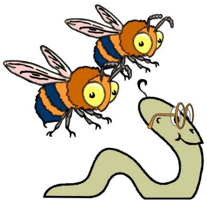
Classe de PSI

Feuille d'Exercices 6



☞ **Thèmes de la semaine du 6 et 13 décembre 2016 :**

- Dénombrements. Cardinaux finis et dénombrables
- Univers probabilisés. Probabilités conditionnelles. Formule des probabilités totales et Composées

✌ **Ex 1**

1) Dénombrez tous les anagrammes de PAUL.

2) Dénombrez tous les anagrammes de BAOBAB.

✌ **Ex 2** On tire aléatoirement une « *main* » de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes.

1) Combien y a-t-il de mains possibles ?

2) Combien de mains contiennent exactement un As ?

3) Combien de mains contiennent aucun As ?

4) Combien contiennent au moins un As ?

✌ **Ex 3** Dans une classe de 30 élèves, 20 étudient l'anglais et 15 l'allemand. Tous les élèves étudient au moins une langue. Combien d'élèves étudient à la fois l'anglais et l'allemand, seulement l'anglais, seulement l'allemand ?

Ex 4 On note $E_n = [\![1 \dots n]\!]$.

1) Dénombrez les applications constantes de E_p dans E_n.

2) Dénombrez les applications strictement croissantes de E_p dans E_n.

✷ **3)** Dénombrez les applications croissantes de E_p dans E_n (*On les mettra en bijection avec les applications strictement croissantes de E_p vers E_{n+p-1}*).

Ex 5 On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boites aux lettres nominatives. De combien de façons peut-on le faire si :

1) on met au plus un prospectus par boite et les prospectus sont identiques ?

2) on met au plus un prospectus par boite et les prospectus sont tous différents ?

3) on met un nombre quelconque de prospectus par boite et les prospectus sont tous différents ?

✷ **4)** on met un nombre quelconque de prospectus par boite et les prospectus sont identiques ?

Ex 6 Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = \text{Card}\, A$.

1) Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?

2) Combien y a-t-il de parties X de E à m élements contenant A ?

✷ **3)** Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$? (*réponse* 3^{n-p})

Ex 7 ***Nombre d'applications surjectives :*** On note $S_{p,n}$ le nombre d'applications surjectives d'un ensemble de cardinal p sur un autre de cardinal n.

1) Donnez $S_{p,n}$ pour $n \geq p$.

2) On appelle S_p^n le nombre de partitions de $E_p = [\![1 \dots p]\!]$ en n sous-ensembles non vides (on les appelle des n-partitions). En partitionnant $E_p = \{1, \dots, p-1\} \cup \{p\} = E_{p-1} \cup \{p\}$, démontrez $S_p^n = S_{p-1}^{n-1} + nS_{p-1}^n$.

3) Montrez $S_{p,n} = n!\, S_p^n$ et en déduire $S_{pn} = nS_{p-1,n-1} + nS_{p-1,n}$.

4) Conclure $S_{p,n} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i^p$, pour $p \geq n$.

✌ **Ex 8** Déterminez une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ tq la proba. de l'évènement $\{k\}$ soit proportionnelle à k.

Ex 9 A quelle condition sur $x, y \in \mathbb{R}$ existe-t-il une probabilité sur $\Omega = \{a, b, c\}$ tq $P(\{a, b\}) = x$ et $P(\{b, c\}) = y$?

Ex 10 Soient A, B, C 3 évènements d'un espace proba. $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Exprimez (ensemblistement) l'évènement :

1) Aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé.

2) Un seul des 3 évènements A, B ou C est réalisé.

3) Au moins 2 des 3 évènements A, B ou C sont réalisés.

4) Pas plus de 2 des 3 évènements A, B ou C sont réalisés.

Ex 11 On considère une urne contenant 5 boules blanches et 4 boules noires, chacunes numérotées de 1 à 5.

1) Décrire l'univers associé à chacune des expériences suivantes :

• On tire une à une trois boules de l'urne, en remettant la boule tirée à chaque fois.

• On tire une à une trois boules de l'urne, sans remettre la boule tirée à chaque fois.

• On tire une à une les boules, sans remise après chaque tirage, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de boules dans l'urne.

• On tire une à une les boules de l'urne. Si la boule tirée est blanche on la remet, sinon on ne la remet pas.

2) On considère l'expérience : on tire simultanément deux boules de l'urne.

• Décrire l'univers des possibles pour cette expérience.

• Décrire les événements A « *il y a plus de boules blanches que de boules noires* » et B « *les boules blanchesd tirées on toutes un numéro pair* ». Décrire ensuite l'événement $A \cap B$.

Ex 12 On dispose r boules différentiées à l'intérieur de n urnes avec $r \leq n$, chaque urne pouvant contenir plusieurs boules. Les répartitions possibles sont équiprobables.

1) Donnez la probabilité de $A = \{$chaque urne contient au + une boule$\}$.

2) Donnez la probabilité de l'évènement $B = \{$il existe une urne contenant au - 2 boules$\}$.

3) Et si on suppose les boules identiques ?

✌ **Ex 13** Soient $A, B \in \mathscr{A}$ tels que $P(A) > 0$. Comparez les probabilités conditionnelles $P(A \cap B | A \cup B)$ et $P(A \cap B | A$.

✌ **Ex 14** Un tricheur dispose de 4 pièces dont une a 2 côtés pile. Il prend une pièce au hasard et la lance. On note T l'évènement « *la pièce est truquée* » et P l'évènement « *la pièce donne pile* ». Quelle est la probabilité d'obtenir pile ? (*utilisez la formule des probabilités totales*). Comparez.

✌ **Ex 15** On tire 5 cartes dans un jeu de 52 cartes. Un joueur adverse a ***pu voir*** un As dans cette « *main* ». De son point de vue, quelle est la probabilité que la « *main* » comporte (exactement) une paire d'As ? Comparez.

Ex 16 Une suite d'individus $A_1, \ldots, A_n$ se transmet une information. On suppose que l'individu A_k transmet l'information qu'il a reçu à l'individu A_{k+1} avec la probabilité p $(0 < p < 1)$, ou sinon il transmet l'information « *contraire* » avec la probabilité $1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres.

1) Calculez p_1 et $_2$.

2) Calculez la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1 (*utilisez la formule des probabilités totales*).

3) Quelle est la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$? Interprétation ?

Ex 17

1) Combien de fois faut-il lancer un dé pour avoir au moins 1/2 chance d'obtenir un 6 ?

2) Idem avec 2 dés pour obtenir un « *double-six* » ?

Ex 18 On met en vente 50 « *enveloppes mystère* ». Chaque joueur ouvre l'enveloppe dès qu'il l'a achetée et découvre s'il a gagné ou perdu. Une seule des enveloppes est gagnante et on suppose que le jeu s'arrête dès que l'enveloppe a été découverte. Préférez-vous être le 1er acheteur ? le deuxième ? En supposant que l'on peut choisir, quel rang d'acheteur est le « *plus stratégique* » ?

Ex 19 On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour ces derniers, la probabilité d'obtenir 6 vaut 1/2.

1) On tire un dé au hasard (parmi les 100). On le lance et on obtient un 6. Quelle est la probabilité qu'il soit pipé ?

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 et le lance n fois. On obtient n fois le chiffre 6. Probabilité p_n pour que le dé soit pipé ?

3) Limite de p_n ? Interprétez le résultat.

Ex 20 Une urne contient initialement a boules blanches et b boules noires. On note $N = a + b$. On effectue une série de tirages en respectant le « *protocole* » suivant : si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne. si la boule tirée est noire, on ne la remet pas mais on remet dans l'urne à la place une boule blanche. On note les événements suivants $N_j = \{$au j-ième tirage on obtient une boule noire$\}$ et $A_n = \{$au n-ième tirage, pour la première fois, on obtient une boule blanche$\}$.

1) Exprimez A_n en fonction des événements N_j puis calculez $P(A_n)$.

2) On considère l'événement $B_l = \{$il reste l boules noires dans l'urne lorsque l'on tire la première boule blanche$\}$. Montrez que si $l \in [\![1 \dots b]\!]$, $P(B_l) = \dfrac{b!}{N^b}\left(\dfrac{N^l}{l!} - \dfrac{N^{l-1}}{(l-1)!}\right)$.

3) Vérifiez $\sum_{l=0}^{b} P(B_l) = 1$. Etait-ce prévisible ?

Ex 21 ***Problème des Appariements***

Dans le vestiaire d'une piscine, chaque nageur range ses vêtements sur un cintre puis le dépose au guichet où un employé équipe le cintre d'un bracelet rouge numéroté et remet au nageur un bracelet jaune portant le même numéro. Ainsi, à la fin de la séance, le nageur peut récupérer ses affaires en échange du bracelet. Avant l'ouverture au public, les bracelets sont rangés sur un tableau à N crochets supportant chacun un bracelet rouge et un jaune de même numéro. Deux gamins turbulents s'introduisent dans le vestiaire avant l'ouverture. En se battant ils renversent le tableau portant les bracelets. Pour ne pas être découverts, ils les remettent en place en prenant bien soin de placer sur chaque crochet un bracelet jaune et un rouge, mais sans tenir compte des numéros. A l'ouverture, N nageurs se présentent et devant l'affluence, l'employé remet à chacun son bracelet jaune sans prendre le temps de vérifier les numéros. On se propose de calculer les probabilités des événements :

$$E_{N,k} = \{\text{exactement } k \text{ nageurs retrouvent leurs affaires}\}$$

On choisit comme espace probabilisé Ω_N ensemble de toutes les permutations de $[\![1 \dots \mathrm{N}]\!]$, muni de l'équiprobabilité noté P_N. On note aussi : $B_i = \{$le i-ième nageur retrouve ses affaires$\}$

1) Pour $j \leq N$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq N$, calculez $P_N(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_j})$. En déduire : $\sum_{i_1 < \dots < i_j} P_N(B_{i_1} \cap \dots \cap B_{i_j}) = \dfrac{1}{j!}$.

2) Calculez $P_N(E_{N,0})$.

3) On fixe k nageurs retrouvant leurs affaires. Exprimez à l'aide de $P_{N-k}(E_{N-k,0})$ le nombre de permutations des $N-k$ autres nageurs telles qu'aucun d'entre eux ne retrouve ses affaires. En déduire la valeur de $P_N(E_{N,k})$.

4) Pour k fixé, calculez $p_k = \lim_{N\to+\infty} P_N(E_{N,k})$. Montrez la suite (p_k) définit une proba. P sur $\mathbb{N}$ (loi de **Poisson**[1]).

5) Montrez $\forall\, 0 \leq k \leq N, \quad |P_N(E_{N,k}) - p_k| < \dfrac{1}{k!\,(N+1-k)!}$.

1. **Siméon Poisson** : mathématicien et physicien français (1781-1840)

En déduire $\forall\, 0 \le n \le N, \quad \sum_{j=0}^{n} |P_N(E_{N,j}) - p_j| \le \dfrac{e}{(N+1-n)!}$

6)

Ex 22 Dans une succession de n lancers « *pile / face* » indépendants, on note p_n la probabilité qu'on n'obtienne pas deux piles consécutifs.

1) Calculez p_1, p_2 et p_3.

2) On considère les événements $F_i = \{\text{on obtient face au } i\text{-ième lancer}\}$ avec $i \in \{1,2\}$. Montrez que $(F_1 \cap F_2, \overline{F_1} \cap F_2, F_1 \cap \overline{F_2}, \overline{F_1} \cap \overline{F_2})$ est un système complet d'événements de Ω.

3) En utilisant un système complet d'événements un peu mieux choisi, établir la réc. $p_{n+2} = \dfrac{1}{4} p_n + \dfrac{1}{2} p_{n+1}$.
(*Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales*)

4) Montrez que la suite (p_n) converge vers 0.

5) Dans cette question, on effectue successivement et indéfiniment des lancers « *pile / face* » (supposés indépendants). Soit l'événement $A = \{\text{on obtient deux piles consécutifs}\}$. Donner un univers décrivant cette expérience aléatoire, et précisez, en le justifiant, $P(A)$.

Ex 23 On considère 3 urnes A, B et C identiques : elles contiennent boules blanches et noires, la proportion de boules blanches étant de $p = \frac{2}{3}$. On effectue n tirages avec remise selon le même protocole suivant : au départ on tire une boule dans l'urne A. Si la boule tirée est blanche, on tire la boule suivante dans la même urne. Sinon, on tire la boule suivante dans l'une des 2 autres urnes choisie équiprobablement.
On appelle p_n la probabilité d'obtenir une boule blanche an n-ième tirage et a_n (rp. b_n, c_n) la probabilité pour que le n-ième tirage soit effectué dans l'urne A (rp. B, C). On note aussi X_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1) Donnez p_1 et X_1.

2) Avec la formule des probabilités totales, montrer il existe une matrice M indépendante de n, tq $X_{n+1} = MX_n$.

3) Diagonalisez la matrice $M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

4) En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n puis leurs limites. Qu'en déduit-on ?

✷ **Ex 24** Alice et Bruno lancent le même dé à tour de rôle. C'est Alice qui commence. Le gagnant est le premier à obtenir un 6. Quelle est la probabilité que Alice gagne ? Bruno gagne ?
On introduira les événements $A = \{\text{victoire d'Alice}\}$, $B = \{\text{victoire de Bruno}\}$, $D = \{\text{pas de vainqueur}\}$, $F_n = \{\text{fin de la partie an } n\text{-ième lancer}\}$, $S_n = \{\text{le } n\text{-ième lancer donne un } 6\}$

Ex 25 On dispose de n urnes contenant chacune 3 boules. Parmi ces $3n$ boules, l'une seule est jaune, toutes les autres sont bleues. On ignore dans quelle urne est la boule jaune.

1) On tire sans remise deux boules de l'urne 1. On considère les événements $B_1 = \{\text{les 2 boules tirées sont bleues}\}$ et $J_1 = \{\text{la boule jaune est dans l'urne } 1\}$. Calculez $P(B_1)$.

2) Quelle est la probabilité que la boule jaune soit dans l'urne 1 si le tirage a donné 2 bleues ?

3) On reprend l'expérience avec cette fois n personnes chacune face à une urne où elles tirent simultanément et sans remise 2 boules. on considère les événements B_i et J_i définis de manière analogue à la question précédente. Que vaut $P(\overline{B_i} | J_k)$ pour $1 \le i, k \le n$? En déduire $P(B_i)$.

4) Expliquez sans calcul pourquoi les événements B_i et B_j ne sont pas indépendants.

5) Calculez $P(B_i \cap B_j | J_k)$, puis $P(B_i \cap B_j)$.

6) Généralisez avec $P(B_{i_1} \cap \cdots \cap B_{i_r})$ avec $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$.

7) Voyez-vous une autre méthode pour obtenir ce résultat ?