Ex 1

$$\boxed{f_n(x) = nx^n(1-x^2)}$$

Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) ***sur*** $[0,1]$ ***:***

On reprend les cas usuels de suite géométrique :

- Pour $0 \le x < 1$, $n\,x^n \longrightarrow 0$ puis, croissances comparées de n et x^n, $f_n(x) \to 0$.
- Pour $x = 1$, $f_n(1) = 0 \longrightarrow 0$.

Conclusion : la suite de fonctions (f_n) ***converge simplement*** vers la fonction nulle sur $I = [0,1]$

Etude de la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ***sur*** $[0,1]$ ***:***

On pose $g_n(x) = f_n(x) - 0 = nx^n(1-x^2)$ et on étudie ses variations (car c'est facile) ***sur*** $[0,1]$.

On a $g_n'(x) = \left(nx^n - nx^{n+2}\right)' = n^2x^{n-1} - n(n+2)x^{n+1} = nx^{n-1}\left(n-(n+2)x^2\right)$

x	0	a	$\sqrt{\frac{n}{n+2}}$	1
$g_n'(x)$	$+$		0	$-$
$g_n(x)$	0 $\nearrow$	$g_n(a)$	$g_n\left(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right)$	$\searrow$ 0

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-0\right| = \|f_n\|_{\infty,[0,1]} = f_n\Big(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\Big) = n\left(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\right)^n\left(1-\frac{n}{n+2}\right) = \frac{2n}{n+2}\Big(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\Big)^n \sim 2\Big(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\Big)^n$$

$$\Big(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\Big)^n = \exp\left(n\ln\Big(\sqrt{\frac{n}{n+2}}\Big)\right) = \exp\left(\frac{n}{2}\ln\left(\frac{n}{n+2}\right)\right) = \exp\left(\frac{-n}{2}\ln\Big(1+\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\Big)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{-n}{2}\Big(\frac{2}{n}+o\big(\frac{1}{n}\big)\Big)\right) = \exp\big(-1+o(1)\big) \longrightarrow e^{-1} \neq 0$$

Pas de convergence uniforme sur $[0,1]$.

Remarque : En regardant le tableau de variations d'un peu plus près, on conjecture qu'il y a convergence uniforme sur $[0,a]$ avec $a<1$ ***car*** à partir d'un certain rang $a < \sqrt{\frac{n}{n+2}}$ car $\sqrt{\frac{n}{n+2}} \to 1$. Par suite, regardez le tableau, $\sup_{x\in[0,a]}\left|f_n(x)-0\right| = \left|g_n(a)\right| \longrightarrow 0$

$$\boxed{f_n(x) = \frac{\ln^{2n}(x)-2}{\ln^{2n}(x)+2}}$$

.

On précise tout de suite que cette suite est bien définie puisque le dénominateur ne s'annule pas : $\ln^{2n}(x)+2 \geq 2>0$. On a affaire à des suites géométriques et on se rappelle que les cas se distinguent par rapport aux valeurs 1 et - 1, ce qui, via le log $\ln e = 1$ $\ln 1/e = -1$, amène les cas par rapport à e et $\frac{1}{e}$.

Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) ***sur*** $\mathbb{R}^{+*}$

- $\dfrac{1}{e} < x < e \Longrightarrow 0 \leq \mid \ln x \mid < 1$. Alors $|\ln x|^{2n} \to 0$ et $f_n(x) \sim \dfrac{-2}{2} = -1$
- $x < \dfrac{1}{e}$ ou $x > e \Longrightarrow \mid \ln x \mid > 1$. Alors $|\ln x|^{2n} \to +\infty$ et $f_n(x) \sim \dfrac{\ln^{2n}(x)}{\ln^{2n}(x)} = 1$
- $x = \dfrac{1}{e}$ ou $x = e$. Alors $|\ln x|^{2n} = 1$ et $f_n(x) = \dfrac{-1}{3} \longrightarrow -\dfrac{1}{3}$

Il y donc ***convergence simple sur*** $\mathbb{R}^{+*}$ vers la fonction f : $\begin{cases} -1 & \text{si } \frac{1}{e} < x < e \\ 1 & \text{si } x < \frac{1}{e} \text{ ou } x > e \\ -\dfrac{1}{3} & \text{si } x = \frac{1}{e} \text{ ou } x = e \end{cases}$

Etude de la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ***sur*** $\mathbb{R}^{+*}$

D'après un théorème du cours, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$ vers f car les fonctions f_n y sont continues, tandis que la fonction f ne l'est pas. (on rappelle que la convergence uniforme ne peut se faire que vers la ***limite simple*** f).

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1-nx) & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) ***:***

On prête très attention ici au fait que, comme $n \to +\infty$, les « *intervalles bougent* ». Pour chaque x, on peut avoir ou 0 ou $n^2 x(1-nx)$. la seule façon de bien traiter ce genre d'exercices est de les gérer avec ***à partir d'un certain rang (apcr)***. Fixons nous $x \in [0,1]$ (car ici c'est n qui « *bouge* »). Comme $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$, nécessairement ***à partir d'un certain rang***, $\frac{1}{n} < x \leq 1$ (sauf pour $x = 0$). par conséquent, ***apcr***, $f_n(x) = 0 \longrightarrow 0$. Pour $x = 0$, on a immédiatement $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$.

Conclusion : la suite de fonctions (f_n) ***converge simplement*** vers la fonction nulle sur [0,1].

Etude de la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ***:***

Ici, c'est plus simple, car n est fixé, c'est plutôt x qui « *bouge* ». Il suffit d'étudier les variations de $g_n(x) = f_n(x) - 0 = n^2 x(1-nx)$ ***mais sur*** $[0, \frac{1}{n}]$, donc de $h_n(x) = x(1-nx)$ car la variable d'étude est x (on multipliera ensuite par n^2). On $h_n'(x) = 1 - 2nx$.

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{n}$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{1}{2n})$	$\searrow$	0

$$\sum_{x\in[0,1]} \left| f_n(x) - 0 \right| = f_n(\frac{1}{2n}) = n^2 \frac{1}{2n}(1 - \frac{1}{2}) \longrightarrow +\infty$$

Il n'y a donc ***pas de convergence uniforme*** de la suite de fonctions (f_n) sur [0,1].

Remarque : Par contre, il y a convergence uniforme sur $\left[a, 1\right]$ avec $a > 0$: en effet, ***apcr*** $\frac{1}{n} < a$, donc $f_n(x) = 0$ et donc $\sup\limits_{x\in[a,1]} |f_n(x) - 0| = 0 \longrightarrow 0$.

$$\boxed{f_n(x)=\min\left(n,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}$$

Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) ***:***

On remarque que $\min\left(n,\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ si (ssi) $\frac{1}{\sqrt{x}}\le n \iff x\ge\frac{1}{n^2}$

Comme $\frac{1}{n^2}\to 0$, on en déduit que ***à partir d'un certain rang***, $f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Conclusion : Convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\left]0,+\infty\right[$ vers $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

Etude de la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ***:***

on écrit $|g_n(x)|=|f_n(x)-f(x)|$ qui vaut 0 si $x\ge\frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}-n$ sinon, cad si $0<x<\frac{1}{n^2}$.

Par suite $\sup_{\mathbb{R}^{+*}}\left|f_n(x)-f(x)\right|=+\infty$ (n est fixé mais $\frac{1}{\sqrt{0}}=+\infty$). Pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Remarque : Par contre, il y a convergence uniforme sur $\left[a,+\infty\right[$ $(a>0)$ ***car à partir d'un certain rang*** $\frac{1}{n^2}\le a$, donc $\sup_{x\in[a,+\infty[}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$

CCP PSI 2016 (suite de fonctions) ✌

Ex 2 Montrez que la suite de fonctions définies sur [0,1] par $f_n(0)=0$ et, pour $x>0$, $f_n(x)=x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{2n}$ converge simplement mais pas uniformément vers une fonction f que l'on précisera.

Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) ***sur*** $[0,1]$

Pour $x=0$, c'est la suite nulle de limite nulle. Sinon, à x fixé, c'est une suite géométrique de raison $\sin(\frac{1}{x})$. Pour $0<x\le 1$, $1\le\frac{1}{x}$ et il faut distinguer les cas où le sinus vaut ±1, qui sont les $\frac{\pi}{2}+k\pi$, avec $k\in\mathbb{N}$.

- Pour $x=\dfrac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$, $\sin^{2n}(\frac{1}{x})=1$, donc $f_n(x)=x\xrightarrow{n\to+\infty}x$.
- Sinon, $|\sin(\frac{1}{x})|<1$, donc $f_n(x)\xrightarrow{n\to+\infty}0$.

Conclusion : Convergence simple sur $[0,1]$ vers la fonction $f:\begin{cases}x & \text{si } x=\frac{1}{k\pi+\pi/2}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

Etude de la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ***sur*** $[0,1]$

Il est clair que les f_n sont continues sur $\left]0,1\right]$. Comme f n'est pas continue en tous les $\frac{1}{k\pi+\pi/2}$ qui appartiennent à $\left]0,1\right]$, il n'y a ***pas convergence uniforme*** sur $\left]0,1\right]$ et donc ***pas sur*** $[0,1]$.

Ex 4 Soit $f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $f_n:\begin{cases}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f\left(x+\dfrac{x(1-x)}{n}\right)\end{cases}$.

1) Montrez que f_n est correctement définie.

2) Etudiez la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n).

1) Pour montrer que f_n est définie, il faut et il suffit de vérifier $0\le x+\dfrac{x(1-x)}{n}=h_n(x)\le 1$ pour $x\in[0,1]$. A cette fin, on effectue une étude de variations de h_n

$$h_n'(x)=1+\frac{1}{n}(1-2x)=\frac{1}{n}(n+1-2x)$$

Pour $n\ge1$, $n+1\ge2\ge2x$ ***car*** $0\le x\le1$. Donc h_n ***croissante*** sur [0,1], donc $0=h_n(0)\le h_n(x)\le h_n(1)=1$.

2)

Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) ***:***

Il est immédiat que $h_n(x) \longrightarrow x$ et ceci pour tout x réel fixé.

Donc $f_n(x) = f\big(h_n(x)\big) \longrightarrow f(x)$ ***car*** f ***est continue en*** tout x.

Conclusion : La suite de fonctions (f_n) ***converge simplement*** vers la fonction f sur $[0,1]$.

Etude de la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) ***:***

Pour étudier la convergence uniforme, on doit étudier le sup de $|f_n(x) - f(x)|$ sur $[0,1]$. On se pose la question, est-ce que l'étude des variations est faisable ? Réponse : on ne sait rien sur f à ce propos, donc cela risque d'être difficile...

On peut remarquer $g_n(x) = f\big(h_n(x)\big) - f(x) = f\Big(x + \dfrac{x(1-x)}{n}\Big) - f(x)$

f étant de classe C^1 sur le ***segment*** $[0,1]$, f' y est ***continue*** et donc bornée (par M). Ensuite l'***inégalité des accroissements finis*** appliquée à f permet d'écrire :

$$\Big|f_n(x) - f(x)\Big| = \Big|f\Big(x + \frac{x(1-x)}{n}\Big) - f(x)\Big| \le \Big|x + \frac{x(1-x)}{n} - x\Big| M = \frac{x(1-x)}{n} M$$

Par suite, on en déduit que $\big\|f_n - f\big\|_\infty \le \dfrac{1\times 1}{n} \longrightarrow 0.$

Conclusion : Convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions (f_n) vers f.

Mines-Ponts PSI 2015-2012 (suite de fonctions) ✷

Ex 5 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sr $\mathbb{R}^+$ par $f_0 : t \to 0$ et ,pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : t \to \sqrt{t + f_n(t)}$.

1) Montrez que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2) La suite (f_n) est-elle uniformément convergente ?

3) Prouvez l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t > 0,\quad \Big|f_{n+1}(t) - f(t)\Big| \le \frac{|f_n(t) - f(t)|}{2 f_{n+1}(t)}$. Que peut-on en déduire sur (f_n) ?

1) A t fixé, la suite $(f_n(t))$ est la suite récurrente $u_{n+1} = \sqrt{t + u_n} = g(u_n)$, $u_0 = 0$ avec $g(x) = \sqrt{t+x}$. On vérifie tout de suite qu'elle est bien définie (à cause de la racine) car ≥ 0 par récurrence immédiate. Ensuite, on sait qu'une ***éventuelle*** limite ℓ vérifie :

$$\ell = g(\ell) \iff \ell = \sqrt{t + \ell} \iff \ell^2 = t + \ell \text{ et } \ell \ge 0 \iff \ell = \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{1+4t^2}\big) \text{ si } t > 0, \text{ et } \ell = 0, 1 \text{ si } t = 0$$

En fait, $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$. La fonction g étant clairement croissante, (u_n) est monotone . (u_n) est même croissante car $u_1 = \sqrt{t} \ge 0 = u_0$. Reste à prouver qu'elle est majorée : on prouve par récurrence que $u_n \le \ell$, (alors $u_{n+1} = g(u_n) \le g(\ell) = \ell$).

La suite de fonctions (f_n) ***converge simplement*** sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $f : t \to \frac{1}{2}\big(1 + \sqrt{1+4t^2}\big)$ si $t \ne 0$ et $f(0) = 0$..

Remarques

- 2 théorèmes à savoir sur les suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: 1) toute limite éventuelle ℓ de u_n vérifie $\ell = f(\ell)$, avec la continuité de f, et 2) si f est croissante (seulement sur I possible mais les termes doivent alors être alors dans I), alors la suite (u_n) est monotone, monotonie « *descendant* » des 2 premiers termes car $\text{signe}(u_{n+1} - u_n) = \text{signe}(f(u_n) - f(u_{n-1}) = \text{signe}(u_n - u_{n-1}) = \cdots = \text{signe}(u_1 - u_0)$
- En fait, $f_n(t) = \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t + \sqrt{t + \ldots}}}}$

2) $f_{n+1}(t) - f(t) \le f_n(t) - f(t)$ donc la suite $\sup_{\mathbb{R}^+} \big|f_n(t) - f(t)\big|$ décroit et , minorée par 0, converge. Vers 0 ? En fait, les f_n sont continues (récurrence immédiate) ***mais*** la limite simple n'est pas continue en 0 ; il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

3)

$$f_{n+1}(t)^2 - f(t)^2 = t + f_n(t) - (t + f(t)) \quad \Longrightarrow \quad |f_{n+1}(t) - f(t)| = \frac{|f_n(t) - f(t)|}{f_{n+1}(t) + f(t)} \leq \frac{|f_n(t) - f(t)|}{f_{n+1}(t) + f_{n+1}(t)}$$

Car on a vu plus haut $f_n(t) \leq \ell = f(t)$. On considère $0 < a \leq b$. on a vu $f_{n+1}(t) \geq f_1(t) = \sqrt{t} \geq \sqrt{a}$. Il vient alors

$$\left\|f_{n+1}(t) - f(t))\right\|_{\infty\,[a,b]} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}\left\|f_n(t) - f(t))\right\|_{\infty\,[a,b]} \quad \Longrightarrow \quad \left\|f_{n+1}(t) - f(t))\right\|_{\infty\,[a,b]} \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)^{n+1}\left\|f(t))\right\|_{\infty\,[a,b]}$$

Cela ne « *marche* » que pour $a > \frac{1}{4}$... Il va falloir minorer $2f_{n+1}(t)$ plus subtilement. Comme $2f_{n+1}(a) \longrightarrow 1 + \sqrt{1+4a^2} > 1$ en croissant, il existe un rang N_0 à partir duquel la quantité $\frac{1}{2f_{n+1}(a)} < 1$. En utilisant le fait que $f_{N_0}(t)$ est croissante (on peut le démontrer par récurrence toutes les f_n sont croissantes), on arrive à :

$$\left\|f_n(t) - f(t))\right\|_{\infty\,[a,b]} \leq \left(\frac{1}{2f_{N_0+1}(a)}\right)^{n-N_0}\left\|f_{N_0}(t) - f(t))\right\|_{\infty\,[a,b]}$$

On peut alors conclure à la limite nulle ce qui nous amène à la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur tout segment de $\left]0, +\infty\right[$.

CCINP PSI 2022 | TPE PC 2016 (suite de fonctions)

Ex 6 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x(1 + n^\alpha e^{-nx})$.

1) Montrez que (f_n) converge simplement vers une fonction f à préciser.

2) Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}\, e^{-nx})\, \mathrm{d}x$.

1) Pour $x > 0$, par croissances comparées (le - est un « *vrai* » -), $n^\alpha e^{-nx} \longrightarrow 0$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$. Par suite $f_n(x) \longrightarrow x$. Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0 \longrightarrow 0$. On constate $0 = x$. On en conclut que la suite de fonctions converge ***simplement*** vers la fonction $x \longrightarrow x$ ***sur*** $\mathbb{R}^+$.

2) On considère $g_n(x) = f_n(x) - f(x) = x n^\alpha e^{-nx}$ et on calcule $g_n'(x) = n^\alpha e^{-nx}(1 - nx)$ puis le tableau de variations :

x	0	$\frac{1}{n}$	$+\infty$
$g_n'(x)$	$+$		$-$
$g_n(x)$	0 ↗	$g_n(\frac{1}{n})$	↘ 0

On a donc $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |g_n(x)| = g_n(\frac{1}{n}) = n^{\alpha-1} e^{-1} \longrightarrow 0$ ssi $\alpha < 1$. Il y a donc convergence ***uniforme*** sur $\mathbb{R}^+$ ssi $\alpha < 1$.

3) Comme $\alpha = \frac{1}{2} < 1$, il y a convergence ***uniforme*** de la suite de fonctions f_n vers f sur $[0,1]$, et $f(x) = x$ étant bien continue. On peut appliquer le théorème d'interversion :

$$\lim \int_0^1 f_n = \int_0^1 f = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

Remarque : Il est attendu que vous utilisiez la convergence uniforme mais l'autre théorème d'interversion, plus important et servant plus souvent comme je vous l'ai dit en cours, le théorème de convergence dominée de Lebesgue, « *marche* » aussi. Je ne mets que la domination, qui utilise le tableau de variations :

$$\left|x(1 + \sqrt{n}\, e^{-nx})\right| = \left|f_{n,\frac{1}{2}}(x)\right| = \left|x + g_{n,\frac{1}{2}}(x)\right| \leq 1 + g_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1 + \frac{1}{1} e^{-1}$$

Fonction constante qui est bien intégrable sur $[0,1]$.

Mines-Ponts PSI 2023 (suite de fonctions polynomiales) ✷

Ex 7 On définit la suite de fonctions (p_n) par $p_0 : x \in [0,1] \longrightarrow 0$ et $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - p_n(x)^2\right)$

1) Montrez $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},\ p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

2) En déduire la convergence simple de la suite (p_n) et trouvez sa limite.

3) Montrez que la suite converge uniformément sur $[0,1]$

1) Posons $g_x(y) = y + \frac{1}{2}(x - y^2)$ afin que $p_{n+1}(x) = g(p_n(x))$. g_x (la courbe de) est une parabole, dirigée vers le bas, de sommet d'abscisse $y = 1$, donc croissante pour $y \leq 1$. Ses points fixes vérifient $g_x(y) = y \iff y = \pm\sqrt{x}$, pour $x \in [0,1]$. Montrons par récurrence pour $n \geq 0$, $\mathscr{P}(n) : \forall x \in [0,1], 0 \leq p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

- $\mathscr{P}(0) : 0 \leq p_0(x) = 0 \leq p_1(x) = \frac{1}{2}x \leq \sqrt{x}$ pour $x \in [0,1]$. En fait $x \leq \sqrt{x}$ est une inégalité de convexité avec $y = x$ la corde sur $[0,1]$
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ pour $n \geq 0$. Soit $0 \leq x \leq 1$. $p_n(x) \leq \sqrt{x}$ donc, comme ces réels sont ≤ 1, par croissance de g_x, $p_{n+1}(x) = g_x(p_n(x)) \leq g_x(\sqrt{x}) = \sqrt{x}$. Puis $p_n(x) \leq \sqrt{x}$ amène $p_n(x)^2 \leq x$, par positivité de $p_n(x)$, d'où $p_{n+1}(x) \geq p_n(x)$.

2) Pour tout x fixé de $[0,1]$, la suite numérique positive $(p_n(x))$ est croissante et majorée, donc converge, et comme c'est une suite récurrente $u_{n+1} = g_x(u_n)$, avec g_x continue, elle ne peut converger que vers un point fixe de g_x, qui ne peut être que $\sqrt{x}$ par positivité.

Conclusion : La suite de fonctions (p_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers $x \longrightarrow \sqrt{x}$

3) $p_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (p_n(x) - \sqrt{x})\left(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{x} + p_n(x))\right)$ donc, comme $p_n(x) + \sqrt{x} \leq 2\sqrt{x}$, $\|p_{n+1} - \sqrt{x}\|_\infty \leq \|p_n - \sqrt{x}\|_\infty$. On en déduit que la suite $\|p_n - \sqrt{x}\|_\infty$ converge vers $\ell \geq 0$ mais ce n'est pas suffisant, il faut prouver $\ell = 0$.

Méthode 1 (générale) : ***Si*** $\ell > 0$, par compacité de $[0,1]$ et continuité, il existe x_n tel que $\|p_n - \sqrt{x}\|_\infty = |p_n(x_n) - \sqrt{x_n}| = \sqrt{x_n} - p_n(x_n) \geq \ell$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstraß (vous l'avez vu en MPSI mais malheureusement, il n'est pas au programme de PSI...), (x_n) étant une suite bornée (car $\in [0,1]$), il existe une sous-suite convergente $x_{\phi(n)} \to y$ (je rappelle que, ***par définition*** d'une sous-suite, $\phi(n)$ croit vers $+\infty$). On utilise la décroissance de $n \to \sqrt{x_{\phi(n)}} - p_n(x_{\phi(n)})$. Pour $N \geq \phi(n)$

$$\sqrt{x_{\phi(n)}} - p_N(x_{\phi(n)}) \geq \sqrt{x_{\phi(n)}} - p_{\phi(n)}(x_{\phi(n)}) \geq \ell$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, il vient $\sqrt{y} - p_N(y) \geq \ell > 0$, ce qui contredit la convergence simple en y. Absurde!

Méthode 2 :

Soit $\varepsilon > 0$.

Sur $[0, \varepsilon^2]$, $\sup_{[0,\varepsilon^2]} \sqrt{x} - p_n(x) \leq \sup_{[0,\varepsilon^2]} \sqrt{x} - p_0(x) = \varepsilon$.

Sur $[\varepsilon^2, 1]$, en reprenant la 1re égalité et $p_n(x) \geq 0$ (la norme infinie s'entend sur ce segment) :

$$\|p_{n+1} - \sqrt{x}\|_\infty \leq \|p_n - \sqrt{x}\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\,\right) \leq \|p_n - \sqrt{x}\|_\infty \left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2}\,\right) \implies \|p_n - \sqrt{x}\|_\infty \leq \|p_0 - \sqrt{x}\|_\infty \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

Comme cette suite géométrique tend vers 0, le résultat est acquis.

Remarques

- A peu de choses près, la méthode 1 démontre le 1er théorème de Dini : si une suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur un ***segment*** $[a,b]$, que les f_n et f sont continues et que, à x fixé, la suite $(f_n(x))$ est croissante, alors la convergence est uniforme. Si vous êtes curieux, il y a aussi le 2e théorème de Dini assez voisin, vous pouvez aller voir sur Internet.

- Par récurrence il est clair que les $p_n(x)$ sont des polynômes. Le théorème de Stone-Weierstraß(pas au programme) affirme que pour ***toute*** fonction continue f sur $[a,b]$, il existe une suite de ***polynômes*** qui converge uniformément vers

f. Dans cet exo, nous avons fait « *mieux* », nous avons construit ***explicitement*** une suite de polynômes qui converge uniformément vers $\sqrt{x}$ sur $[0,1]$.

Mines-Ponts PSI 2016 (série de fonctions)

Ex 8 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = 3^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$.

1) Étudier la convergence de (f_n) sur $[0,1]$.

2) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$

1) Pour $x = 1, f_n(x) = 0 \to 0$. Pour $0 \le x < 1, x^{2^n}$ en tant que sous-suite de x^n converge vers 0, mais $3^n \to +\infty$. La forme est indéterminée. On écrit, en remarquant $x^{2^{n+1}} = x^{2^n\times 2} = \left(x^{2^n}\right)^2$:

$$f_n(x) = 3^n x^{2^n}\left(1 - x^{2^n}\right) = \exp\left(n\ln 3 + 2^n \ln x\right)\left(1 - x^{2^n}\right)$$

Comme $n\ln 3 + 2^n \ln x \sim_{n\to+\infty} 2^n \ln x$, pour $\ln x \ne 0$, soit $x \ne 1$, il vient $n\ln 3 + 2^n \ln x \longrightarrow -\infty$ ***car*** $\ln x \le 0$, puis par comosition de limites avec l'exponentielle, $f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Conclusion : convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle sur $\left[0,1\right]$.

2) On a donc $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 0 = 0$ et aussi :

$$\int_0^1 3^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}\,dx = 3^n\left[\frac{x^{2^n+1}}{2^n+1} - \frac{x^{2^{n+1}+1}}{2^{n+1}+1}\right]_0^1 = 3^n\left(\frac{1}{2^n+1} - \frac{1}{2^{n+1}+1}\right) = \frac{3^n\,(2^{n+1}-2^n)}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} = \frac{3^n\,2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6^n}{2\times 4^n} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = +\infty \ne \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$. La convergence des (f_n) n'est donc pas uniforme sur $\left[0,1\right]$ (elles sont bien continues).

Ex 10

$$\boxed{\sum f_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n}}$$

Etude de la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$:

Fixons nous x pour étudier par rapport à n (ne pas se tromper de variable) :

- Si $x < 0$, par croissances comparées on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x e^{-nx}}{\ln n} = +\infty \ne 0$. Par conséquent, la série diverge grossièrement.
- Si $x = 0, f_n(0) = 0$. C'est la série nulle elle converge.
- Si$x > 0$. Critère $n^a u_n$: $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \frac{x e^{-nx}}{\ln n} = 0$ par croissances comparés avec l'exponentielle. On en déduit que la série converge.

Conclusion : la série de fonctions ***converge simplement sur*** $\mathbb{R}^+$.

Etude de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$:

Il faut donc étudier la convergence de la ***série numérique*** $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} \left|f_n(x)\right| = \|f_n\|_{\infty\,\mathbb{R}^+}$. On se pose la question de savoir si c'est faisable de faire une étude de variations et sinon on cherchera juste à majorer ou minorer, si possible finement, le sup de la fonction. N'oublions que la varaible d'étude est ici x, ce n'est plus n ! Donc on a à étudier le sup $x e^{-nx} = g_n(x)$, il n'est pas utile de prendre le $\ln n$ qui n'est donc, ici, qu'une constante. Cette étude est facile : on dérive $g_n'(x) = e^{-nx}(1-nx)$. Le tableau de varations est très simple : je ne le dessine pas ici (toujours le faire sur une copie). Le sup de la ***valeur absolue*** est en $x = \frac{1}{n}$:

$$\|f_n\|_{\infty\,\mathbb{R}^+} = \frac{1/ne^{-n1/n}}{\ln n} = \frac{e^{-1}}{n\ln n}$$

La série $\sum \frac{1}{n\ln n}$ diverge comme on l'a montré plusieurs fois en cours ou ds/dm. Je ne le remontre pas ici. Je rappelle juste que c'est l'exemple où les critères ne marchent pas : il faut faire une comparaison d'aires série-intégrale.

Conclusion : Pas de ***convergence normale sur*** $\mathbb{R}^+$.

$$\boxed{\frac{x^n}{1+nx^{2n}}}$$

Etude de la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$

On distingue les cas

- Si $0 \le x < 1$, $x^n \to 0$ et $nx^{2n} \to 0$, donc $f_n x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{1} = x^n$. Critère d'équivalent d'une ***série positive*** à une série géométrique convergente, la série $\sum f_n(x)$ converge.
- $x = 1$, $f_n(1) = \frac{1}{1+n}$, la série diverge.
- $x > 1$, $x^n \to +\infty$, puis $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^n}{nx^{2n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n$. On peut ensuite reconnaître le terme général de la série $\ln(1-u)$ avec $u = \frac{1}{x} < 1$, donc la série converge. On peut aussi, autre méthode, appliquer le critère d'Alembert :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n(1/x)^{n+1}}{(n+1)\,(1/x)^n} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{x} < 1$$

Conclusion : Convergence simple de la série de fonctions sur $\left[0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

Etude de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\left[0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

Pour étudier le sup de $f_n(x)$, On calcule d'abord la dérivée :

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+nx^{2n}) - 2n^2x^{2n-1}x^n}{(1+nx^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-nx^{2n})}{(1+nx^{2n})^2}$$

Le tableau de variations (je ne le mets pas ici) montre que le sup de la valeur absolue est en $x_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{1/2n}$. On calcule alors :

$$\|f_n\|_\infty = |f_n(x_n))| = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+n\,\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

La divergence de cette dernière série de Riemann amène la ***non convergence normale*** sur l'intervalle considéré.

$$\boxed{\sum f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x^2+n}}$$

Etude de la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$:

On se fixe $x \in \mathbb{R}$. On remarque que la série est alternée : on regarde donc tout de suite si elle vérifie le CSSA : $\frac{1}{x^2+n}$ est clairement décroissante vers 0 (x est fixé, on regarde par rapport à n). On a donc convergence simple de la série de fonctions sur $\mathbb{R}$.

Etude de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$:

Je rappelle qu'on regarde le sup de la ***valeur absolue***, sup pris sur x et pas sur n. La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x^2+n}$ est paire et clairement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, inutile de dériver! parz conséquent :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n}\right| = \|f_n\|_{\infty\,\mathbb{R}} = \frac{1}{0+n}$$

La série $\sum \frac{1}{n}$ étant divergente, il n'y a donc pas de convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

Ex 11 On considère la suite de fonctions $u_n(x) = x^{n+1}\ln x$ définies sur $\left]0,1\right]$ et prolongées en 0 par $u_n(0) = 0$. Etudiez la convergence simple et uniforme des séries $\sum\limits_{n\geq 0} u_n(x)$ et $\sum_{n\geq 0}(-1)^n u_n(x)$

1) *Etude de la convergence simple de $\sum u_n$ sur* $\left[0,1\right]$

Pour $x = 0$, c'est la série nulle qui converge, de somme nulle. A x ***fixé*** $\in \left]0,1\right]$, on reconnaît une série géométrique (le $\ln x$ est une « *constante* »), il y a convergence pour $x \neq 1$ et on a même la valeur de la somme-limite :

$$\forall 0 < x < 1,\ \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1}\ln x = \ln x \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \ln x\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = \frac{x\ln x}{1-x} = S(x)$$

Pour $x = 1$, c'est aussi la série nulle.

Etude de la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $\left[0,1\right]$

Comme $x^{n+1}\ln x \xrightarrow{x\to 0} 0$ ***parce qu'on a bien*** $n+1 \geq 1$, le prolongement de l'énoncé nous donne donc une fonction continue f_n sur $\left[0,1\right]$. Etant donné que la fonction-somme de la série vérifie :

$$S(x) \underset{x=1}{\sim} \frac{1\times(x-1)}{1-x} = -1$$

On en déduit $\lim_1 S(x) = -1$ et donc la non-continuité en 1 car $S(1) = 0$. Par théorème la convergence ne peut être uniforme sur $\left[0,1\right]$ (par conte, elle l'est sur $\left[0,a\right]$ pour $0 < a < 1$, je ne le démontre pas car ce n'est pas demandé)

2) *Etude de la convergence simple de $\sum(-1)^n u_n$ sur* $\left[0,1\right]$

Assez analogue à la question précédente, la somme T de la série vaut 0 pour $x = 0,1$ et se calcule aisément pour $0 < x < 1$, ce qui prouve bien la convergence simple :

$$\forall 0 < x < 1,\ T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{n+1}\ln x = -\ln x\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n = -\ln x\left(\frac{1}{1+x} - 1\right) = \frac{-x\ln x}{1+x}$$

Etude de la convergence uniforme de $\sum(-1)^n u_n$ sur $\left[0,1\right]$

Par contre, ici, l'argument de la question précédente n'est plus valide car la fonction T est bien continue sur $\left[0,1\right]$: je donne juste les équivalents $T(x) \sim_0 -x\ln x$ et $T(x) \sim_1 -\frac{1}{2}(x-1)$. On va donc commencer par la méthode usuelle qui est d'essayer la convergence normale. A cette fin on détermine le sup de $\left|(-1)^n u_n(x)\right| = \left|u_n(x)\right|$ sur $\left[0,1\right]$ par une étude de variations : $u_n'(x) = x^n\big((n+1)\ln x + 1\big)$. L'étude des variations immédiate (je ne reproduis pas ici le tableau) donne le maximum de la ***valeur absolue*** en $e^{-1/n+1}$ et :

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|(-1)^n u_n(x)\right| = u_n\left(e^{-1/n+1}\right) = \left(e^{-1/n+1}\right)^{n+1}\ln e^{-1/n+1} = \frac{-e^{-1}}{n+1}$$

La divergence de cette série harmonique amène la ***non convergence normale*** de la série de fonctions. Mais, ceci ***ne prouve rien*** quant à la convergence uniforme… Il faut en fait ici appliquer les résultats sur le CSSA. ***Attention!*** à ne pas confondre le rôle de x et le rôle de n.

- Pour tout $0 \leq x \leq 1$, la série $\sum(-1)^n x^{n+1}\ln x$ est bien ***alternée*** car $x > 0$.
- Pour tout $0 \leq x \leq 1$, la suite $\left|(-1)^n u_n(x)\right| = -x^{n+1}\ln x$ (***Attention!*** au -) décroit comme suite géométrique usuelle (et positivité de la « *constante* » $-\ln x$).
- Pour tout $0 < x < 1$, on a bien $u_n(x) \xrightarrow{x\to 0} 0$ (et égalité pour $x = 0,1$)

La série $\sum(-1)^n u_n(x)$ vérifie donc le CSSA et ce ***pour tout*** x. On lui applique alors le résultat sur la majoration du reste (allez réviser ce théorème)! :

$$\forall 0 \leq x \leq 1,\ \left|R_n(x)\right| \leq \left|(-1)^{n+1}x^{n+2}\ln x\right| \implies \sup_{x\in[0,1]}\left|R_n(x)\right| \leq \sup_{x\in[0,1]}\left|x^{n+2}\ln x\right| = e^{-1/n+2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Il y a donc bien convergence uniforme de la série de fonctions $\sum(-1)^n u_n(x)$ sur $\left[0,1\right]$.

CCINP PSI 2023 (série de fonctions)

Ex 13 Soit $a > 0$. Soit $f_a : t \longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^a t \cos^n t$

1) Etudiez la convergence simple de la série.

2) Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donnez une expression simple de $f_a(t)$.

3) Pour quelles valeurs de a, l'intégrale $\int_0^{\pi/2} f_a(t)\,dt$ converge-t-elle ?

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = \int_0^{\pi/2} \sin^a t \cos^n t\,dt$. Pour quelles valeurs de a la série $\sum u_n(a)$ converge-t-elle ? Calculez $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

1) ***Attention !*** dèjà à bien voir, pour la convergence simple, que $\sin^a t$ n'est qu'une constante (qui existe, car $a > 0$), donc on ne s'en occupe « *pas trop* » d'un point de vue séries (il n'y a pas de n), sauf si elle est nulle !

- Si $t = k\pi$, c'est la série nulle qui converge
- Dans tous les autres cas, la série converge ssi la série $\sum \cos^n t$ converge, qui est une série ***géométrique,*** par conséquent ssi $|\cos t| < 1$ ssi $t \neq k\pi$, ce qui n'est pas dans ce cas-là

La série de fonctions converge donc ***simplement sur*** $\mathbb{R}$ tout entier.

2) Comme on a remarqué série géométrique convergente (pour $t \neq k\pi$ mais sinon la somme vaut $f_a(k\pi) = 0$)

$$\forall t \neq k\pi,\ f_a(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^a t \cos^n t = \sin^a t \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^n t = \frac{\sin^a t}{1 - \cos t}$$

On remarque que la formule est vraie aussi même en $k\pi$ donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3) On reprend l'expression de Q2 : $f_a(t) = \dfrac{\sin^a t}{1 - \cos t}$:

- f_a est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. $1 - \cos t$ ne s'y annule qu'en $t = 0$
- ***Etude en*** $t = 0$ ***:*** $|f_a(t) \sim_0 \frac{t^a}{t^2/2} = \frac{2}{t^{2-a}}$. Du critère d'équivalent de Riemann, il vient f_a intégrable en 0 ssi $2 - a < 1$ ssi $a > 1$.

$\int_0^{\pi/2} f_a$ converge ssi elle converge absolument (par positivité de f_a) et donc ssi f_a intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ ssi $a > 1$.

4) Ici, au lieu d'appliquer la méthode usuelle qui est d'utiliser des critères, on revient aux sommes partielles :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi/2} \sin^a t \cos^n(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \sin^a t \cos^n(t)}_{g_n(t)}\,dt$$

1er cas : Si $a > 1$, on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (g_n) ***sur*** $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ ***:***

  la suite de fonctions g_n converge simplement vers f_a, c'est Q1, car $a > 1$

- ***Hypothèse de Domination sur*** $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ ***:***

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|g_n(t)\right| = \sin^a(t) \frac{1 - \cos^{n+1} t}{1 - \cos t} \leq \sin^a(t) \frac{1}{1 - \cos t} = f_a(t) = \xi(t)$$

  La majoration résulte de la positivité de $\cos t$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. ξ est ***intégrable*** sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ C'est Q3 car $a > 1$.

On a donc démontré $S_n(t) \longrightarrow \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_a(t)\,dt$.

2e cas : Si $0 < a \leq 1$, on a toujours la convergence simple de la suite de fonctions $(g_n(t))$ vers $f_a(t)$ mais la majoration par f_a ne donne plus une fonction intégrable, le théorème ne s'applique plus. Comme les termes $u_n(a) = \int_0^{\pi/2} \sin^a t \cos^n t\,dt$ sont positifs, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a)$ existe toujours ; si elle diverge, on peut considérer qu'elle vaut $+\infty$. Je rappelle que quand une fonction f est ***positive*** (ou une série numérique $\sum u_n$ est ***positive***), quand l'intégrale $\int_I f$ diverge (ou la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge,) on peut considérer, à juste titre, qu'elles valent $+\infty$. ***Attention !*** ceci est faux dans le cas général : par exemple $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ n'a aucun sens.

Supposons $\sum u_n(a)$ converge, donc sa somme est finie. Or sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^a \cos^n t \, dt$. On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme (voir après) :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^a \cos^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin^a \cos^n t \, dt = \int_0^{\pi/2} f_a(t) \, dt < +\infty$$

- Les $\sin^a t \cos^n t$ sont continues par morceaux et intégrables sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ continuité sur le segment ***fermé*** $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- La série de fonctions $\sum_n \sin^a t \cos^n t$ converge simplement sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ c'est Q1 et sa somme est ***continue par morceaux*** sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
- La série numérique $\sum_n \int_{\left]0, \frac{\pi}{2}\right]} \left|\sin^a t \cos^n t\right|$ converge : c'est le supposons du départ du raisonnement par l'absurde.

Le théorème s'énonce ensuite comme suit : alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^a t \cos^n t$ est ***intégrable*** (et on peut intégrer terme à terme). Ceci est ***absurde*** car cette somme est f_a, non intégrable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $a \leq 1$.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3) = \int_0^{\pi/2} f_3(t) \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1 - \cos t} \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{(1 - \cos^2 t) \sin t}{1 - \cos t} \, dt$$
$$\overset{(1)}{=} -\int_1^0 \frac{1 - u^2}{1 - u} \, du = \int_0^1 (1 + u) \, du = \left[u + \frac{1}{2} u^2\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

- **(1)** On effectue le changement de varaiables $u = \cos t$ $du = -\sin t \, dt$ C^1 et bijectif de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\left]0, 1\right[$

Ex 18 Soit $\sum (-1)^n g_n$ une série d'applications de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tq $\forall x \in I$, la suite $(g_n(x))$ est décroissante et la suite (g_n) converge uniformément vers 0 sur I. Montrez la série converge uniformément sur I.

Puisque la suite de fonctions (g_n) converge ***uniformément*** vers 0 sur I, alors elle converge ***simplement***. On en déduit, pour tout $x \in I$, la suite numérique $(g_n(x))$ converge vers 0. Comme la suite $g_n(x)$ est par hypothèse décroissante, on en déduit $g_n(x) \geq 0$, puis $\left|(-1)^n g_n(x)\right| = g_n(x)$. Par conséquent, la série alternée $\sum (-1)^n g_n(x)$ vérifie le ***critère du CSSA***, ***pour tout*** $x \in I$. Elle converge donc et de plus on sait que $\left|R_n(x)\right| \leq \left|g_{n+1}(x)\right|$. On en déduit, par passage au sup sur I, que $\|R_n\|_{\infty\, I} \leq \|g_{n+1}\|_{\infty\, I}$. Par majoration il vient que la ***suite des restes*** converge uniformément sur I vers la fonction nulle, cad par définition la ***convergence uniforme de la série*** de fonctions $\sum (-1)^n g_n$ sur I.

Ex 19 ✷Montrez la non convergence uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} x e^{-n^2 x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

On se doute que si l'exo est difficile, la convergence normale ne « *marche* » pas. On l'essaye néanmoins, en posant $f_n(x) = x e^{-n^2 x^2}$ et constatant qu'elle est impaire : on se contente d'étudier sur $\mathbb{R}^+$. On calcule $f_n'(x) = e^{-n^2 x^2}(1 - 2x^2 n^2)$. le tableau de variations est immédiat et laissé au lecteur : le sup de la valeur absolue est en $\frac{1}{\sqrt{2n}}$, puis :

$$\|f_n\|_{\infty\, \mathbb{R}^+} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left|x e^{-n^2 x^2}\right| = \left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right| = \frac{e^{-1/2}}{\sqrt{2}\, n}$$

Par la divergence de $\sum \frac{1}{n}$, on a immédiatement la non convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ (donc sur $\mathbb{R}$). On écrit alors pour $x \geq 0$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} xe^{-k^2x^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} xe^{-k^2x^2} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} xe^{-4n^2x^2} = xne^{-4n^2x^2} \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|R_n(x)\right| \geq \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|\underbrace{xne^{-4n^2x^2}}_{g_n(x)}\right|$$

On constate que $g_n(\frac{1}{n}) \longrightarrow e^{-4}$ par conséquent $\|g_n\|_{\infty\,\mathbb{R}^+} \not\longrightarrow 0$ et par minoration, il n'y a donc pas non plus de convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Centrale PSI 2021 (convergence uniforme série de fonctions) ✷

Ex 20 Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n\, n}{n^2 + x}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrez $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrez $\sum f_n$ converge uniformément sur $\left[0, a\right]$ pour tout $a \geq 0$.

3) Montrez $0 \leq (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $a_n \geq 0$ et $a_n \nearrow$.

4) Montrez $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

1) La série $\sum f_n(x)$ est clairement alternée, et ce pour tout x, tout au moins à partir d'un certain rang, car $\frac{n}{n^2+x} \geq 0$. $f_n(x) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ est aussi immédiat. Etudions la décroissance par rapport à n de $|f_n|$: $\frac{d|f_n|}{dn} = \frac{x-n^2}{(x^2+n^2)^2} \leq 0$ pour n assez grand (selon x). La série $\sum f_n(x)$ vérifiant le CSSA, tout au moins àpcr, et ce pour tout x réel, on en déduit la convergence simple pour tout x réel, tout au moins lorsque les fractions existent, donc pour les $x \notin \left\{-n^2,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ (c'était demandé sur $\mathbb{R}^+$, mais bon...)

2) Comme La série vérifie le CSSA, on ne passe pas par la « *case* » convergence normale. Pour chaque x, le cours nous donne que $\left|R_n(x)\right| \leq \frac{n+1}{(n+1)^2+x}$ mais ***Attention!*** seulement pour $n^2 \geq x$ (voir au-dessus). Si on se place sur $\left[0, a\right]$, on choisit $N^2 \geq a$ et on aura alors :

$$\forall n \geq N, \forall x \in \left[0, a\right], \left|R_n(x)\right| \leq \frac{n+1}{(n+1)^2 + x} \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x\in[0,a]} \left|R_n(x)\right| \leq \sup_{x\in[0,a]} \frac{n+1}{(n+1)^2 + x} \leq \frac{n+1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Remarque : Le lecteur remarquera de lui-même que cette démo ne convient pas sur $\mathbb{R}^+$ (on ne peut choisir un rang uniforme de majoration pour tous les x)

3) On démontre par récurrence sur n. Pour $n = 0$, cela s'écrit $0 \leq a_0 \leq a_0$. Ok. Pour $n = 1 : 0 \leq a_1 - a_0 \leq a_1$ qui est clair vu la positivité et la croissance de (a_n). Supposons la relation vraie pour $n \geq 1$. Montrons-la pour $n + 1$.

- Supposons $n = 2m$. Par hypothèse $0 \leq a_0 - a_1 + \cdots - a_{2m-1} + a_{2m} \leq a_{2m}$, soit $-a_{2m} \leq -a_0 + a_1 + \cdots + a_{2m-1} - a_{2m} \leq 0$. En sommant avec a_{2m+1}, on obtient $0 \leq a_{2m+1} - a_{2m} \leq -a_0 + a_1 + \cdots + a_{2m-1} - a_{2m} + a_{2m+1} \leq a_{2m+1}$. C'est bien l'inégalité voulue
- Si $n = 2m + 1$ impair, procédé similaire.

Remarque : Cette inégalité est « *l'inverse / le pendant* » de $0 \leq \left|\sum_{k=n}^{m/+\infty} (-1)^k a_k\right| = (-1)^n \sum_{k=n}^{m/+\infty} (-1)^k a_k \leq a_n = \left|a_n\right|$ pour une suite positive ***décroissante***, qu'on retrouve / utilise / cours pour le reste d'une série vérifiant le CSSA.

4) La propriété de Q3 reste vraie si l'on part d'un entier quelconque et amène $\left|\sum_{k=m}^{n} (-1)^k a_k\right| \leq a_n$

$n \to \dfrac{n}{n^2 + x} \nearrow$ pour $n^2 \leq x$ puis $\searrow$ (donc la série vérifie alors le CSSA « *pour le reste R_n* »). Notons pour chaque $x \geq 0$, l'entier n_x (« *maximum* ») tel que $n_x^2 \leq x < (n_x+1)^2$.

$$\forall x \geq 0, \left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2+x}\right| \leq \begin{cases} \left|\sum_{k=n+1}^{n_x}(-1)^k\frac{k}{k^2+x}\right| + \left|\sum_{k=n_x+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2+x}\right| & \text{si } n_x \geq n+1 \\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k\frac{k}{k^2+x}\right| & \text{si } n_x < n+1 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{n_x}{n_x^2+x} + \frac{n_x+1}{(n_x+1)^2+x} & \text{si } n_x \geq n+1 \\ \frac{n+1}{(n+1)^2+x} & \text{si } n_x < n+1 \end{cases} \leq \begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{n^2+x} + \frac{\sqrt{x}+1}{n^2+x} & \text{si } n_x \geq n+1 \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n_x < n+1 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2n^2} + \frac{1}{n^2} & \text{si } n_x \geq n+1 \\ \frac{1}{n+1} & \text{si } n_x < n+1 \end{cases} \leq \frac{2}{n}$$

Car le max de la fonction $x \to \dfrac{\sqrt{x}}{n^2+x}$ est obtenu en n^2

Ex 22 ✌Montrez que $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-t}}{n^2+t^2}$ est non intégrable sur $\mathbb{R}^-$ mais intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

L'existence de $f(t)$, somme de série, ***pour tout*** $t \in \mathbb{R}$ résulte de la ***convergence simple*** de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ par une majoration par une série de **Riemann**[1] convergente : $\left|f_n(t)\right| \leq e^{-t}\dfrac{1}{n^2}$ (***Attention!*** la variable est n dans ***ce*** raisonnement).

f est ***continue sur*** $[0,+\infty[$ par application du ***théorème de continuité*** d'une série de fonctions :

- f_n est clairement ***continue*** sur $\mathbb{R}$(le dénominateur ne peut s'annuler car $n \neq 0$).
- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$. La série de fonctions $\sum f_n$ ***converge normalement donc uniformément*** sur tout segment $[a,b]$ car : $\|f_n\|_{\infty\,[a,b]} \leq e^{-\min(|a|,|b|)}\dfrac{1}{n^2}$ (critère de majoration par une série de **Riemann**[1] la variable est n).

Intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ ***: méthode 1 :***

L'intégrabilité en $+\infty$ vient du critère la ***majoration*** d'une fonction positive et de l'intégrabilité de $e^{-t}\,dt$ (critère $t^a f(t)$: $\lim_{+\infty} t^2e^{-t} = 0$).

$$\left|f(t)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{e^{-t}}{n^2+t^2}\right| = e^{-t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+t^2} \leq e^{-t}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,e^{-t}$$

Intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ ***: méthode 2 :***

L'intégrabilité de $f(t)$ sur $[0,+\infty[$ résulte de l'application du ***théorème d'intégration terme à terme*** sur $[0,+\infty[$:

- f_n est continue par morceaux et intégrable sur $[0,+\infty[$.
- $\sum f_n$ ***converge simplement*** sur $[0,+\infty[$ vers $f(t)$ continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, comme démontré plus haut.
- La ***série numérique*** $\sum\int_0^{+\infty}|f_n|$ ***converge*** puisque :

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{e^{-t}}{n^2+t^2}\right|dt \leq \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}}{n^2}\,dt = \int_0^{+\infty}e^{-t}\,dt\;\frac{1}{n^2}$$

Non Intégrabilité sur $\mathbb{R}^-$ ***:***

1. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

Elle résulte du critère de ***minoration***, toutes les f_n étant positives $f(t) \geq f_1(t) = \frac{e^{-t}}{1+t^2}$. Cette dernière fonction n'est pas intégrable en $-\infty$ car $\lim_{-\infty} t^2 \frac{e^{-t}}{1+t^2} = +\infty$ (critère $t^a f(t)$ via les croissances comparées)

CCP PSI 2022-2019-2017-2016-2012 (série de fonctions)

Ex 23 Soit $n \geq 2$. Pour $x > 0$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n}$

1) Domaine de convergence D de la série $\sum u_n$.

2) Convergence normale sur D? [**Selon Années :** Réponse donnée dans l'énoncé] .

3) On note $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$; Montrez $|R_n(x)| \leq \frac{1}{\ln(n+1)}$.

4) Montrez que la somme S de cette série est continue sur D.

5) S est-elle intégrable sur D? [**Selon Années :** Réponse donnée dans l'énoncé] .

1) Attention à ne pas se tromper de variable! Le critère d'Alembert amène

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \left|\frac{x^n \ln n}{x^{n+1} \ln(n+1)}\right| = \frac{1}{x}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{1}{x}$$

Par suite la série $\sum u_n(x)$ converge pour $x > 1$ et diverge pour $0 < x < 1$. Pour $x = 1$, on ne peut conclure par cette règle, mais c'est la série nulle!

Conclusion : le domaine de convergence (simple) de la série de fonctions $\sum u_n$ est $\boxed{D = [1, +\infty[}$.

2) On doit calculer (ou « *évaluer* » par majoration/minoration selon la difficulté) $\left\|\dfrac{\ln x}{x^n \ln n}\right\|_\infty = \sup\limits_{x\in D}\left|\dfrac{\ln x}{x^n \ln n}\right| = \dfrac{1}{\ln n}\sup\limits_{x\in D}\underbrace{\dfrac{\ln x}{x^n}}_{f_n(x)}$

$f_n'(x) = \dfrac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

x	1		$e^{1/n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$f_n(e^{1/n})$	$\searrow$	0

$$\left\|\frac{\ln x}{x^n \ln n}\right\|_\infty = \frac{1}{\ln n} f_n(e^{1/n}) = \frac{1}{\ln n}\frac{\ln(e^{1/n})}{e} = \frac{1}{n\ln n}\frac{1}{e}$$

Cette série de Bertrand diverge. Je rappelle que le critère $n^a u_n$ très efficace pour les séries de Bertrand, malheureusement, ne « *marche* » pas pour les séries $\sum \frac{1}{n \ln^a n}$. Il faut donc revenir aux sommes partielles et effectuer une comparaison séries-intégrales. On ne fait que la minoration ici.

Par décroissance de $x \longrightarrow \dfrac{1}{x\ln x}$ sur $[k, k+1]$: $\dfrac{1}{k\ln k} \geq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x\ln x}$ puis on somme les inégalités :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \geq \sum_{k=2}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x\ln x} = \int_2^{n+1} \frac{1/x\, dx}{\ln x} = \Big[\ln(\ln x)\Big]_2^{n+1} = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$$

Il n'y a donc ***pas de convergence normale*** de la série de fonctions $\sum u_n(x)$ ***sur*** D.

Remarque : En regardant attentivement le tableau de variations et le fait que $e^{1/n} \longrightarrow 1$, on en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement ***sur*** $[a, +\infty[$ avec $a > 1$ (je vous laisse y réfléchir, on a traité plusieurs fois ce genre de choses en cours).

3)

$$\forall x > 1,\ R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^k \ln k} = \ln x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^k \ln k} \overset{(1)}{\leq} \ln x \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^k}$$
$$\overset{(2)}{=} \frac{\ln x}{\ln(n+1)} \frac{\frac{1}{x^{n+1}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln x}{x^{n+1}-x^n} = \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{\ln x}{x^n(x-1)} \overset{(3)}{\leq} \frac{1}{\ln(n+1)}$$

- **(1)** $\ln k \geq \ln n + 1$ pour $k \geq n+1$

- **(2)** Formule de somme d'une série géométrique car la raison vérifie $0 \le \frac{1}{x} < 1$
- **(3)** Inégalité de convexité usuelle $\ln(x) \le x-1$ et $\frac{1}{x^n} \le 1$ ***car*** $x \ge 1$.

Remarque : La majoration est aussi valide pour $x=1$ car $\ln x = 0$.

4) La continuité sur $D = \left[1, +\infty\right[$ de $S(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$ résulte de l'application du théorème de continuité d'une série de fonctions :

- Chaque $u_n(x)$ est clairement continue sur D.
- La série de fonctions converge uniformément sur D car $\sup\limits_{x\in D} \left|R_n(x)\right| \le \dfrac{1}{\ln(n+1)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Remarque : On n'a pas eu besoin d'appliquer la convergence uniforme sur tout segment $[a,b] \subset D$.

5) ***Méthode 1 :*** On a la continuité sur $D = \left[1, +\infty\right[$. Reste à étudier l'intégrabilité en $+\infty$:

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n \ln n} \le \frac{\ln x}{\ln 2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{x^k} = \frac{\ln x}{\ln 2\,(x^2-x)} \sim_{+\infty} \frac{\ln x}{\ln 2\, x^2}$$

Le critère de majoration s'applique car $S(x) \ge 0$. L'intégrabilité de la fonction de Bertrand $x \to \frac{\ln x}{x^2}$ résulte du critère $x^a f(x)$: $\lim\limits_{+\infty} x^{3/2} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ avec $\frac{3}{2} > 1$.

Méthode 2 : Je rappelle que les théorèmes d'intégration terme à terme donnent comme conclusion l'intégrabilité de la fonction-somme (en plus du « *terme à terme* »). Vérifions-le sur D :

- $u_n(x)$ est continue par morceaux et intégrable sur D, pour $n \ge 2$ (Riemann).
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur D vers une fonctions continue par morceaux Q1 et Q4
- La série $\sum \int_1^{+\infty} |u_n(x)|\,dx$ ***converge*** puisque une simple ipp donne (on « *omet* » le $\frac{1}{\ln n}$) :

$$\int_1^{+\infty} \underbrace{\ln x}_{u(x)} \underbrace{\frac{1}{x^n}}_{v'(x)} = \left[\ln(x) \frac{1}{-n+1} \frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^{+\infty} - \frac{1}{-n+1} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{x^{n-1}}\,dx = \frac{1}{(n-1)^2}$$

Centrale PSI 2023 (série de fonctions) ✷

Ex 25 On pose $\phi : x \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+x)}$ et, pour $N \in \mathbb{N}^*, H_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

1) Montrez l'existence de ϕ ainsi que sa continuité et sa monotonie.

2) Calculez $\phi(1)$ et $\phi(2)$.

3) Trouvez la limite de ϕ en $+\infty$.

4) Montrez $\phi(x) = O(\frac{1}{\sqrt{x}})$ au voisinage de l'infini.

5) Montrez $\phi(x) \sim_{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}$

CCP PSI 2021-2019 (étude série de fonctions)

Ex 26 Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$.

1) Etudiez la convergence de $\sum u_n$. On note S sa somme.

2) Montrez S continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrez S C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4) Calculez S

1) On distingue les cas suivants, usuels pour une exponentielle :

- $x=0$, la série $\sum u_n(0) = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le CSSA.
- $x>0$, la série $\sum u_n(x)$ converge par le critère $n^\alpha u_n(x)$ puisque $\left|n^2 u_n(x)\right| = ne^{-nx} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ par ***positivité*** de x et croissances comparées (***Attention!*** à ne pas se tromper de variables : dans cette question c'est n).

- $x<0$, par le « *même critère* » $\lim n^1 \frac{e^{-nx}}{n} = +\infty$, donc la série $\sum u_n(x)$ diverge.

la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$ a donc pour domaine de définition $\boxed{\text{Def}\, S = \mathbb{R}^+}$.

2) On applique le théorème de continuité d'une série de fonctions :

- $x \to u_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- On constate rapidement que $\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$, il n'y a donc pas de convergence normale de la série de fonctions sur $\mathbb{R}^+$. Par contre, avec $[a,b] \subset]0,+\infty[$, on aurait $\sup_{x\in[a,b]} |u_n(x)| = \frac{e^{-na}}{n} = o(\frac{1}{n^2})$ ***car*** $a>0$ ce qui nous amènerait à la continuité de S sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ceci ne répond pas complètement à la question. IL va falloir utiliser la convergence uniforme (non normale) de la série sur (tout segment de) $\mathbb{R}^+$ toujours plus délicate à mettre en oeuvre.

  On vérifie que ***pour tout*** $x \geq 0$, la série $\sum u_n(x)$ vérifie le CSSA :

  - $\frac{e^{-nx}}{n} \geq 0$ ***pour tout*** x, la série est bien alternée.
  - $|u_n(x)| \to 0$. Immédiat, même pour $x=0$.
  - $n \longrightarrow e^{-nx} \searrow$ ***car*** $x \geq 0$ et $\frac{1}{n} \searrow$ aussi (attention à ne pas se tromper de variable et ne pas considérer la décroissance par rapport à x!). Comme les deux termes sont positifs, $|u_n(x)| = \frac{e^{-nx}}{n}$ décroit aussi ***pour tout*** $x \geq 0$. (on pouvait aussi dériver $\frac{e^{-nx}}{n}$ ***par rapport*** à n et vérifie la négativité).

  Par suite, on applique la majoration usuelle du reste d'une série alternée vérifiant le CSSA :

$$\forall x \geq 0,\ \left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k \frac{e^{-kx}}{k}\right| \leq \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} \quad \Longrightarrow \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|R_n(x)\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \frac{e^{-(n+1)x}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

  On en déduit la convergence uniforme de ***la suite de fonctions*** (R_n) vers la fonction nulle soit la convergence uniforme de la ***série de fonctions*** $\sum u_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

3) On applique le théorème C^1 d'une série de fonctions :

- $x \to u_n(x)$ est C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- La série $\sum u_n(x)$ converge ***simplement sur*** $\mathbb{R}^{+*}$ (Q1)
- Pour tout $x \in [a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, On calcule $u_n'(x) = (-1)^{n+1} e^{-nx}$, puis immédiatement $\sup_{x\in[a,b]} \left|u_n'(x)\right| = e^{-na}$, série dont le terme général converge puisque, par exemple, série géométrique de raison $0 < e^{-a} < 1$ ***car*** $a>0$. On en déduit la ***convergence normale donc uniforme*** sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

Par suite, La dérivation terme à terme amène :

$$\forall x > 0,\ S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-nx} = -\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-x})^n = -\frac{1}{1+e^{-x}} + 1 = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

4) La dérivée est obtenue sur $\mathbb{R}^{+*}$, mais ***par continuité***, le résultat sur S restera valable en 0. :

$$\forall x \geq 0,\ S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t)\,dt == \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} + \int_0^x \frac{-(e^{-t})'}{1+e^{-t}}\,dt = -\ln 2 + \Big[-\ln(1+e^{-t})\Big]_0^x = -\ln(1+e^{-x})$$

Cette écriture suppose connu l'identité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$. Je rappelle l'identité usuelle du cours :

$$\forall x \in]-1,1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n = -\ln(1+x)$$

Cette égalité reste vraie en $x=1$, par ***continuité*** en 1, mais ce résultat est un peu limite-cours. On peut procéder autrement et dire que les primitives de $S'(x)$ sont les $-\ln(1+e^{-x}) + cste$ et prouver que la constante est nulle par une étude de la limite en $+\infty$ mais cela nécessite d'utiliser le théorème de limite qui est licite, convergence uniforme (et même normale) montrée sur $[1,+\infty]$, donc $\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n} = 0$

Ex 27 Etudiez $\lim\limits_{x\to 0}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n^2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$

On pose $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}$ et on se place sur $I=\left[0,+\infty\right[$.

- Chaque f_n a une limite lorsque $n\to+\infty$ qui est 0, ***sauf*** pour $n=0$, où c'est 1.
- Il y a convergence uniforme sur I car convergence normale car $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+}|f_n(x)|\leq\dfrac{1}{1+n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

Comme $+\infty$ est bien une borne de I, le théorème s'applique et $\lim\limits_{x\to+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{1+n^2}=1$

On peut remarquer que la série n'est ***pas définie*** pour $x<0$ (vous voyez pourquoi?). Par suite, la limite est $x\longrightarrow 0_+$. On pose $g_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{n^2}$ et on peut donc se placer à droite de 0, par exemple sur $J=[0,1]$.

- Chaque g_n a pour limite $\frac{1}{n^2}$, lorsque $x\to 0$
- Il y a convergence uniforme sur J car convergence normale car $\sup_{x\in J}|g_n(x)|\leq\frac{1}{n^2}$

0 est bien une borne de J, le théorème s'applique et $\lim\limits_{x\to 0_+}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\lim\limits_{x\to 0_+}\dfrac{e^{-nx}}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

Ex 28 On pose $f(x)=\sum\limits_{1}^{\infty}\dfrac{1}{\sinh(nx)}$.

1) Déterminez le domaine de définition et de continuité de f.

2) Etudiez les variations de f

3) ✷Montrez $f(x)\sim_{+\infty}\dfrac{1}{\sinh x}$ (on pourra utiliser, après démo, $\frac{1}{\sinh(nx)}\leq 3e^{-nx}$).

On pose, pour $x\neq 0$ et $n\geq 1$, $f_n(x)=\dfrac{1}{\sinh(nx)}$.

1) On remarque tout de suite que f est impaire, ce qui permet d'étudier que dans $\mathbb{R}^+$, donc $\mathbb{R}^{+*}$. Comme pour $x>0$, $\lim_{n\to+\infty}nx=+\infty$ et que $\sinh u\sim_{u\to+\infty}\frac{1}{2}e^u$, il vient que :

$$\frac{1}{\sinh(nx)}\sim_{n\to+\infty}\frac{2}{e^{nx}}=2e^{-nx}\quad\text{et }\lim x^2\,2e^{-nx}=0\quad\textbf{car } x>0$$

Des critères d'équivalence et $n^a u_n$, pour une ***fonction positive*** au voisinage de $+\infty$, il vient que la série $\sum f_n(x)$ converge et ce ***pour tout réel*** $x>0$, ou encore la ***série de fonctions*** $\sum f_n$ converge ***simplement*** sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\mathbb{R}^*$ par imparité.

Conclusion : $\boxed{\text{Def f}=\mathbb{R}^*}$.

f est ***continue*** sur $\mathbb{R}^*$ par imparité et application du théorème de ***continuité*** d'une ***série de fonctions*** sur $\mathbb{R}^{+*}$:

- f_n est clairement ***continue*** sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Sur tout segment $[a,b]\subset\left]0,+\infty\right[$, on peut écrire, comme la fonction $x\to\dfrac{1}{\sinh(nx)}$ est ***décroissante*** :

$$\sup_{x\in[a,b]}\left|\frac{1}{\sinh(nx)}\right|=\frac{1}{\sinh(na)}\sim 2e^{-na}=o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad\textbf{car } a>0$$

De la convergence de cette série, on en déduit la convergence ***normale***, donc ***uniforme*** sur tout segment de $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Soit $0<x\leq x'<+\infty$. Par croissance de la fonction sinh, il vient $\sinh(nx)\leq\sinh(nx')$, puis $\frac{1}{\sinh(nx')}\leq\frac{1}{\sinh(nx)}$. En sommant toutes ces inégalités de $n=1$ à $+\infty$ ***puisque*** les séries ***convergent***, il vient :

$$f(x')=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sinh(nx')}\leq\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sinh(nx)}=f(x)$$

f est donc ***décroissante*** sur $\mathbb{R}^{+*}$ et par imparité, sur $\mathbb{R}^{-*}$ aussi.

Remarque : Inutile de perdre du temps à essayer d'appliquer le théorème C^1 d'une série de fonctions.

3)

$$\forall \mathbf{n} \geq 02,\ \frac{1}{\sinh(nx)} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2e^{-nx} = o_{+\infty}\left(e^{-x}\right) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sinh x}\right) \quad \text{car} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-nx}}{e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{(1-n)x} = 0 \quad \textbf{\textit{car}}\ 1-n<0$$

On peut sommer une somme ***finie*** de « *petit-o* », donc on peut en déduire que $\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sinh(nx)} = o\left(\frac{1}{\sinh x}\right)$ mais on ne peut faire une somme ***infinie***. On a aucun théorème dessus et de toute façon, on peut comprendre que cela peut être faux. Pas de « *tricherie* » non plus du genre : « *on passe à la limite* ». Il faut donc le démontrer « *à la main* », soit $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(nx)} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{\sinh x}\right)$, cad que $\lim_{x\to+\infty} \sinh x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sinh(nx)} = 0$

Comme souvent, on va le démontrer en majorant / évaluant cette somme infinie. Comme $\frac{1}{\sinh(nx)} \sim_{x\to+\infty} 2e^{-nx}$, il est normal de supposer que dans un certain voisinage de l'infini (pour x assez grand), on ait $\frac{1}{\sinh(nx)} \leq 3e^{-nx}$, ***mais***, à priori, ce voisinage dépend de la fonction ***donc de*** n. Montrons qu'on peut prendre un voisinage qui ***ne dépend pas*** de n :

$$\frac{1}{\sinh(nx)} = \frac{2}{e^{nx}-e^{-nx}} \leq 3e^{-nx} \iff 2 \leq 3-3e^{-2nx} \iff e^{-2nx} \leq \frac{1}{3}$$

$x \geq 1$ ***convient*** puisqu'alors $e^{-2nx} \leq e^{-2n} \leq e^{-2} \simeq 0.13 \leq \frac{1}{3}$. Ensuite on écrit, pour $x \geq 1$:

$$0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sinh x}{\sinh(nx)} \leq 3\sinh x \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-nx} \leq 3\sinh x \sum_{n=2}^{+\infty} \left(e^{-x}\right)^n = 3\sinh x\, \frac{e^{-2x}}{1-e^{-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3e^{x}\, e^{-2x}}{2\times 1} = \frac{e^{-x}}{2} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

On a utilisé la formule sur la somme d'une série géométrique $\sum_{n=p}^{+\infty} r^n = \frac{r^p}{1-r}$, pour $|r|<1$.

St-Cyr MP 2022 | Mines-Ponts PSI 2021 (dilogarithme) ✷

Ex 29

Soit $f : x \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(x^n + \left(\frac{-x}{1-x}\right)^n\right)$. Déterminez le domaine de définition D de f puis calculez $f(x)$ pour $x \in D$.

1) On pose $y = \frac{-x}{1-x}$ (hyperbole équilatère). Une brève étude établit $|y| \leq 1$ ssi $x \leq \frac{1}{2}$.

- Si $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$, ce qui équivaut à $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$, la série converge (par somme de 2 séries convergentes par d'Alembert)
- Si $x < -1$, $y^n \longrightarrow 0$ et $x^{2n} \longrightarrow +\infty$, puis $\frac{1}{4n^2}(x^{2n}+y^{2n}) \longrightarrow +\infty + 0 = +\infty$, la série diverge grossièrement.
- Si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, cas similaire, $\frac{1}{4n^2}(x^{2n}+y^{2n}) \longrightarrow 0+\infty = +\infty$, , la série diverge grossièrement
- Si $x > 1$, $x^n \longrightarrow +\infty$, $y > 1$ donc $y^n \longrightarrow +\infty$, la série diverge grossièrement

Conclusion : $\boxed{D = \mathrm{Def} f = \left[-1, \frac{1}{2}\right]}$

Remarques

- La fonction (série entière) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ fait partie du cours (sur les séries entières, en janvier / février) et on sait qu'elle est égale au logarithme, plus précisément à $-\ln(1-x)$, ***pour*** $x \in \left[-1, 1\right[$.

- La fonction $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, elle, n'est pas au programme, mais pour info elle s'appelle dilogarithme et se note Li_2, définie sur $\left[-1,1\right]$. Ainsi $f(x) = \mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(\frac{-x}{1-x})$. Plus généralement, les fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^k}$ s'appellent polylogarithmes. Juste pour info, on a , par exemple, la propriété $\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(-x) = \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(x^2)$

2) L'idée, usuelle par ailleurs, est de dériver. On applique le théorème C^1 à la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ avec $f_n(x) = \frac{x^n}{n^2}$ sur $J = \left]-1, 1\right[$ (la fonction dilogarithme donc). C'est plus simple que de l'appliquer à $f(x)$.

- Les fonctions f_n sont clairement C^1 sur D $(x \neq 1)$
- La série converge simplement sur D (question précédente)
- On calcule $f_n'(x) = \frac{1}{n}x^{n-1}$. $\sum f_n'$ converge normalement sur tout $[a,b] \subset \left]-1,1\right[$. C'est du cours sur les séries entières et de toute façon c'est immédiat pour un 3/2. Je ne détaille pas.

Le théorème s'applique, on peut dériver terme à terme, et on a donc $\text{Li}_2(x)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} = \frac{-\ln(1-x)}{x}$

Comme $y \in \left]-1,1\right[$ ssi $x < \frac{1}{2}$, on en déduit, par sommation/composition, que f est dérivable sur $\mathring{D} = \left]-1,\frac{1}{2}\right[$ et

$$f'(x) = \frac{-\ln(1-x)}{x} + \frac{-1}{(1-x)^2}\,\frac{-\ln\left(1-\frac{-x}{1-x}\right)}{\frac{-x}{1-x}} = \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Il suit donc, sur $\mathring{D}$, $f(x) = -\frac{1}{2}\ln^2(1-x) + C$ (***une*** constante car ***un*** intervalle). $f(0) = 0$ amène $C = 0$, puis par continuité (je vous laisse l'établir...), le résultat s'étend à $D = \left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

Ex 30 **Fonction ζ de Riemann**[1] On définit cette fonction par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1) ✌ Donnez le domaine de définition de ζ.

2) Etudiez la monotonie de ζ, puis établir $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ $\qquad \lim_{x\to1} \zeta(x) = +\infty$.

3) ✷ Donnez un équivalent de ζ, en 1_+.

On définit la fonction « *dzeta* » de **Riemann**[1] par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1) Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge ssi $x > 1$, il suit $\text{Def}\zeta = \left]1,+\infty\right[$.

2) Soit $1 < x \leq x'$. par croissance de $x \longrightarrow n^x$, il suit que $\frac{1}{n^{x'}} \leq \frac{1}{n^x}$. Puis par sommation infinie, ***puisque les séries convergent***, il vient que $\zeta(x') \leq \zeta(x)$. La fonction ζ est donc décroissante sur $\left]1,+\infty\right[$. Par ***théorème de la limite monotone***, on sait déjà que nécessairement ζ aura une limite finie ou infinie aussi bien en 1 qu'en $+\infty$. Comme clairement $\zeta(x) \geq 0$, ζ est minorée, par conséquent ζ a une limite finie lorsque $x \longrightarrow +\infty$. On ne peut toutefois pas en déduire la valeur de sa limite.

Nous allons démontrer que ζ admet pour limite 1 en $+\infty$ par le théorème ***d'intervertion d'une limite d'une somme :***

- Chaque fonction $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln n}$ admet une limite nulle lorsque $x \longrightarrow +\infty$ mais ***Attention!*** pour $\ln n > 0$, soit $n \geq 2$. Pour $n = 1$, $\frac{1}{n^x} = 1 \longrightarrow 1$!!
- La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément sur $\left[2,+\infty\right[$ (***dont*** $+\infty$ ***est une borne***) car, par décroissance de $x \longrightarrow \frac{1}{n^x}$: $\sup_{x\in[2,+\infty[} \left|\frac{1}{n^x}\right| = \frac{1}{n^2}$, série de Riemann convergente.

Par conséquent on peut écrire $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} 0 = 1$.

On ne peut appliquer ce même théorème pour $x \longrightarrow 1$, car en fait il n'y a pas de convergence uniforme de cette série de fonctions sur $\left]1,a\right]$ (dont 1 est une borne; lisez remarque plus bas). Par contre, on sait que la limite existe, finie ou infinie, comme signalé plus haut. On la note $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Par positivité des $\frac{1}{n^x}$, on peut minorer :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$$

Comme les deux membres admettent une limite lorsque $x \longrightarrow 1$, on peut passer à la limite, d'où $\ell \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Cette inégalité étant vraie pour tout entier N et comme $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \longrightarrow +\infty$, lorsque $N \to +\infty$, on en déduit $\ell = +\infty$.

Remarque : On peut déduire de cette démonstration qu'il n'y a pas de convergence uniforme de $\sum \frac{1}{n^x}$ sur un intervalle du type $\left]1,a\right]$. Raisonnement par l'absurde : ***Si*** il y a convergence uniforme de $\sum \frac{1}{n^x}$ sur $\left]1,a\right]$, comme les $\frac{1}{n^x}$ ont une limite

1. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

en 1 qui est $\frac{1}{n}$, de l'application du théorème d'interversion d'une limite d'une somme, on en déduit (c'est dans le théorème, relisez-le!) que la série $\sum \frac{1}{n}$ converge. ***Absurde***.

3) Pour répondre à cette question, on va utiliser la comparaison d'aires série-intégrale. Attention! car il va y avoir 3 variables. On considère la fonction $t \longrightarrow \frac{1}{t^x}$ qui est décroissante (pour $x>1$) d'où $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x}$. On peut sommer jusqu'à l'infini ***puisque*** ces séries et intégrales convergent (Riemann). Il suit :

$$\frac{1}{x-1} = \left[\frac{1}{(1-x)t^{x-1}}\right]_1^{+\infty} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leq \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^x} = 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = 1 + \left[\frac{1}{(1-x)t^{x-1}}\right]_1^{+\infty} = 1 + \frac{1}{x-1}$$

On constate qu'à gauche comme à droite l'équivalent en 1 est $\dfrac{1}{x-1}$, par encadrement, on en déduit $\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

Centrale PSI 2018 (série de fonctions) ✷

Ex 31 Soit $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour tout $x \in D$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$.

1) Montrez que f est correctement définie sur D, continue et 1-périodique.

2) Montrez que la fonction $g : x \longrightarrow f(x) - \dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

3) Calculez la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$. *Indication :* on pourra d'abord établir $g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}) = 4g(x)$

1) L'hypothèse $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ amène que les fractions $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{(n-x)^2}$, $\frac{1}{(n+x)^2}$ sont bien définies. La convergence des 2 séries est immédiate, par équivalence à $\frac{1}{n^2}$. Il faut et il suffit de démontrer $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ continue, puisque $f(x) = \frac{1}{x^2} + G(-x) + G(x)$. On utilise le théorème adéquat, en se rappelant que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k, k+1\right[$:

- $x \to \frac{1}{(x+n)^2}$ ***continue*** sur D.
- Convergence normale donc uniforme sur tout $\left[a, b\right] \subset \left]k, k+1\right[$ (avec $k \in \mathbb{Z}$ fixé) car :
$$\left\|\frac{1}{(x+n)^2}\right\|_\infty \leq \frac{1}{(\min\left((a+n)^2, (b+n)^2\right)} \sim \frac{1}{n^2}$$
Attention! pour $k<0, |k| > |k+1|$

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \frac{1}{(x+1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-x-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \\ &= \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} - \frac{1}{x+1)^2} = f(x) \qquad \text{donc } f \text{ 1-périodique} \end{aligned}$$

2) Par 1-périodicité de g ($\sin^2(\pi x)$ l'est), il faut et il suffit d'établir que g se prolonge par continuité en 0, cad que g admet une limite finie en 0. On peut aussi remarquer que $G(-x) + G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$ est continue en 0 (démo quasiment identique à la question précédente, $x = 0$ n'annulant pas le dénominateur ici). On termine avec :

$$\frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \frac{\sin^2(\pi x) - \pi^2 x^2}{x^2 \sin^2(\pi x)} = \frac{(\pi x - \frac{1}{6}\pi^3 x^3 + o(x^4))^2 - \pi^2 x^2}{x^2 \sin^2(\pi x)} = \frac{-\frac{\pi^4}{3} x^4 + o(x^4)}{x^2 \sin^2(\pi x)} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\pi^2}{3}$$

3) On a, par la question précédente et la continuité de G :

$$\lim_{x\to 0_+} g(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} + \lim_{x\to 0_+} G(-x) + G(x) = -\frac{\pi^2}{3} + 2G(0) = -\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

On laisse le soin au lecteur de démontrer, petite exercice de sommation et changement d'indices (on applique aussi $\sin(2x) = 2\sin\cos x$), $g(\frac{x}{2}) + g(\frac{x+1}{2}) = 4g(x)$. Ensuite, il faut « *comprendre* » que cette égalité est « *impossible* » ... impossible sauf pour la solution nulle. Je vous laisse d'abord y réfléchir (démo sur la page suivante). On en déduit donc, ***par continuité*** de g en 0 :

$$0 = \lim_0 g(x) = -\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \ \left[= \zeta(2)\right] \text{ pour info aux élèves « \textit{ambitieux} »}$$

Remarque : Vous avez donc ici une démo du calcul de cette somme qu'on a utilisé plusieurs fois et qu'on n'avait pas encore démontré en cours, me semble-t-il.

$|g|$ est ***continue*** sur $[0,1]$ qui est un ***segment***, elle y est donc bornée par M et cette borne est ***atteinte*** $M = |g(x_0)| = \sup_{[0,1]} |g(x)|$. D'autre part, par 1-périodicité, c'est aussi la borne sur $\mathbb{R}$. On écrit alors l'égalité vue plus haut en x_0 :

$$\left| g\left(\frac{x_0}{2}\right) + g\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \right| = 4M$$

Nécessairement, l'un (au moins) des deux dépasse strictement M en valeur absolue (je vous laisse y réfléchir), d'où absurde (sauf si $M = 0$). Si $M = 0$, g est identiquement nulle.

Ex 35 On pose $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} (\cos x)^n \sin(nx)$

1) Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de période π.

2) Etablir que f est de classe C^1 sur $]0,\pi[= I$

3) Calculez f sur I. Continuité de f en 0 et π?

1) Montrez f est ***définie sur*** $\mathbb{R}$ est ***exactement*** la même chose que démontrer la ***convergence simple*** de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $\mathbb{R}$ et ***exactement*** la m. chose que démontrer la cvgce de la ***série numérique*** $\sum f_n(x)$, pour tout ***paramètre*** $x \in \mathbb{R}$:

- Pour $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $|\cos x| < 1$, d'où $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}|\cos^n x| \leq |\cos^n x|$, la convergence absolue, donc convergence, résultant de la majoration par une série ***géométrique*** convergente.
- Pour $x = k\pi$, $f_n(x) = 0$, donc la série nulle $\sum f_n(x)$ converge

f est de période π puisque, pour tout x réel :

$$f(x+\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (\cos(x+\pi))^n \sin(nx+n\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} (-\cos(x))^n \, (-1)^n \sin(nx) = f(x)$$

2) f est de classe C^1 sur $]0,\pi[\; = I$ par application du ***théorème C^1 d'une série de fonctions*** :

- f_n est immédiatement de classe C^1 sur $]0,\pi[$
- $\sum f_n$ converge simplement sur $]0,\pi[$, puisque sur $\mathbb{R}$ établi à la question précédente.
- $\sum f_n'$ converge ***normalement donc uniformément*** sur tout segment $[a,b] \subset \;]0,\pi[$ puisque :

$$f_n' = \frac{1}{n}\left(n\cos^{n-1} x(-\sin x)\sin(nx) + \cos^n x \, n\cos(nx)\right) = -\cos^{n-1} x \sin x \sin(nx) + \cos^n x \cos(nx)$$

puis, en utilisant la décroissance de $|\cos|$ sur $[0,\pi/2]$ et croissance sur $[\pi/2,\pi]$:

$$\forall x \in [a,b], \; |f_n'| \leq |\cos x|^{n-1} + |\cos x|^n \leq \max\left(|\cos a|^{n-1}, |\cos b|^{n-1}\right) + \max\left(|\cos a|^n, |\cos b|^n\right)$$

La convergence des séries géométriques est assurée par $0 < a, b < \pi$ puis $|\cos a|, |\cos b| < 1$

3) La question précédente autorise la ***dérivation terme à terme*** sur I :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} -\cos^{n-1} x \sin x \sin(nx) + \cos^n x \cos(nx) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1} x\Big(-\sin x \sin(nx) + \cos x \cos(nx)\Big)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1} x\ \cos((n+1)x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\cos^{n-1} x}_{\text{réel}}\ \Re(e^{i(n+1)x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Re(\cos^{n-1} x\ e^{i(n+1)x})\\
&= \Re \sum_{n=1}^{+\infty} \cos^{n-1} x\ (e^{ix})^{n+1} = \Re\left(e^{2ix} \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos x\ e^{ix})^{n-1}\right)\\
&\overset{(1)}{=} \Re\left(e^{2ix} \frac{1}{1-\cos x\ e^{ix}}\right) = \Re\left(\frac{e^{2ix}(1-\cos x\ e^{-ix})}{|1-\cos x\ e^{ix}|^2}\right) = \Re\left(\frac{e^{2ix}-\cos x\ e^{ix})}{(1-\cos^2 x)^2 + (-\cos x \sin x)^2}\right)\\
&= \frac{2\cos^2 x - 1 - \cos^2 x}{1+\cos^2 x(-2+\cos^2 x + \sin^2 x)} = \frac{\cos^2 x - 1}{1-\cos^2 x} = \boxed{-1}
\end{aligned}$$

On reconnaît en (1) une ***série géométrique convergente*** puisque sa raison vérifie $|\cos x\ e^{ix}| = |\cos x| < 1$, car $x \in \left]0,\pi\right[$.

Pour terminer, I étant un ***intervalle***, il vient $f(x) = -x + k$, puis comme $f(\pi/2) = 0$, $\boxed{f(x) = \frac{\pi}{2} - x}$.

Comme on a $f(0) = f(\pi) = 0$, $\lim_0 f = \pi/2, \lim_\pi f = -\pi/2$, f n'est pas continue en 0 et π.

a

Mines-Ponts PSI 2018 (développement en série entière de série de fonctions) ✷ ✷

Ex 37 Soit $f : x \longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Montrez que f est définie sur $\left]-1,1\right[$

2) Montrez que f est de classe C^∞ sur $\left]-1,1\right[$.

3) La fonction f est-elle intégrable sur $\left]-1,1\right[$?

4) ~~Montrez que f est développable en série entière sur $\left]-1,1\right[$.~~

1) On pose $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. Notons d'abord que $n+x$ ne s'annule pas sur $I = \left]-1,1\right[$ pour $n \geq 1$. Série alternée est immédiat $(n+x \geq 0)$, de même que $n \to \frac{1}{n+x}$ décroit vers 0 et ce pour tout $x \in I$. Par le CSSA, pour tout $x \in I$, $f(x)$ est définie.

2) On applique le théorème C^n sur I pour tout n.

- u_n ***est de classe*** C^n sur I.
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge ***simplement*** sur I (Question Q1)
- $\forall 1 \leq k \leq n$, la série de fonctions $\sum u_n^{(k)} = \sum \frac{(-1)^n k!}{(n+x)^{k+1}}$ converge ***uniformément*** sur tout segment $[a,b] \subset I$: convergence normale sur $[a,b] \subset I$ car $\sup_{x\in[a,b]} \left|u_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{k!}{(n+a)^{k+1}}$ par croissance de $x \to (n+x)^{k+1}$ ssur $\left]-n,+\infty\right[\supset [a,b]$. On reconnaît, à peu de choses près, une série de Riemann (***Attention!*** la varaible est n, ***pas*** k!) avec $k+1 \geq 2$

Alors f ***est de classe*** C^n ***sur*** I et on peut ***dériver terme à terme*** :

$$\forall 1 \leq k \leq n,\ f^{(k)}(x) = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n k!}{(n+x)^{k+1}}$$

3) On peut commencer par remarquer que f est bien continue sur $\left]-1,1\right[$. Ensuite :

$$f(x) = \frac{-1}{x+1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{-1}{x+1} + g(x)$$

avec g cont. en -1 (utilisez le théorème et la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $[-1,0]$ par le CSSA). Il suit $f(x) \sim_{-1} \frac{-1}{x+1}$.
f n'est pas intégrable en -1, donc à fortiori sur $\left]-1,1\right[$

4)

$$\begin{aligned}
\forall |x|<1, f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^2} \overset{(1)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (k+1) \frac{x^k}{n^k} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} (-1)^k (k+1) \frac{x^k}{n^k}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} (-1)^k (k+1) \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^{k+1}(k+1) \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{k+2}}\Big)\, x^k
\end{aligned}$$

- **(1)** Il s'agit du calcul usuel $\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1}$ que l'on obtient par dérivation de la série entière géométrique sur $]-1,1[$. Je ne vous mets pas les détails. On a bien ici $|-\frac{x}{k}|<1$
- **(2)** Je rappelle que l'on n 'a pas le droit d'intervertir 2 sommes infinies sans hypothèses. Il faut regarder du côté de la théorie des familles sommables, assez difficile et ne servant pas très souvent. On peut déjà retenir que si les quantités sont positives, on peut interertir. Ce n'est pas le cas ici. Il faut alors regarder si la « *famille en question* » est sommable. Ici, il s'agit de (la série double) $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}(-1)^k(k+1)\frac{x^k}{n^k}\right)_{n\geq 1,k\geq 0}$. On regarde si la somme de la valeur absolue est finie (révisez votre cours), cad $\left(\frac{1}{n^2}(k+1)\frac{x^k}{n^k}\right)_{n\geq 1,k\geq 0}$ sommable :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}(k+1)\frac{|x|^k}{n^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{|x|^k}{n^k}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\frac{1}{(1-\frac{|x|}{n})^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2-x^2}<+\infty$$
Le lecteur vérifiera lui-même la convergence de toutes les séries rencontrées (car $|x|<1$), donc la finitude finale.

On termine par primitivation de la série entière sans oublier la constante donnée par $f(0)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$
$$f(x)=-\ln 2+\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^{k+2}}\right)x^{k+1}$$

Ex 39 ✌ Montrez $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1-t/2}\,dt=\sum_0^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}$

$$\int_0^1\frac{1}{1-t/2}\,dt\overset{(1)}{=}\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{\frac{t^n}{2^n}}_{f_n(t)}\,dt\overset{(2)}{=}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{t^n}{2^n}\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)2^n}\right]_0^1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}$$

- **(1)** On utilise le développement en série (série entière en fait) $\displaystyle\frac{1}{1-u}=\sum_{n=0}^{+\infty}u^n$ valide pour $|u|<1$. On peut l'appliquer ici puisque $0\leq\frac{t}{2}\leq\frac{1}{2}$
- **(2)** On peut effectuer une ***intégration terme à terme*** en appliquant le théorème :
  - Les f_n sont ***intégrables*** sur $[0,1]$ car continues sur le ***segment*** $[0,1]$
  - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement (« *vers* » $\frac{1}{1-t/2}$) car c'est son développement en série!
  - La série de terme général $\displaystyle\int_0^1|f_n(t)|\,dt=\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)2^n}\right]_0^1=\frac{1}{(n+1)2^n}$ converge, par exemple, par la règle de d'Alembert : $\displaystyle\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{n2^{n-1}}{(n+1)2^n}\sim\frac{1}{2}\xrightarrow{n\to+\infty}\frac{1}{2}<1.$

Remarques

- Le 2^{e} théorème d'intégration terme à terme s'appliquait ici aussi puisque c'est un segment et que la série de fonctions $\sum f_n$ ***continues*** converge ***uniformément*** car normalement sur $[0,1]$ car $\displaystyle\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{t^n}{2^n}\right|=\frac{1}{2^n}$, série géométrique convergente.

- La somme de la série se calcule puisqu'on aura reconnu $2\times$ le terme général de la série $-\ln(1-x)$ en $x=\frac{1}{2}$, soit vaut $-2\ln(1-\frac{1}{2})=2\ln 2$

- L'intégrale se calculait immédiatement par primitivation : $-2\ln(1-\frac{t}{2})$ et on pouvait donc démontrer ce résultat sans l'intégration terme à terme… Vous voyez comment?

Ex 40 Montrez $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt \overset{(1)}{=} \int_{[0,1[} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt \overset{(2)}{=} \int_{[0,1[} \ln t \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n t^{2n}\ln t}_{f_n(t)}\,dt$$
$$\overset{(3)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n t^{2n}\ln t\,dt = \overset{(4)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{-1}{(2n+1)^2}$$

- **(1)** Cette « *astuce* », d'utiliser $[0,1[$, sert pour la question suivante. A retenir, pour les élèves « *ambitieux* ».
- **(2)** On utilise le développement en série de $\frac{1}{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n$ qui, ***attention!***, n'est valable que sur $]-1,1[$.
- **(3)** L'***intégration terme à terme*** résulte de l'application du théorème sur $]0,1[$ (on peut ouvrir) :
  - Les f_n sont bien continues et intégrables sur $]0,1]$ (se prolongement par ***continuité*** en 0 de f_n : $\lim_0 t^{2n}\ln t = 0$).
  - Convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n(t)$: évidemment puisque provient d'un développement en série!. Et la limite (cad la somme), est bien continue par morceaux sur]0,1[, puisque c'est $\frac{\ln t}{1+t^2}$.
  - La série ***numérique*** $\sum \int_0^1 |f_n|$ converge puisque, après une ipp avec $u' = t^{2n}$ $v = \ln t$ $u = \dfrac{t^{2n+1}}{2n+1}$ $v' = \dfrac{1}{t}$:

$$\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \int_0^1 -t^{2n}\ln t\,dt = -\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\ln t\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{2n}}{2n+1}\,dt = \frac{1}{2n+1}\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4\,n^2}$$

- **(4)** Intégrale déjà calculée au (3)

CCP PSI 2023 -2018 (développement en série d'une intégrale)

Ex 43

1) Montrez la convergence de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+e^t}\,dt$.

2) Montrez que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,n}{1+n^2}$.

1) La fonction $f(t) = \dfrac{\cos t}{1+e^t}$ vérifie :

- f ***continue*** sur $[0,+\infty[$ car $1 = e^t$ ne s'y annule pas.
- $|f(t)| \leq \frac{1}{1+e^t} \sim_{+\infty} e^{-t}$. Le critère de majoration et d'équivalent des fonctions ***positives*** ainsi que le critère $t^a f(t)$: $\lim_{+\infty} t^2 f(t) = 0$ permet de conclure à l'***intégrabilité*** de f en $+\infty$.

f est donc ***intégrable sur*** $[0,+\infty[$, il suit l'intégrale I converge absolument donc converge.

2)

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+e^t}\,dt \overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\,\cos t}{e^{-t}+1}\,dt \overset{(2)}{=} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t}\,\cos t}{e^{-t}+1}\,dt \overset{(3)}{=} \int_{]0,+\infty[} e^{-t}\cos t \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nt}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \cos t\; e^{-(n+1)t}}_{f_n(t)}\,dt \overset{(4)}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(t)\,dt \overset{(5)}{=} \lim_{N\to+\infty} \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{N} f_n(t)\,dt$$
$$\overset{(6)}{=} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n \cos t\; e^{-(n+1)t}\,dt \overset{(7)}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(n+1)}{(n+1)^2+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{n^2+1}$$

- **(1)** Cette astuce est obligatoire en anticipant le développement du (3) : on a $e^{-t} < 1$ ***mais pas*** $e^t < 1$.
- **(2)** Je rappelle qu'à partir du moment où une intégrale existe (ou converge), on a $\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b[} f$. Cette astuce est aussi en anticipant le développement du (3) où il faut $-1 < e^{-t} < 1$ ce qui impose $t \neq 0$.
- **(3)** On utilise le développement ensérie entière $\dfrac{1}{1+u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n$ valide pour $|u| < 1$. On a bien $|e^{-t}| < 1$, pour

$t \in \left]0,+\infty\right[$.

- **(4)** Le théorème usuel d'intégration terme à terme ne « *marche* » pas bien : il est difficile de démontrer que la série $\sum \int_I |f_n|$ converge. On va donc utiliser le théorème de convergence dominée de **Lebesgue**[2].
- **(5)** Le théorème de Lebesgue s'applique car :
  - On a bien la ***convergence simple*** de $\sum_{n=1}^{N} f_n(t)$, pour tout $t \in \left]0,+\infty\right[$ (lorsque $N \longrightarrow +\infty$), puisque cette série converge puisqu'elle vient d'un développement en série !
  - ***Domination :***

$$\Big|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \cos t\, e^{-(n+1)t}\Big| = |\cos t|e^{-t}\Big|\frac{1-(-1)^{N+1}e^{-(N+1)t}}{1-(-e^{-t})}\Big| \leq \frac{e^{-t}\times(1+1)}{1+e^{-t}} \sim \frac{2}{e}1^{-t} = \phi(t)$$

ϕ est bien intégrable sur $\left]0,+\infty\right[$ en vertu du critère $t^a f(t)$.

- **(6)** On peut ici intervertir l'intégration et la somme car la somme est ***finie***.
- **(7)** Ceci résulte du calcul de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-(n+1)t}\,dt = \int_0^{+\infty} \Re(e^{it})e^{-(n+1)}\,dt = \int_0^{+\infty} \Re\big(e^{t(i-(n+1))}\big) = \Re\Big(\int_0^{+\infty} e^{t(i-(n+1))}\,dt\Big)$$
$$= \Re\Big(\lim_{A\to+\infty}\Big[\frac{e^{t(i-(n+1))}}{i-(n+1)}\Big]_0^A\Big) = \Re\Big(\frac{-1}{i-(n+1)}\Big) = \Re\Big(\frac{i+(n+1)}{(n+1)^2+1}\Big) = \frac{n+1}{(n+1)^2+1}$$

La limite de la ***fonction complexe*** $e^{A(i-(n+1))}$ lorsque $A \longrightarrow +\infty$ vaurt bien 0 car en passant au module, on obtient $\left|e^{A(i-(n+1))}\right| = e^{-(n+1)A}$.

CCP PSI 2019-2018 (calcul intégrale par développement en série) ✌

Ex 45 Montrez que $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx$ existe et vaut $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}$.

L'existence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx$ résulte de l'intégrabilité de $g(x) = \dfrac{x^2}{e^x-1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ car :

- g est ***continue*** sur $\left]0,+\infty\right[$.
- ***Etude en*** $t=0$ ***:*** $|g(x)| \sim_0 \dfrac{x^2}{x} = x$. la fonction g se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$.
- ***Etude en*** $t=+\infty$ ***:*** Le critère $t^a g(t)$ avec $a=2>1$ amène l'intégrabilité sur $\left[1,+\infty\right[$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^4 e^{-x} = 0$.

Il faut développer en série l'intégrande, en utilisant un développement en série entière usuel. C'est vite trouvé ***sauf*** qu'il y a un piège ...

On a $e^x > 1$ et le développement $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ nécessite $|u|<1$. L'astuce est de mettre en facteur « *le plus fort* », soit e^x.

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\,dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^2\,e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \int_{]0,+\infty[}\frac{x^2\,e^{-x}}{1-e^{-x}}\,dx = \int_{]0,+\infty[} x^2\,e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-nx}\,dx$$
$$= \int_{]0,+\infty[}\sum_{n=0}^{+\infty}\underbrace{x^2 e^{-(n+1)x}}_{f_n(x)}\,dx \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{]0,+\infty[} x^2 e^{-(n+1)x}\,dx$$
$$\overset{(2)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}$$

- **(1)** L'application du théorème d'intégration terme à terme résulte de
  - f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car continue et $o(\frac{1}{x^2})$ en $+\infty$ ***car*** $n+1>0$.
  - La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0,+\infty\right[$ évidemment vers $\frac{x^2}{e^x-1}$

2. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941). Reconnu pour sa théorie de l'intégration initiée dans sa thèse de 1902 « *Intégrale, longueur, aire* ».

- La série $\sum \int_0^{+\infty} \left| x^2 e^{-(n+1)x} \right|$ converge car série de Riemann $\sum \frac{2}{n^3}$, voir en dessous

• **(2)** On pourrait effectuer ***deux*** ipp mais il est plus rapide de dire que l'on sait qu'une primitive de $f_n(x) = x^2 e^{-(n+1)}$ est de la forme $(a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-x}$:

$$\Big((a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{-(n+1)x}\Big)' = e^{-(n+1)x}\Big(-(n+1)a_n\, x^2 + \big(-(n+1)b_n + 2a_n\big)x + \big(-(n+1)c_n + b_n\big)\Big)$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccc} -(n+1)a_n & = & 1 \\ -(n+1)b_n + 2a_n & = & 0 \\ -(n+1)c_n + b_n & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} a_n & = & \dfrac{-1}{n+1} \\ b_n & = & \dfrac{-2}{(n+1)^2} \\ c_n & = & \dfrac{-2}{(n+1)^3} \end{array} \right.$$

$$\text{Puis } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-(n+1)x}\, dx = \left[\left(\frac{-1}{n+1}x^2 + \frac{-2}{(n+1)^2}x + \frac{-2}{(n+1)^3}\right)e^{-(n+1)x} \right]_0^{\to +\infty} = \frac{2}{(n+1)^3}$$