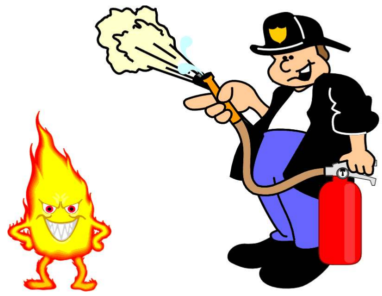
Feuille d'Exercices 6

Suites et Séries de fonctions



Suites de Fonctions

Convergence Uniforme : La suite de fonctions (f_n) ***converge uniformément*** vers f ***sur*** I ssi les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I et $\sup\limits_{x\in I}\left|f_n(x)-f(x)\right| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$.

Théorème de Continuité : Soient des fonctions définies sur un intervalle I $f_n : I\subset\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que :

- Les f_n sont ***continues*** sur I.
- La suite de fonctions (f_n) ***converge uniformément*** sur tout segment $[a,b] \subset I$ vers f.

Alors f est ***continue*** sur I.

Ex 1 Etudier la convergence simple et uniforme sur l'intervalle indiqué des suites de fonctions suivantes

$nx^n(1-x^2)$ $[0,1]$ ✍ $\qquad \dfrac{(\ln x)^{2n}-2}{(\ln x)^{2n}+2}$ $]0,+\infty[$ ✍ $\qquad \begin{cases} n^2x(1-nx) & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$ ✍ $\qquad \min\left(n,\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\mathbb{R}$ ✍

CCP PSI 2016 (suite de fonctions) ✌✍

Ex 2 Montrez que la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(0)=0$ et, pour $x>0$, $f_n(x)=x\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{2n}$ converge simplement mais pas uniformément vers une fonction f que l'on précisera.

Ex 3 ✌On pose $f_n(x)=\dfrac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$.

1) Etudiez la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

2) Démontrez la convergence uniforme sur les intervalles $]-\infty,-a]$ et $[a,+\infty[$ pour $a>0$. La suite (f_n) converge t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$. (*Indication :* on pourra considérer $f_n(\frac{1}{n})$).

Ex 4 ✍ Soit $f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $f_n : \begin{cases}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(x+\dfrac{x(1-x)}{n}\right)\end{cases}$.

1) Montrez que f_n est correctement définie.

2) Etudiez la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n).

Mines-Ponts PSI 2015-2012 (suite de fonctions) ✷✍

Ex 5 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sr $\mathbb{R}^+$ par $f_0 : t\to 0$ et ,pour $n\in\mathbb{N}$, $f_{n+1} : t\to\sqrt{t+f_n(t)}$.

1) Montrez que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.

2) La suite (f_n) est-elle uniformément convergente ?

3) Prouvez l'inégalité : $\forall n\in\mathbb{N}, \forall t>0,\quad \left|f_{n+1}(t)-f(t)\right|\le\frac{|f_n(t)-f(t)|}{2f_{n+1}(t)}$. Que peut-on en déduire sur (f_n) ?

CCINP PSI 2022 | TPE PC 2016 (suite de fonctions) ✍

Ex 6 Soient $\alpha\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $f_n : x\in\mathbb{R}^+ \mapsto x(1+n^\alpha e^{-nx})$.

1) Montrez que (f_n) converge simplement vers une fonction f à préciser.

2) Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}\,e^{-nx})\,\mathrm{d}x$.

Mines-Ponts PSI 2023 (suite de fonctions polynomiales) ✷✍

Ex 7 On définit la suite de fonctions (p_n) par $p_0 : x \in [0,1] \longrightarrow 0$ et $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}(x - p_n(x)^2)$

1) Montrez $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N},\ p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x}$.

2) En déduire la convergence simple de la suite (p_n) et trouvez sa limite.

3) Montrez que la suite converge uniformément sur $[0,1]$

Mines-Ponts PSI 2016 (série de fonctions) ✍

Ex 8 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = 3^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$.

1) Étudier la convergence de (f_n) sur $[0,1]$.

2) Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx$

X-ESPCI PC 2016 (suite de fonctions) ✷

Ex 9 Soit $f_0 : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1} : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(f_n(x))$. Étudier convergence simple, uniforme de (f_n).

Etude des différents Modes de convergence des Séries de Fonctions

Convergence normale :
$\sum u_n(x)$ ***converge normalement sur*** I ssi les u_n bornées et la ***série numérique*** positive $\sum\limits_n \sup\limits_{x\in I} |u_n(x)|$ converge.

Convergence uniforme : $\sum u_n(x)$ ***converge uniformément sur*** I ssi elle converge simplement et ***la suite de fonctions*** des restes $(R_n(x))$ ***converge uniformément*** vers la fonction nulle sur I, $\sup\limits_{x\in I} \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

CSSA (Critère Spécial des Séries alternées) : Soit $\sum(-1)^n u_n$, une série ***alternée*** telle que

- La suite $|u_n|$ ***décroît***
- La suite a une limite nulle : $\lim u_n = 0$, ce qui équivaut à $\lim |u_n| = 0$

Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ ***converge***. De plus, le ***reste*** de la série vérifie : $|R_n| = \left| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq |u_{n+1}|$

Ex 10 Etudiez la convergence simple et normale des séries de fonctions suivantes

$\sum x e^{-n^2x^2}$ $\mathbb{R}$ $\sum\limits_{n\geq2} \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$ ✍ $\sum \dfrac{x^n}{1+nx^{2n}}$ ✍ $\mathbb{R}^+$ $\sum\limits_{n\geq1} \arctan \dfrac{x}{n^2+x^2}$ $\mathbb{R}$ $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$ $\mathbb{R}$ ✍

TPE PSI 2006 (Etude de modes de convergence d'une série de fonctions) ✍

Ex 11 On considère la suite de fonctions $u_n(x) = x^{n+1} \ln x$ définies sur $]0,1]$ et prolongées en 0 par $u_n(0) = 0$. Etudiez la convergence simple et uniforme des séries $\sum\limits_{n\geq0} u_n(x)$ et $\sum_{n\geq0} (-1)^n u_n(x)$

CCP PSI 2007

Ex 12 Etude des différents modes de convergence de la série de terme général définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{n^{x+1}}$ sur $[0,+\infty[$. ~~La somme est-elle continue ?~~

CCINP PSI 2023 (série de fonctions) ✍

Ex 13 Soit $a > 0$. Soit $f_a : t \longrightarrow \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sin^a t \cos^n t$

1) Etudiez la convergence simple de la série.

2) Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donnez une expression simple de $f_a(t)$.

3) Pour quelles valeurs de a, l'intégrale $\int_0^{\pi/2} f_a(t)\,dt$ converge-t-elle ?

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = \int_0^{\pi/2} \sin^a t \cos^n t\,dt$. Pour quelles valeurs de a la série $\sum u_n(a)$ converge-t-elle ? Calculez $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

CCP PSI 2023-2015-2014 (série de fonctions) ✷

Ex 14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on définit $u_n(x) = \dfrac{\ln\left(1+(nx)^2\right)}{n^2\ \ln(1+n)}$.

1) Trouvez le domaine de convergence D de $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$.

2) Montrez $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ continue sur D [**201x :** Question absente]

3) Montrez S est $\mathscr{C}^1$ sur D.

Centrale PSI 2023 (série zeta de Riemann) ✷

Ex 15 On considère la fonction $\zeta : x \in \left]1, +\infty\right[\longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

1) Etudiez les variations de ζ

2) Montrez $\forall x > 1,\ \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x) \leq 1 + \frac{1}{x-1}$ et en déduire la limite en $+\infty$ de la fonction ζ.

3) Etudiez la série entière $\sum_{n\geq 2} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$.

Mines-Telecom PSI 2022 | CCP PSI 2019 (convergence série de fonctions) ✷

Ex 16

1) Montrez pour tout $t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\left|\ln(1+t) - t\right| \leq 2t^2$.

2) Etudiez la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n x}{n(1+x^2)}\right)$.

CCEM PSI 2015 (convergence de série de fonctions))

Ex 17 Etudiez convergence normale et uniforme sur $\mathbb{R}^+$ de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x}{x^2+n^2}$.

Ex 18 ✍ Soit $\sum (-1)^n g_n$ une série d'applications de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tq $\forall x \in I$, la suite $(g_n(x))$ est décroissante et la suite (g_n) converge unifomément vers 0 sur I. Montrez la série converge uniformément sur I.

Ex 19 ✷✍ Montrez la non convergence uniforme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x e^{-n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Centrale PSI 2021 (convergence uniforme série de fonctions) ✷✍

Ex 20 Soit $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n n}{n^2 + x}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

1) Montrez $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrez $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, a]$ pour tout $a \geq 0$.

3) Montrez $0 \leq (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, sachant $a_n \geq 0$ et $a_n \nearrow$.

4) Montrez $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Etude de Fonction-Somme de Séries de Fonctions

Théorème de Continuité : Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ vérifiant

- u_n est ***continue*** sur J.
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge ***uniformément*** sur sur tout segment $[a, b] \subset J$

Alors $S(x)$ est ***continue et définie*** sur J en particulier $\forall x \in J$, la série $\sum u_n(x)$ converge.

Théorème de Dérivabilité / C^1 (Dérivation terme à terme) : Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ vérifiant

- u_n ***est de classe*** C^1 sur J.
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge ***simplement*** sur J
- La série de fonctions $\sum u_n'$ converge ***uniformément*** sur tout segment $[a, b] \subset J$

Alors S ***est de classe*** C^1 ***sur*** J et on peut ***dériver terme à terme*** $S'(x) = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$.

Théorème de limite : Soient a une borne de I finie ou infinie et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ définie sur I vérifiant

- Chaque fonction u_n ***admet une limite*** ℓ_n en a.
- La série de fonctions $\sum u_n$ converge ***uniformément*** sur I

Alors la série $(\sum \ell_n)$ est ***convergente*** et $\displaystyle\lim_{x\to a} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$, $\left(\text{c'est-à-dire } \displaystyle\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} u_n(x)\right)$

Ex 21 ✌Montrez que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Ex 22 ✍ ✌Montrez que $f(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{n^2+t^2}$ est non intégrable sur $\mathbb{R}^-$ mais intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

CCP PSI 2022-2019-2017-2016-2012 (série de fonctions) ✍

Ex 23 Soit $n\geq 2$. Pour $x>0$, on pose $u_n(x)=\frac{\ln x}{x^n\ln n}$

1) Domaine de convergence D de la série $\sum u_n$.

2) Convergence normale sur D? [**Selon Années :** Réponse donnée dans l'énoncé] .

3) On note $R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k(x)$; Montrez $|R_n(x)|\leq\frac{1}{\ln(n+1)}$.

4) Montrez que la somme S de cette série est continue sur D.

5) S est-elle intégrable sur D? [**Selon Années :** Réponse donnée dans l'énoncé] .

CCINP PSI 2022 (série de fonctions) ✷

Ex 24 Soit la fonction $f:x\longrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{x^2+n^2}$

1) Montrez que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrez que f est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Centrale PSI 2023 (série de fonctions) ✷

Ex 25 On pose $\phi: x\in\mathbb{R}^+\longrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+x)}$ et, pour $N\in\mathbb{N}^*, H_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$.

1) Montrez l'existence de ϕ ainsi que sa continuité et sa monotonie.

2) Calculez $\phi(1)$ et $\phi(2)$.

3) Trouvez la limite de ϕ en $+\infty$.

4) Montrez $\phi(x)=O(\frac{1}{\sqrt{x}})$ au voisinage de l'infini.

5) Montrez $\phi(x)\sim_{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}$

CCP PSI 2021-2019 (étude série de fonctions) ✍

Ex 26 Pour $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x)=(-1)^n\frac{e^{-nx}}{n}$.

1) Etudiez la convergence de $\sum u_n$. On note S sa somme.

2) Montrez S continue sur $\mathbb{R}^+$.

3) Montrez S C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4) Calculez S

Ex 27 ✍ ✌Etudiez $\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{n^2}$ et $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-nx}}{1+n^2}$

Ex 28 ✍ On pose $f(x)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sinh(nx)}$.

1) Déterminez le domaine de définition et de continuité de f.

2) Etudiez les variations de f

3) ✷Montrez $f(x)\sim_{+\infty}\frac{1}{\sinh x}$ (on pourra utiliser, après démo, $\frac{1}{\sinh(nx)}\leq 3e^{-nx}$).

St-Cyr MP 2022 | Mines-Ponts PSI 2021 (dilogarithme) ✷✍

Ex 29

Soit $f:x\longrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(x^n+\left(\frac{-x}{1-x}\right)^n\right)$. Déterminez le domaine de définition D de f puis calculez $f(x)$ pour $x\in D$.

Ex 30 ✍ **Fonction ζ de Riemann** [1]On définit cette fonction par $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$.

1) ✌Donnez le domaine de définition de ζ.

2) Etudiez la monotonie de ζ, puis établir $\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$ $\qquad\lim_{x\to 1}\zeta(x)=+\infty$.

3) ✷ Donnez un équivalent de ζ, en 1_+.

Centrale PSI 2018 (série de fonctions) ✷✍

Ex 31 Soit $D=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Pour tout $x\in D$, on pose $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n-x)^2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+x)^2}$.

1) Montrez que f est correctement définie sur D, continue et 1-périodique.

2) Montrez que la fonction $g: x\longrightarrow f(x)-\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

3) Calculez la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$. *Indication :* on pourra d'abord établir $g(\frac{x}{2})+g(\frac{x+1}{2})=4g(x)$

CCP PC 2014 (fonction ζ de Riemann) ✷

Ex 32 Calculer les limites suivantes $\lim_{x\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x}{n^{x+1}}$ et $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{x}{n^{x+1}}$.

CCP PSI 2017-2015 (étude série de fonctions)

Ex 33 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,+\infty[$, on pose $f_n(x)=\dfrac{x^n}{n^2(1+x^{2n})}$ [en 2015 x quelconque] .

1) Etudiez la convergence simple de (f_n).

2) Déterminez la limite de $\int_0^1 f_n(x)\,dx$, lorsque $n\longrightarrow+\infty$.

3) Déterminez le domaine de définition de $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$.

4) Trouvez une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$, pour $x>0$.

5) Etudiez la continuité de S sur son domaine de définition.

6) Déterminez la limite de $S(x)$ quand $x\longrightarrow+\infty$.

CCINP MP 2022 | Mines-Ponts PSI 2021 (équivalent série de fonctions)

Ex 34 Soit $f: x\longrightarrow\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-(nx)^2}$.

1) Déterminez le domaine de définition puis étudiez la continuité de f. [**MP :** pas la continuité] .

2) Montrez f admet une limite finie en $+\infty$ que l'on déterminera.

3) [**MP :** On donne $\int_0^{+\infty}e^{-t^2/2}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty}e^{-t^2x^2}\,dt$ pour x>0] [**Mines :** Qu. absente]

4) Exhibez un équivalent simple de f en 0.

Ex 35 ✍ On pose $f(x)=\sum_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n}(\cos x)^n\sin(nx)$

1) Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de période π.

2) Etablir que f est de classe C^1 sur $]0,\pi[=I$

3) Calculez f sur I. Continuité de f en 0 et π ?

Ex 36 On pose $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n^2}$.

1) ✌ Montrez Def$f=\mathbb{R}^+$.

2) Montrez f continue sur $\mathbb{R}^+$ et C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculez f'' et en déduire f' sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Montrez que f est non dérivable en 0.

4) Montrez, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x\ln(1-e^{-t})\,dt$.

Mines-Ponts PSI 2018 (développement en série entière de série de fonctions) ✷

Ex 37 Soit $f: x\longrightarrow\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

1) Montrez que f est définie sur $]-1,1[$

2) Montrez que f est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

3) La fonction f est-elle intégrable sur $]-1,1[$?

4) ~~Montrez que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.~~

Mines-Telecom PSI 2018 | Mines-Ponts PSI 2016 | Mines-Ponts PC 2012-2008 (étude série de fonctions)

Ex 38 On se donne $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$

1) Quel est le domaine de définition D de f ?

2) f est de classe C^0 sur D ? de classe C^1 sur D ? [**2016 :** Pas C^0] [**PC :** Pas C^1] .

3) [**2016 :** Déterminez un équivalent simple de f en $(-1)_+$]

4) [**2016 :** Exprimez f' à l'aide d'une intégrale.]

Théorème 1 d'Intégration terme à terme : Soit $(\sum u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une série de fonctions $u_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- Les u_n sont ***intégrables*** sur I.
- La série de fonctions $\sum u_n$ cvge ***simplement*** vers une fonction-somme ***continue par morceaux*** sur I.
- La série ***numérique*** $\sum \left(\int_I |u_n| \right)$ ***converge***.

Alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est ***intégrable*** sur I et on peut « *intégrer terme à terme* » $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I u_n(x)\,dx$

Théorème 2 d'Intégration terme à terme sur un segment :

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions ***continues convergeant uniformément sur*** $[a,b]$, alors $\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n$

Ex 39 ✍ ✌Montrez $\int_0^1 \frac{1}{1-t/2}\,dt = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$

Ex 40 ✍ Montrez $\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

Mines-Ponts PSI 2018 (calcul d'une intégrale)
Ex 41 Justifiez l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sinh\sqrt{x}}\,dx$ et la calculer.

CCINP PSI 2023-2013 (développement en série d'une intégrale)
Ex 42 Justifiez l'existence de $I = \int_0^1 \frac{t\ln^2 t}{(1-t)^2}\,dt$. Montrez $I = 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}\right)$.

CCP PSI 2023 -2018 (développement en série d'une intégrale) ✍
Ex 43

1) Montrez la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+e^t}\,dt$.

2) Montrez que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}\,n}{1+n^2}$.

Mines-Ponts PSI 2022 (calcul intégrale par dse)
Ex 44 Montrez que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,dt$ converge puisqu'elle vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

CCP PSI 2019-2018 (calcul intégrale par développement en série) ✌✍
Ex 45 Montrez que $J = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1}\,dx$ existe et vaut $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^3}$.