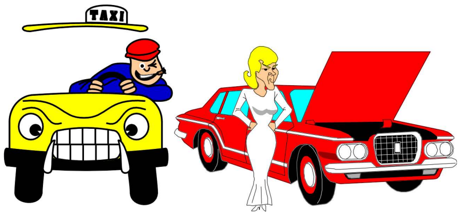
Classe de PSI

Feuille d'Exercices 8



☞ ***Themes des semaines du 3 Janvier 2017***

— Ev préhilbertiens réels et ev euclidiens. Produits scalaires. Projections, symétries orthogonales. Endomorphismes orthogonaux

— Ev euclidiens de dim 3. Endomorphismes et symétriques. Diagonalisable dans BON.

✌ **Ex 1** Montrez $f(A,B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$ est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$. On pose $J = \begin{pmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Montrez (I_3, J) famille orthogonale puis calculez le projeté orthogonal de K sur l'ev engendré par (I, J).

Ex 2 On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \to \sum_{k=0}^{n} P^{(i)}(0)Q^{(i)}(0)$

1) Montrez rapidement que c'est un produit scalaire.

2) Explicitez une BON de $\mathbb{R}_2[X]$.

Ex 3 On se place dans le $\mathbb{R}$-ev E des suites réelles bornées. On définit$((u_n)|(v_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{u_n v_n}{2^n}$

✌ **1)** Montrez que c'est un produit scalaire sur E.

2) Donnez le supplémentaire orthogonal du sous-ev F des suites presque-nulles (cad nulles apcr).

Ex 4 Soit $(E, (|))$ un espace préhilbertien réel. F et G sous-ev. Etablir $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$. Montrez que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$ est vraie si F et G sont de dimension finie.

Ex 5 On se place dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique. On se donne F d'équation $\begin{cases} x+y+z+t=0\\ x-y+z-t=0\end{cases}$

1) Montrez rapidement F plan et donnez une BON De $F^\perp$.

2) Ecrire la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur F.

Ex 6 On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni des sa structure euclidienne canonique et on se donne une matrice colonne $V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrez que l'endomorphisme de matrice $I - 2V\,{}^tV$ représente une symétrie, puis montrez qu'elle orthogonale et donnez ses caractéristiques.

Ex 7 Soit p une projection de E espace euclidien ou hermitien. Etablir

$$p \text{ est une projection orthogonale} \iff \forall x \in E,\quad \|p(x)\| \le \|x\| \quad (p \text{ 1-lipschitzienne})$$

Ex 8 $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrez $\operatorname{Ker} {}^tAA = \operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} {}^tAA = \operatorname{Im} A$

Ex 9 Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Montrez $\sum_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \le n\sqrt{n}$ (*utilisez* ***Cauchy***[1]*-**Schwarz***[2]).

Ex 10 Calculez $\inf_{M=(m_{ij})\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (i - m_{ij})^2$ (*On utilisera une distance*).

Ex 11 Soit $p \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-2&1\\-2&2&2\\1&2&5\end{pmatrix}$. Montrez projection orthogonale sur un plan.

Ex 12 Soit ω un vecteur unitaire d 'un espace euclidien E de dimension 3. Reconnaitre $x \to \omega \wedge (\omega \wedge x)$

Ex 13 Matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation d'axe orienté par $\frac{1}{3}(1,2,2)$ et d'angle $\pi/2$?

✌ **Ex 14** Montrez le seul endo symétrique verifiant $\forall x \in E \quad (x|f(x)) = 0$ est l'application nulle

1. **Augustin-Louis Cauchy** : français (1789-1857). Oeuvre considérable, plus de 700 mémoires. A l'origine de l'Analyse moderne par rigorisation des limites et de la continuité. Travaux en théorie des fonctions d'une variable réelle et complexe et en théorie des groupes.
2. **Hermann Schwarz** : mathématicien allemand (1843-1921).

Ex 15 Soit $(u_1,\dots,u_n)$ une base d'un ev euclidien. Montrez que l'endomorphisme $f(x)=\sum_{k=1}^{n}(u_k|x)u_k$ est symétrique de valeurs propres strictement positives.

Ex 16 Soit u un endomorphisme symétrique d'un $\mathbb{R}$-ev euclidien E. Montrez $\operatorname{Im} u = (\operatorname{Ker} u)^{\perp}$

Ex 17 Soit $S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique à valeurs propres positives (on dit matrice symétrique positive et on note $S\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$). Montrez : $S\in\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}) \iff \forall X\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tXSX\geq 0 \iff \exists B\in M_n(\mathbb{R})$ tq $S={}^tBB$

Ex 18 Soit $\omega(a,b,c)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique. Ecrivez la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur $\mathbb{R}.\omega$.

Ex 19 Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien de dimension n. A toute base orthonormée $\mathscr{E}=(e_i)_{1\leq i\leq n}$, on associe $A(\mathscr{E})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(u(e_i)|e_j\right)^2$. Montrez que A ne dépend que de u et trouvez son expression.

Ex 20

1) Déterminez tous les automorphismes orthogonaux diagonalisables d'un plan euclidien

2) Caractérisez tous les endomorphismes de $O(E)$ diagonalisables d'un $\mathbb{R}$-ev euclidien.

Ex 21 Démontrez pour tous vecteurs en dim 3, $\|u\wedge v\|^2+(u|v)^2=\|u\|^2\|v\|^2$.

Ex 22 Reconnaître l'endomorphime de $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique de matrice $\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12&5\\5&-12\end{pmatrix}$

Ex 23 Soit $u\in S(E)$. E de dim n, $\lambda_1\leq\cdots\leq\lambda_n$ ses valeurs propres. Etablir $\lambda_1\|x\|^2\leq(u(x)|x)\leq\lambda_n\|x\|^2$.

Ex 24 On munit $E=C^\infty([-1,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire usuel $(f|g)=\int_{-1}^{1}fg$. Prouvez que l'endomorphisme φ de E défini par $\varphi(f)(x)=(1-x^2)f''(x)-2xf'(x)$ est un endom. symétrique de E.

Ex 25 Trouvez toutes les matrices orthogonales à coefficients positifs.

Ex 26 Reconnaitre l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8&4&1\\4&7&4\\1&4&-8\end{pmatrix}$

Ex 27 Soit $A\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ antisymétrique. Montrez que 0 est la seule valeur propre réelle et est d'ordre 1.

Ex 28 ***Décomposition polaire***.

1) Soit A symétrique positive (cad $\forall X\neq 0,\ {}^tXAX>0$). Montrez il existe une unique « *racine-carrée positive* », cad une matrice symétrique positive S telle que $S^2=A$.

2) Soit $M\in\mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$. Montrez il existe une unique matrice orthogonale Q et matrice symétrique définie positive R telle que $M=QR$. (*Considérer* ${}^tMM$).

✷ **Ex 29** Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tAA=A\,{}^tA$ et $A^3=A^2$. Montrez ${}^tBB=0\implies B=0$ puis $A^2=A$.

✷ **Ex 30** Montrez, que pour tout automorphisme u orthogonal d'un $\mathbb{R}$-ev euclidien, la dim. de tout ses propre $E_\lambda(u)$ est toujours égal à la multiplicite de λ dans le polynôme caractéristique.

Ex 31 ***Inégalité d'Hadamard*** Soit $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir $|\det M|\leq\prod_{k=1}^{n}\|C_k\|$ les C_k sont les colonnes de M et $\|.\|$ la norme euclidienne canonique. (*Indication : On pourra appliquer Gram-Schmidt*).
Montrez que l'égalité est atteinte ssi les vecteurs-colonnes sont orthogonaux. Interprétation géométrique ?

✷ **Ex 32** <u>**Mineurs de Gauss**</u> Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. On note A_p $1\leq p\leq n$ les sous-matrices d'ordre p du "coin" en haut à gauche de A. les $\det A_p$ sont appelés les mineurs de Gauss.

1) Montrez $A\in S_n^+\implies\forall 1\leq p\leq n\quad\det A_p\geq 0$.

2) Montrez que la réciproque est fausse.

3) Montrez $A\in S_n^{++}\iff\forall 1\leq p\leq n\quad\det A_p>0$