Feuille d'Exercices 7 Déterminants

Ex 1 ✌ Calculez le déterminant d'ordre $2n$ avec A matrice carrée d'ordre 2 $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & A \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ A & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

Ex 2 Calculez $\det M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\forall 1 \leq i,j \leq n,\ M_{ij} = \delta_{\tau(i)j}$, τ une transposition

Ex 3 ✌ Montrez que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Ex 4 ✌ Soit E un ev de dimension 3 de base $\mathscr{E}$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On définit f sur E^3 par $f(x,y,z) = \det_{\mathscr{E}}(u(x),y,z) + \det_{\mathscr{E}}(x,u(y),z) + \det_{\mathscr{E}}(x,y,u(z))$. Montrez f trilinéaire alternée, puis $f = \operatorname{tr} u \det_{\mathscr{E}}$

Ex 5

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} \quad ✌ \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b & ac \\ 1 & b & c & bd \\ 1 & c & d & ac \\ 1 & d & a & bd \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & cb \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} b+c & c+d & d+a & a+b \\ b^2+c^2 & c^2+d^2 & d^2+a^2 & a^2+b^2 \\ b^3+c^3 & c^3+d^3 & d^3+a^3 & a^3+b^3 \\ b^4+c^4 & c^4+d^4 & d^4+a^4 & a^4+b^4 \end{vmatrix} = 0$$

MINES-PONTS PSI 2021 (NULLITÉ DÉTERMINANT 5×5) ✷

EX 6 Soient $x, y \in \mathbb{C}$. Montrez $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix} \neq 0$ ssi $x \neq y$.

CENTRALE PSI 2011

EX 7 Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. Calculez le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$

Ex 8

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & \dots & \dots & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \dots & \dots & n \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ n-1 & n-1 & \dots & \dots & \dots & n-1 & n \\ n & n & \dots & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & \dots & -2n \\ -1 & 2 & -3 & 4 & \dots & 2n \\ 1 & -2 & 3 & -4 & \dots & -2n \\ -1 & 2 & -3 & 4 & \dots & 2n \\ \vdots & & & \vdots & & \\ -1 & 2 & -3 & 4 & \dots & 2n \end{vmatrix}$$

$$✌ \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \ddots & & \iddots & b & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & b & \iddots & & \ddots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & \dots & 1 & a \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & C_2^1 & 1 & \ddots & & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \dots & \dots & C_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & & & \vdots \\ \vdots & 1 & 2-x & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & n-1-x & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 & n-x \end{vmatrix}$$

CCINP PSI 2021 (MATRICE COMPAGNON)

EX 9 Dans cet exercice, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_n \end{pmatrix}$

1) Calculez le polynôme caractéristique χ_A de A.

2) Soit ϕ un endomorphisme de E, où $\dim E = n+1$. ϕ est dit cyclique si $\exists x \in \mathbb{K}^{n+1}$ tq $(x, \phi(x), \dots, \phi^n(x))$ soit une base de E. Montrez alors que si ϕ est cyclique, alors il existe une matrice représentant ϕ de la forme de A.

3) ***PAS dans oral originel :*** Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$. On suppose que P a n racines distinctes notées $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Calculez $V^{-1}\, C\, V$ où V désigne la matrice de Vandermonde associée aux λ_i.

MINES-PONTS PSI 2017 (DÉTERMINANT $n \times n$ PAR DÉRIVATION) ☜ ✷

EX 10 On définit, pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$: $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & (0) & \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & x & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$

Montrez que D_n est dérivable et calculez D_n'. En déduire la valeur de D_n.

Ex 11 Soit M la matrice (n,n) de coefficients $M_{ij} = \sin(a_i + b_j)$ avec $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ réels. Montrez que $\det M$ est nul sans calcul explicite.

MINES-PONTS PSI 2014 (DÉTERMINANT D'ORDRE n) ✷

EX 12 Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^*$. Calculez le déterminant de la matrice $\left(\dfrac{a_i}{a_j} + \dfrac{a_j}{a_i}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Ex 13 Soit A un matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients valent 1 ou -1. Montrez que son déterminant est un multiple de 2^{n-1}. (*Indication : ajoutez la première colonne à toutes les autres*).

Ex 14 Soit U la matrice (n,n) de coeffs=1 et A définie par $A_{ii} = c$ $A_{ij} = b$ si $i < j$ et c sinon. Montrez (sans calcul explicite) que $\det(A + xU)$ est un polynôme de degré 1. En déduire $\det A$.

Ex 15 ✷ Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ $A, B, C, D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $AC = CA$. On va montrer $\det M = \det(AD - CB)$

1) Le montrer dans le cas A inversible. (*construire un produit de mat. par blocs*).

2) Conclure dans la cas A quelconque par densité.

Ex 16 ✷ Soit n un entier pair, A une matrice (n,n) antisymétrique à coefficients dans $\mathbb{K}$, α un scalaire et U la matrice de coefficients tous égaux à 1. Montrez $\det(A + \alpha U) = \det A$.