immeuble, elle se trouve à chaque étage avec la même probabilité. On a cherché dans les 6 premiers étages en vain. Probabilité qu'elle soit dans le dernier étage ?

Mines-Ponts PSI 2022 (probabilité d'être un dérangement) ✷✍

Ex 15 Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, D_n le nombre de permutations de $[\![1;n]\!]$ sans point fixe et p_n la probabilité qu'une permutation de $[\![1;n]\!]$ choisie au hasard soit sans point fixe. Par convention, $p_0 = 1$.

1) Montrez, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)!} = 1$

2) En déduire que, pour $x \in \left]-1,1\right[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n = \frac{e^{-x}}{1-x}$

3) Montrez $p_n \longrightarrow \frac{1}{e}$

Ex 16 ✍ Deux joueurs A et B lancent à tour de rôle une pièce truquée. Le joueur A commence et la pièce amène Face avec la probabilité $p \in]0,1[$. Le premier qui obtient Face gagne le jeu, qui s'arrête alors.

1) Quelle est la probabilité pour que A gagne lors de son n-ième lancer ?

2) Quelle est la probabilité pour que A gagne ?

3) Quelle est la probabilité pour que le jeu ne s'arrête pas ?

4) Y a t-il une valeur de p qui assure que les 2 joueurs aient la même probabilité de gagner ?

BQCCINP MP 2023->2015 (animal dans le désert et point d'eau) ✍

Ex 17

Dans une zone désertique, un animal erre entre 3 points d'eau A, B et C. A l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point d'eau qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n (rp. B_n, C_n) l'événement « *l'animal est en A (rp. B, C) après son* n^e *trajet* ». On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1) Exprimez, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n et de même b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n, c_n.

2) On considère la matrice $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

• Justifiez, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

• Prouvez que $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de A et déterminez le sous-espace propre associé.

• Déterminez une matrice P inversible et une matrice D diagonales de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$. (le calcul de P^{-1} n'est pas demandé).

3) Calculez a_n, b_n, c_n puis leur limites lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Interprétation ?

Ex 18 ✍ Dans une succession de n lancers « *pile / face* » indépendants, on note p_n la probabilité qu'on n'obtienne pas deux piles consécutifs.

1) Calculez p_1, p_2 et p_3.

2) On considère les événements $F_i = \{\text{on obtient face au } i\text{-ième lancer}\}$ avec $i \in \{1,2\}$. Montrez que $(F_1 \cap F_2, \overline{F_1} \cap F_2, F_1 \cap \overline{F_2}, \overline{F_1} \cap \overline{F_2})$ est un système complet d'événements de Ω.

3) En utilisant un système complet d'événements un peu mieux choisi, établir la réc. $p_{n+2} = \dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}p_{n+1}$.
(*Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales*)

4) Montrez que la suite (p_n) converge vers 0.

5) Dans cette question, on effectue successivement et indéfiniment des lancers « *pile / face* » (supposés indépendants). Soit l'événement $A = \{\text{on obtient deux piles consécutifs}\}$. Donner un univers décrivant cette expérience aléatoire, et précisez, en le justifiant, $P(A)$.

Centrale PSI 2018 (tirage dans une urne avec remise boules) ✷✍

Ex 19 Soit a et b deux entiers strictement positifs. On place b boules blanches et b boules noires dans une urne. On effectue une succession de tirages avec remise et chaque fois que l'on tire une boule blanche, on rajoute a boules blanches supplémentaires dans l'urne. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement « on n'a tiré que des boules blanches au cours des n premiers tirages »et on pose $p_n = P(A_n)$.

1) Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{b+an}{2b+an} p_n$.

2) Déterminez la limite de la suite p_n.

Ex 20 ✍ On met en vente 50 « *enveloppes mystère* ». Chaque joueur ouvre l'enveloppe dès qu'il l'a achetée et découvre s'il a gagné ou perdu. Une seule des enveloppes est gagnante et on suppose que le jeu s'arrête dès que l'enveloppe a été découverte. Préférez-vous être le 1er acheteur ? le deuxième ? En supposant que l'on peut choisir, quel rang d'acheteur est le « *plus stratégique* » ?

X PSI 2021 (premier succès 2 faces consécutifs) ✷ ✷
Ex 21 On lance une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir pour la première fois Face-Face au n-ième lancer ?

Ex 22 ✍ On considère 3 urnes A, B et C identiques : elles contiennent boules blanches et noires, la proportion de boules blanches étant de $p = \frac{2}{3}$. On effectue n tirages avec remise selon le même protocole suivant : au départ on tire une boule dans l'urne A. Si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne. Sinon, on tire la boule suivante dans l'une des 2 autres urnes choisie équiprobablement.
On appelle p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche an n-ième tirage et a_n (rp. b_n, c_n) la probabilité pour que le n-ième tirage soit effectué dans l'urne A (rp. B, C). On note aussi X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1) Donnez p_1 et X_1.

2) Avec la formule des probabilités totales, montrer il existe une matrice M indépendante de n, tq $X_{n+1} = MX_n$.

3) Diagonalisez la matrice $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4) En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n puis leurs limites. Qu'en déduit-on ?

Ex 23 ✷ Alice et Bruno lancent le même dé à tour de rôle. C'est Alice qui commence. Le gagnant est le premier à obtenir un 6. Quelle est la probabilité que Alice gagne ? Bruno gagne ?
On introduira les événements $A = \{$victoire d'Alice$\}$, $B = \{$victoire de Bruno$\}$, $D = \{$pas de vainqueur$\}$, $F_n = \{$fin de la partie an n-ième lancer$\}$, $S_n = \{$le n-ième lancer donne un 6$\}$

Ex 24 On dispose de n urnes contenant chacune 3 boules. Parmi ces $3n$ boules, l'une seule est jaune, toutes les autres sont bleues. On ignore dans quelle urne est la boule jaune.

1) On tire sans remise deux boules de l'urne 1. On considère les événements $B_1 = \{$les 2 boules tirées sont bleues$\}$ et $J_1 = \{$la boule jaune est dans l'urne 1$\}$. Calculez $P(B_1)$.

2) Quelle est la probabilité que la boule jaune soit dans l'urne 1 si le tirage a donné 2 bleues ?

3) On reprend l'expérience avec cette fois n personnes chacune face à une urne où elles tirent simultanément et sans remise 2 boules. on considère les événements B_i et J_i définis de manière analogue à la question précédente. Que vaut $P(\overline{B_i}|J_k)$ pour $1 \leq i, k \leq n$? En déduire $P(B_i)$.

4) Expliquez sans calcul pourquoi les événements B_i et B_j ne sont pas indépendants.

5) Calculez $P(B_i \cap B_j | J_k)$, puis $P(B_i \cap B_j)$.

6) Généralisez avec $P(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_r})$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$.

7) Voyez-vous une autre méthode pour obtenir ce résultat ?