Quelques Corrections sur la Diagonalisation

Ex 1 ✌ On pose $A = \begin{pmatrix} c & 0 & a \\ 2 & b & -1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) CNS pour que A admette $(1,-1,1)$ comme vecteur propre ?

2) CNS pour que A admette 1 pour valeur propre ?

1) X est vecteur propre de A ***ssi*** il existe un ***scalaire*** λ tel que $AX = \lambda X$, et comme $X \neq 0$, ***ssi*** la famille (AX, X) est ***liée***.

$$AX = \begin{pmatrix} c+a \\ 1-b \\ c \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = X$$

On applique alors le résultat suivant s'il y a des « *inconnues* » (on rappelle que pour ***deux*** vecteurs avec des ***chiffres***, une famille liée ou libre, çà se ***voit***, il n'y a nul besoin de démontrer) :

$$(a_1,\dots,a_n) \text{ et } (b_1,\dots,b_n) \text{ sont colinéaires } \textbf{\textit{ssi}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_n & b_n \end{vmatrix} = 0$$

En revenant à cet exo, A admet X comme vecteur propre ***ssi***

$$\begin{vmatrix} 1 & c+a \\ -1 & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c+a \\ 1 & c \end{vmatrix} = 0 \iff a-b+c+a = c-(c+a) = 0 \iff \boxed{a = 0 \text{ et } c = b}$$

Remarques

- Je vous rappelle le résultat (toujours pour 2 vecteurs) :
  la famille (u, v) est liée $\iff$ u et v sont colinéaires $\iff$ $u = \lambda v$ ***ou*** $v = \mu u$.
- Le résultat (u, v) liée $\iff$ $u = \lambda v$ est faux à cause du cas $v = 0$ (je vous laisse y réfléchir). Par contre, si on a en plus l'hypothèse $v \neq 0$, cette équivalence est vraie (comme plus haut)

2) 1 est vp de A ssi $\det(1.I - A) = 0$ ssi $\begin{vmatrix} 1-c & 0 & -a \\ -2 & 1-b & 1 \\ -c & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+(-2a)-(ac(1-b))-0-(-(1-c)) = 0$ ssi $\boxed{1-c-ca-2a+cab = 0}$

Ex 3 ✌ Calculez les éléments propres de $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda-2)^2$$

les valeurs propres sont 0 et 2, 2 étant d'ailleurs valeur propre double. $\operatorname{Sp} M = \{0, 2\}$. La matrice M n'est pas inversible car 0 est valeur propre.

Recherche de l'espace propre associé à 0

Rappelons que c'est le noyau. En plus ici, comme la multiplicité de la valeur propre 0 est 1, on sait que c'est une droite.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E(0)=\operatorname{Ker} M \iff MX=0 \iff \begin{cases} x-z &= 0\\ 2y &= 0\\ -x+z &= 0\end{cases} \iff \begin{cases} x &= z\\ y &= 0\\ z &= z\end{cases} \qquad \boxed{E(0=\operatorname{Vect}(1,0,1)}$$

Recherche de l'espace propre associé à 2

Comme la multiplicité est 2, on sait $1\le \dim E(2)\le 2$, soit c'est une droite ou un plan.

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in E(2)=\operatorname{Ker}(2I-M) \iff (2I-M)=0 \iff \begin{cases} x+z &= 0\\ 0 &= 0\\ x+z &= 0\end{cases} \iff x+z=0$$

C'est un plan dont une base est, par exemple, $\big((1,0,-1),(0,1,0)\big)$

IMT PSI 2022 (diagonalisabilité matrice $n x n$)

Ex 4 Soit $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ij}=ij$ pour $1\le i,j\le n$. Déterminez les éléments propres de A

Il faut remarquer que toutes les colonnes sont colinéaires : si on note le vecteur-colonne $U=(i)_{1\le i\le n}\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $C_j=jU$. Toutes les colonnes sont colinéaires, la matrice est de rang 1 (puisque $U\neq 0$ sinon rg 0). En fait, on a même $A=UU^{\mathrm{T}}$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} A=n-1$ donc 0 est vp de multiplicité ***au moins*** $n-1$. (cours que vous verrez un peu plus tard, c'est qunad vous relirez; on peut même remarquer que A est symétrique réelle donc diagonalisable donc la multiplicité de 0 est même égale à la dimension de $E(0)=\operatorname{Ker} A$ soit $n-1$, cours un peu plus tard, fin novembre).

Ne ***jamais oublier!*** : quand il manque dans le calcul ***une*** vp, la meilleure méthode est de trouver la vp « *manquante* » par la trace. Ici $\operatorname{tr} A=0+\cdots+0+\lambda=\sum_{i=1}^n i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Espace propre associé à 0 C'est le noyau, on sait que c'est un hyperplan et une brève étude des lignes, qui sont toutes colinéaires, montre que c'est $1x_1+2x_2+\cdots+nx_n=0$.

Méthode alternative, plus élégante, pour ceux qui se rappellent le produit scalaire : $X\in \operatorname{Ker} A=\operatorname{Ker} UU^{\mathrm{T}}$ ssi $UU^{\mathrm{T}}X=(U|X)_{\mathrm{can}}\,U=0$ ssi $(U|X)_{\mathrm{can}}=0$ ssi $X\perp U$ et on retrouve la même équation (je vous laisse y réfléchir). En fait $\operatorname{Ker} A=\operatorname{Vect}(U)^{\perp}$.

Espace propre associé à λ On peut calculer et résoudre le système $n\times n$, sachant que c'est une droite, mais, « *vu* » le λ, le calcul est assez infaisable. En fait Il faut utiliser un cours qu'on traitera bientôt : les matrices symétriques réelles ont des espaces propres orthogonaux : $E(\lambda)\perp E(0)$ et son cours sur les orthogonaux amène $E(\lambda)=(\operatorname{Vect}(U)^{\perp})^{\perp}=\operatorname{Vect}(U)$

CCP PSI 2018-2017 (matrice par blocs 2x2)

Ex 6

1) La matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ est-elle ~~diagonalisable ?~~ inversible? Déterminez ses éléments propres.

2) Déterminez les éléments propres de la matrice $B=\begin{pmatrix}A&A\\A&A\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

1) L'inversibilité est immédiate par $\det(A)=-3\neq 0$. On calcule $\chi_A=x^2-2x-3$ puis $S=2$ et $P=-3$: 3 et -1 conviennent et donc sont les valeurs propres de A. la résolution des 2 systèmes 2×2 correspondant aux espaces propres-noyaux est immédiate, je ne mets que le résultat : $E(-1)=\operatorname{Vect}(-1,1)$ et $E(3)=\operatorname{Vect}(1,1)$.

Remarque : Quand vous relirez plus tard cet exercice, la matrice est symétrique réelle donc diagonalisable et on a bien les espaces propres orthogonaux : $E(-1)\perp E(3)$: ceci permet de vérifier d'éventuelles erreurs de calcul.

2) Il faut évidemment essayer de se servir du résultat précédent, même s'il est possible de calculer le polynôme caractéristique de B qui est un déterminant 4×4 et ensuite résoudre plusieurs systèmes 4×4 ce qui risque de prendre du temps. On pose $U=(-1,1)$ et $V=\text{Vect}(1,1)$ et on a établi $AU=-U,\ AV=3V$. Il faut chercher des vecteurs propres sous la forme de blocs. L'idée est d'essayer des blocs (je les mets en ligne pour la rédaction) $(U\ U)$ ou $(U\ 0)$ ou $(0\ V)$ ou $(U\ V)$ ou $(V\ V)$... Il faut comprendre aussi que dès qu'on a trouvé 4 vecteurs propres ***indépendants***,on a nécessairement terminé (***mais attention!*** il se pourrait qu'il y en ait moins, voire aucun dans $\mathbb{R}$).

$$\begin{pmatrix} A & A\\ A & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AU\\ AU\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} U\\ U\end{pmatrix}\qquad \text{raté, pourquoi?}$$

$$\begin{pmatrix} A & A\\ A & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U\\ U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2AU\\ 2AU\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} U\\ U\end{pmatrix}\qquad \text{gagné, pourquoi?}$$

$$\begin{pmatrix} A & A\\ A & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} V\\ V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2AV\\ 2AV\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix} V\\ V\end{pmatrix}\qquad \text{gagné}$$

$(U\ V)$ ne « *marche* » pas. Quant à $(-U\ \ -U)$ il est colinéaire à $(U\ U)$ donc inutile. Il faut penser à :

$$\begin{pmatrix} A & A\\ A & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} U\\ -U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad \text{gagné, pourquoi?}$$

$$\begin{pmatrix} A & A\\ A & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix} V\\ -V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}\qquad \text{gagné}$$

Montrons proprement que les 4 vecteurs sus-écrits (de $\mathbb{R}^4$) sont indépendants, sachant que U et V le sont (dans $\mathbb{R}^2$).

$$\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix} U\\ U\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix} V\\ V\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} U\\ -U\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} V\\ -V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (\alpha+\gamma)U+(\beta+\delta)V\\ (\alpha-\gamma)U+(\beta-\delta)V\end{pmatrix}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{ccc}\alpha+\gamma & = & 0\\ \beta+\delta & = & 0\\ \alpha-\gamma & = & 0\\ \beta-\delta & = & 0\end{array}\right.\Longrightarrow \alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

Terminons le raisonnement en utilisant la multiplicité (il y a un raisonnement un peu plus propre, mais très voisin, à l'aide des dimensions des espaces propres mais on n'a pas encore vu ce théorème). Les valeurs propres de B trouvées sont $-2, 6, 0$. Notons que pour l'instant ***on ne sait pas*** s'il n'y en a pas d'autres, mais il y en a 4 au maximum.

$$E(-2)\supset\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} U\\ U\end{pmatrix}\right)\Longrightarrow\mu(-2)\geq 1\quad E(6)\supset\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} V\\ V\end{pmatrix}\right)\Longrightarrow\mu(-6)\geq 1\quad E(0)\supset\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} U\\ -U\end{pmatrix},\begin{pmatrix} V\\ -V\end{pmatrix}\right)\Longrightarrow\mu(0)\geq 2$$

Comme la somme totale de toutes les multiplicités (ou de toutes les dimensions des espaces propres, théorème un peu plus tard) ne peut dépasser 4 (et d'ailleurs est égale à 4 en raisonnant dans $\mathbb{C}$, cad en incluant les vp complexes), toutes ces égalités et inclusions sont en fait des égalités

IMT 2022 | CCP (Polynome caractéristique de l'inverse)

Ex 7 Soit $A\in\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$. Exprimez $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

On rappelle les propriétés du déterminant : $\det(AB)=\det(A)\det(B)$ et $\det(\lambda A)=\lambda^n\det(A)$.

$$\text{On a}\quad \chi_{A^{-1}}(\lambda)\times\det A=\det(\lambda I-A^{-1})\det A=\det\big((\lambda I-A^{-1})A\big)=\det(\lambda A-I)$$
$$=\lambda^n\det\Big(A-\frac{1}{\lambda}I\Big)=(-1)^n\lambda^n\det\Big(\frac{1}{\lambda}I-A\Big)=(-1)^n\lambda^n\chi_A\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)$$

Comme A est inversible $\det A \neq 0$ d'où $\boxed{\chi_{A^{-1}}(\lambda) = (-1)^n \dfrac{\lambda^n}{\det A}\, \chi_A\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)}$

Remarque : On peut se rappeler que, si P est de degré n, $X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est le polynôme avec les coefficients « *à l'envers* » (je vous laisse le vérifier), qu'on appelle ***polynôme réciproque*** de P donc ici :

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \Longrightarrow \chi_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\det A}\left(a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + a_n\right)$$

Ce polynôme est bien unitaire car on se rappelle que $a_0 = (-1)^n \det A$

CCP PSI 2014 (valeurs propres d'une matrice nxn) ✷

Ex 8 Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice réelle carrée d'ordre n qui a $1, 2, \ldots, n$ sur la dernière ligne et dernière colonne et des 0 ailleurs.

Calcul des valeurs propres

Il faut écrire explicitement la matrice, cela aide à voir « *des choses* », éventuellement :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ddots & & 0 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & n-1 \\ 1 & 2 & \ldots & \ldots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

On remarque qu'elle est ***symétrique réelle*** (donc diagonalisable, on le verra par la suite, cela entraîne aussi qu'elle a nécessairement n vp ***réelles***). On remarque aussi les colonnes $C_1, \ldots, C_{n-1}$ colinéaires entre elles (précisément $C_i = iC_1$ pour $2 \leq i \leq n-1$) et C_n indépendante, soit $\operatorname{rg} A = 2$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} A = n-2$. Par un théorème du cours, la multiplicité de 0 vérifie donc $\mu(0) \geq n-2 = \dim E(0)$ (en fait on verra aussi que comme la matrice est diagonalisable, cette inégalité est en fait une égalité, je vous le dis quand vous relirez la correction plus tard, mais on peut s'en passer). Il faut comprendre qu'on a déjà trouvé (au moins) $n-2$ vp de A. On n'oublie pas alors que la trace est la somme des (toutes) valeurs propres, soit ici, les 2 « *autres* » valeurs propres vérifient $\lambda + \mu + 0 + \cdots + 0 = \operatorname{tr}(A) = n$. On peut donc déjà affirmer $\operatorname{Sp} A = \{0, \lambda, n-\lambda\}$ mais ce n'est pas suffisant car il faut préciser s'il y a une égalité possible entre ces 3 valeurs.

Comment trouvez les 2 autres valeurs propres? en fait en trouver une suffira. Une première méthode est tout simplement de calculer le polynôme caractéristique mais c'est un déterminant d'une matrice $n \times n$, donc délicat.

Méthode 1 (Calcul du polynôme caractéristique par recherche usuelle d'une récurrence) :

On effectue des développements par rapport à des colonnes ou des lignes comme indiqué :

$$D_n = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots & -2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda & -n+1 \\ -1 & -2 & \ldots & -n+1 & \lambda - n \end{vmatrix} \overset{dev.\, L_1}{=} \lambda D_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1) \begin{vmatrix} 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \\ -1 & -2 & \ldots & \ldots & -n+1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{dv.\, C_1}{=} \lambda D_{n-1} + (-1)^{n+1}(-1)\left((-1)^n(-1) \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{vmatrix}\right) = \lambda D_{n-1} - (-1)^2\, \lambda^{n-2}$$

Pourquoi je laisse le $(-1)^2$? Pour que vous compreniez ce qui suit ; Il faut prêter ***très attention*** aux récurrences de déterminants d'ordre n qui peuvent se révéler délicates. En particulier celle-ci car, si elle était normale le D_n parti de $1\dots n$ devrait donner un D_{n-1} d'éléments $1\dots n-1$. Ici on a plutôt :

$$D_n(1,\dots,n) = \lambda D_{n-1}(2,\dots,n) - (-1)^2\lambda^{n-2} \quad \text{et la récurrence d'après est alors}$$
$$D_{n-1}(2,\dots,n) = \lambda D_{n-2}(3,\dots,n) - (-2)^2\lambda^{n-3}$$

On poursuit la récurrence pour la deviner :

$$\begin{aligned} D_n &= \lambda\left(\lambda D_{n-2}(3,\dots,n) - (-2)^2\lambda^{n-3}\right) - (-1)^2\lambda^{n-2} \\ &= \lambda^2 D_{n-2}(3,\dots,n) \ - \lambda^{n-2}\left((1)^2 + (2)^2\right) \\ &= \dots \\ &= \lambda^{n-2} D_2(n-1,n) \ - \lambda^{n-2}\left((1)^2 + (2)^2 + \cdots + (n-2)^2\right) \end{aligned}$$

On termine par $D_2(n-1,n) = \begin{vmatrix} \lambda & -(n-1) \\ -(n-1) & \lambda - n \end{vmatrix} = \lambda^2 - n\lambda - (n-1)^2$

Je vous laisse vérifier que l'on trouve alors $\boxed{\det(\lambda I - A) = D_n = \lambda^{n-2}\Big(\lambda^2 - n\lambda - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\Big)}$.

Les deux valeurs propres qui manquaient sont donc, via $\Delta = n^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} k^2 > 0$,

$$\lambda = \frac{1}{2}\Big(n + \sqrt{n^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} k^2}\Big) \qquad \mu = n - \lambda = \frac{1}{2}\Big(n - \sqrt{n^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} k^2}\Big)$$

Remarque : En fait la somme se calcule. Je rappelle que la somme des n premiers entiers au carré est au programme et vaut $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. On peut remplacer même si cela n'apporte pas grand-chose, $\Delta = n^2 + \frac{4}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{9}(12n^3 - 9n^2 + 6n)$

Méthode 2 (Calcul du polynôme caractéristique plus rapide par une combinaison linéaire astucieuse) :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots & -2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & -n+1 \\ -1 & -2 & \dots & -n+1 & \lambda - n \end{vmatrix} \overset{(1)}{\cong} \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 \\ -1 & -2 & \dots & -n+1 & K \end{vmatrix} \overset{(2)}{\cong} \frac{1}{\lambda}\lambda^{n-1} K = \lambda^{n-2}\,(\lambda^2 - n\lambda - \sum_{k=1}^{n-1} k^2)$$

- **(1)** On a effectué $C_n \longleftarrow \lambda C_n + C_1 + 2C_2 + \cdots + (n-1)C_{n-1}$ et on a $K = \lambda(\lambda - n) - \sum_{k=1}^{n-1} k^2$. Cette combinaison de colonnes n'étant pas stricto sensu une combinaison « *autorisée* » (à cause du λC_n), au sens où elle ne laisse pas le déterminant inchangé, le déterminant est multiplié par λ (à cause du λC_n d'où la division par λ. Si vous ne vous rappelez pas ceci du cours de Sup, attendez le cours sur les déterminants de Spé.
- **(2)** La matrice est triangulaire et je rappelle que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux

On retrouve bien le même polynôme caractéristique que la méthode au dessus.

Méthode 3 (plus délicate, mais sans calcul du polynôme caractéristique de A) :

Comme vu dans le préambule, on sait déjà $\chi_A(\lambda) = \lambda^{n-2}Q(\lambda)$ avec Q de degré 2 dont les 2 racines sont les 2 valeurs propres cherchées. On applique le cours : pour tout endomorphisme a' induit sur un sev stable par a, $\chi_{a'} \mid \chi_a$ (a endomorphisme canoniquement associé à A comme dit plus haut). Il suffit de trouver le « *bon* » espace stable de dimension 2 qui va juste nous donner ce polynôme de degré 2…

On prend $U = (1,2,\dots,n-1,0)$ et $V = (0,\dots,0,1)$. On calcule :

$$AU = \Big(0,\dots,0,\sum_{k=1}^{n-1} k^2\Big) = \Big(\sum_{k=1}^{n-1} k^2\Big)V \qquad AV = (1,2,\dots,n) = U+V$$

Soit a' l'endomorphisme induit sur le ***plan stable*** $\mathrm{Vect}(U,V)$ dans la base $\mathrm{Vect}(U,V)$ a pour matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sum_{k=1}^{n-1} k^2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \chi_{A'} = \lambda^2 - \lambda - \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

On retrouve donc les 2 valeurs propres manquantes.

Calcul des vecteurs propres

Méthode 1 (résolution usuelle des systèmes associés aux noyaux :

Espace propre associé à la valeur propre 0 :

Je rappelle que c'est le noyau et si vous avez bien suivi, on sait que c'est un sev de dimension $n-2$. Cela va aider (un peu) à résoudre ce système $n\times n$ qui contient, par équivalence, juste 2 lignes (regardez la matrice A) :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} + nx_n & = & 0 \\ x_n & = & 0 \end{array}\right.$$

En fait, il y a pas grand chose à résoudre, on donne une base (qui contient $n-2$ vecteurs à n coordonnées :

$$\big((-2,1,0,\dots,0),(-3,0,1,0,\dots,0),\dots,(-(n-1),0,\dots,0,1,0)\big)$$

Attention ! quand même, car ce sont des systèmes $n\times n$!

Espace propre associé à la valeur propre λ :

On écrit le système $(\lambda I - A)X = 0$ ou $AX = \lambda X$, et on ne remplace pas λ par sa valeur numérique « *lourde* », et on ***n'oublie surtout pas*** que c'est une droite car la multiplicité de la vp est 1 :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_n & = & \lambda x_1 \\ 2x_n & = & \lambda x_2 \\ \dots & & \\ (n-1)x_n & = & \lambda x_{n-1} \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n & = & \lambda x_n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & \frac{1}{\lambda}x_n \\ x_2 & = & \frac{2}{\lambda}x_n \\ \dots & & \\ x_{n-1} & = & \frac{n-1}{\lambda}x_n \\ x_n & = & x_n \end{array}\right.$$

En fait, l'astuce est de ne pas utiliser la dernière ligne qui est ***nécessairement*** combinaison des $n-1$ premières lignes car le rang du système est $n-1$ (je vous laisse y réfléchir). on a donc $\boxed{E(\lambda) = \mathrm{Vect}\big(1,2,\dots,n-1,\lambda\big)}$

Espace propre associé à la valeur propre μ :

De manière similaire $\boxed{E(\mu) = \mathrm{Vect}\big(1,2,\dots,n-1,\mu\big)}$

Méthode 2 (plus délicate) :

On reprend la méthode 3 utilisée pour les valeurs propres : la matrice 2×2 notée A' avait pour valeurs propres λ et $\mu = n-\lambda$. Les vecteurs propres associés se calculent immédiatement (par la première ligne du système 2×2), c'est, respectivement $\mathrm{Vect}(1,\lambda)$ et $\mathrm{Vect}(1,\mu)$. En se rappelant que c'est la matrice de l'endomorphisme a' induit par a sur le plan (U,V), on trouve donc, respectivement $\text{Vect}(U+\lambda V)$ et $\text{Vect}(U+\mu V)$; Je vous laisse vérifier que c'est bien les mêmes vecteurs que plus haut.

Quant au noyau, on peut aussi aller un peu plus vite, si on se rappelle qu'on a remarqué que les $n-1$ premières colonnes de A vérifient $C_i = iC_1$. Si on a bien compris son cours de sup, chacune de ses combinaisons, soit $C_i - iC_1 = 0 = a(e_i - ie_1)$ vous donne un vecteur du noyau, qui est $e_i - ie_1$, et au final, une base pour cause de liberté et rang : on retrouve ainsi :

$$\big((-2,1,0,\dots,0),(-3,0,1,0,\dots,0),\dots,(-(n-1),0,\dots,0,1,0)\big)$$

Ex 9

1) Que peut-on dire des vp de A^2 par rapport à celles de A ?

2) Montrez que la matrice $D\text{iag}(-1,0,0)$ n'a pas de racine carrée dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Montrez qu'elle en a une infinité dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1) Si λ est vp de A, $AX = \lambda X$ avec$X \neq 0$, alors $A^2X = AAX = A\lambda X = \lambda AX = \lambda\lambda X = \lambda^2 X$. ***Comme*** $X \neq 0$, on en déduit λ^2 vp de A^2. ***Mais Attention !*** on n'en déduit pas que ***les*** valeurs propres de A^2 sont les carrés des valeurs propres de A. On a ***seulement démontré un sen***s : les carrés des valeurs propres de A sont vp de A^2. Pour être clair, il se « *pourrait* » que des vp de A^2 ne soient pas des carrés d'une vp de A…

Et justement c'est possible, mais dans $\mathbb{R}$…, pas dans $\mathbb{C}$…. Je vous donne un contre-exemple en reprenant l'usuelle matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, qui est $R = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$. Cette matrice n'a pas de valeur propre (réelle) comme on l'a vu. Or un calcul élémentaire donne $A^2 = -I_2$ (c'est la rotation d'angle π !) qui a pour valeur propre -1. Ce ne peut donc être un carré d'une vp de A, puisqu'il n'y en a pas (de réelles). De plus -1 ne « *risque pas* » d'être le carré d'un réel …

Remarque : Par contre, dans $\mathbb{C}$, on démontre que les racines carrées complexes de A^2 sont ***exactement*** les carrés des racines complexes de A, en comptant bien la multiplicité. Par exemple plus haut, R a pour vp complexe i et $-i$ qui ont pour carré -1, mais on l'a donc double. On ne peut démontrer ce résultat dans $\mathbb{C}$ pour l'instant, il nous manque des outils (il faut trigonaliser, voir cours plus tard).

2) Je rappelle qu'une racine carrée de D est une matrice M telle que $M^2 = D$. On n'emploie ***surtout pas*** le symbole $\sqrt{D}$! On utilise Q1 et on raisonne par l'absurde :

Si $M^2 = D = D\text{iag}(-1,0,0)$. les vp de D sont évidemment -1 et 0 qui est double. M réelle d'ordre 3 impair a au moins une vp réelle λ. Son carré est une vp de $M^2 = D$, ce ne peut être que 0, soit $\lambda = 0$. En fait, les seules vp réelles possibles de M sont 0. Comme 0 est vp double de D, 0 ne peut ***pas être vp triple*** de M. Par suite, il y a donc une autre vp de M, notée $\omega \neq 0$, qui est ***nécessairement (vraie) complexe***. On a donc $\omega^2 = -1$. Comme M est réelle, on sait que $\overline{\omega}$ est aussi vp de M, donc $\overline{\omega}^2 = \overline{\omega^2} = -1$ est vp de $M^2 = D$, cad -1 est vp de D (au moins) double. ***Absurde***.

3) Il y a déjà deux matrices racines carrées complexes immédiates de D qui sont diagonales : $D\text{iag}(\pm i,0,0)$. Montrons qu'il y en a d'autres. L'idée est décrire D comme une matrice ***diagonale par blocs*** :

$$D = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad\qquad R = \left(\begin{array}{c|cc} i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ensuite on cherche un bloc diagonal 2×2 qui sera racine-carrée du bloc matrice nulle 2×2. Il suffit de penser aux matrices nilpotentes. La matrice $\left(\begin{smallmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$ convient. Toutes les matrices R écrites plus haut sont donc racines carrées de D et en nombre infini. Il y en a d'autres ...

Remarque : Il est possible de trouver toutes les matrices carrées de D, même avec les outils de votre programme, on fera un ou deux exos de ce type en cours. Ici ce sont les $\begin{pmatrix}\pm i & 0 & 0\\ 0 & c & a\\ 0 & \frac{-c^2}{a} & -c\end{pmatrix}$

Ex 10 ✷ Etablir que toute matrice stochastique (cad réelle telle que $\forall 1\le i\le n \quad \sum_{j=1}^n M_{ij}=1$ et $M_{ij}\ge 0$) admet des valeurs propres complexes de module inférieur ou égal à 1.

Soit M une matrice stochastique cad à coefficients réels dans $[0,1]$ tels que la somme de chaque ligne vaut 1. Soit λ une valeur propre complexe de M et $X\neq 0\in\mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. Montrons $|\lambda|\le 1$.

Pour tous $1\le i\le n$, la i[e] ligne du système linéaire $MX=\lambda X$ s'écrit :

$$m_{i1}x_1+m_{i2}x_2+\cdots+m_{in}x_n=\lambda x_i$$

On pose $\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$ (c'est une notation usuelle), et soit i_0, l'indice qui réalise le max, cad $\|x\|_\infty=|x_{i_0}|$. Comme $X\neq 0$, les coordonnées sont ***non tous nulles***, donc nécessairement le max est non nul. Considérons le « *module de la ligne* » d'indice i_0 :

$$\begin{aligned}|\lambda|\,|x_{i_0}|&=|m_{i_01}\,x_1+\cdots+m_{i_0n}\,x_n|\le |m_{i_01}|\,|x_1|+\cdots+|m_{i_0n}|\,|x_n|\\ &\le |m_{i_01}|\|x\|_\infty+\cdots+|m_{i_0n}|\|x\|_\infty=(m_{i_01}+\cdots+m_{i_0n})\,\|x\|_\infty=1\,\|x\|_\infty\end{aligned}$$

Il suit $|\lambda|\|x\|_\infty\le\|x\|_\infty$, puis $(|\lambda|-1)\|x\|_\infty\le 0$ et comme $\|x\|_\infty\neq 0$, on en déduit $|\lambda|-1\le 0$ soit $|\lambda|\le 1$.

Remarque : Pour toute matrice ***stochastique***, on a aussi que 1 est ***toujours*** valeur propre. Il suffit « *d'essayer* » le vecteur $J=(1,\dots,1)$ pour constater $MJ=J=1.J$ avec $J\neq 0$ (laissé au lecteur).

Ex 11 Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrez $\operatorname{Sp} u=\{0\}$

Soit λ une valeur propre de u nilpotent. Il existe donc $\boxed{x\neq 0}$ tel que $u(x)=\lambda x$. Comme u est nilpotent, il existe un entier $k\ge 1$ tel que $u^k=0$. On ***applique alors*** u $k-1$ fois à l'égalité précédente. Il vient : $u^{k-1}(u(x))=u^k(x)=0$, et ***d'autre part*** :

$$\begin{aligned}u^{k-1}(u(x))&=u^{k-1}(\lambda x)=\lambda u^{k-1}(x)=\lambda u^{k-2}(u(x))=\lambda u^{k-2}(\lambda x)=\lambda\lambda u^{k-2}(x)\\ &=\lambda^2u^{k-2}(x)=\cdots=\lambda^3u^{k-3}(x)=\cdots=\lambda^{k-1}u^1(x)=\lambda^{k-1}\lambda x=\lambda^k x\end{aligned}$$

Il vient donc $u^k(x)=\lambda^k x=0$ et ***comme*** $x\neq 0$, $\lambda^k=0$, soit $\lambda=0$. (***car*** on est dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Attention! à ne pas commettre d'erreur de raisonnement et à en déduire que l'exo est terminé. on vient seulement de démontrer ***l'inclusion*** $\operatorname{Sp} u\subset\{0\}$.

Pour l'inclusion réciproque, il faut démontrer que 0 est bien valeur propre. On a déjà vu (je ne le redémontre pas ici) qu'un endomorphisme ***nilpotent*** n'est pas bijectif (ou n'est pas inversible pour $\circ$, c'est pareil). Comme on est en dimension finie, 0 est ***valeur propre*** (cours).

Remarques

- Un endomorphisme nilpotent est le seul endomorphisme qui a pour seule valeur propre 0 (en raisonnant dans $\mathbb{C}$). ***Par contre*** il y a d'autres matrices qui ont pour seule valeur propre ***réelle*** 0, ce sont les matrices antisymétriques (elles ont aussi des vp (vraies) complexes 2 à 2 conjuguées).
- Comme une homothétie, un endomorphisme nilpotent n'a qu'***une seule valeur propre***. ***Par contre***, tous les vecteurs ne sont pas vecteurs propres. En prenant la « *plus petite* » matrice nilpotente $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, le lecteur vérifiera par lui même que les seuls vecteurs propres sont les vecteurs du noyau, cad les vecteurs $(a, 0)$ qui ne sont pas tous les vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
- On peut retenir que si $u(x) = \lambda x$, alors $u^k(x) = \lambda^k x$ et ***ne pas écrire***, comme je le vois parfois, par « *analogie* » avec $\mathbb{R}$, $u^k(x) = (\lambda x)^k = \lambda^k x^k$ qu i n'a aucun sens mathématique, puisqu'un vecteur à la puissance k n'a aucun sens.

IMT PC 2016 (endomorphisme de matrices)

Ex 12 On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'expression $\phi(M) = M - \mathrm{tr}(M) I_n$.

1) Déterminer les éléments propres de ϕ. ~~L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?~~

2) Déterminer sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique

1) ***Analyse :***

si λ est vp de ϕ, il existe $M \neq 0$ tq $\phi(M) = M - \mathrm{tr}(M) I_n = \lambda M$ puis $(1-\lambda)M = \mathrm{tr}(M) I_n$. Ensuite, la « *clef* » est de « *raisonner vectoriellement* » : on a le vecteur M à gauche et I_n, ils sont donc colinéaires ***sauf si*** $\lambda - 1 = 0$.

Puis, i faut aussi bien ***analyser*** : on en déduit ***ou*** la valeur propre est $\lambda = 1$ ***ou*** si elle n'est pas 1, alors le vecteur propre associé est (à α près I_n). On peut comprendre que l'analyse est terminée puisqu'on a trouvé ***au plus*** 2 valeurs propres : 1 et celle, éventuellement, associée à I_n.

Synthèse :

On calcule $\phi(I_n) = I_n - nI_n = (1-n)I_n$. ***Comme*** $I_n \neq 0$, $n-1$ est vp de ϕ associé à I. On a donc déjà établi $E(n-1) \supset \mathrm{Vect}(I_n)$ et $\mathrm{Sp}\,\phi \subset \{n-1, 1\}$.

Ensuite $\phi(M) = 1.M \iff -\mathrm{tr}(M) I_n = 0 \iff \mathrm{tr}(M) = 0$. On reconnaît un hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, déjà vu en exos plusieurs fois, comme noyau de la forme linéaire tr. On vient d'établir $E(1) = H$ (= car on a un équivaut) et aussi $\mathrm{Sp}\,\phi = \{1, n-1\}$.

Reste à déterminer $E(n-1)$ car on a, actuellement, juste une inclusion. On raisonne avec la multiplicité : comme on sait que $\dim E(\lambda) \leq \mu(\lambda)$, il vient ici $\mu(1) \geq \dim H = n^2 - 1$ et $\mu(n-1) \geq 1$. Comme la somme des multiplicités ne peut dépasser la dimension de l'ev soit n^2, nécessairement $\mu(n-1) = 1$ et par suite l'espace propre est une droite, d'où l'égalité $E(n-1) = \mathrm{Vect}(I_n)$. On a aussi d'ailleurs $\mu(1) = n^2 - 1$.

2) Ces dernières remarques sur les multiplicités nous donnent immédiatement :

$$\mathrm{tr}(\phi) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n^2-1} + n - 1 = n^2 + n - 2 \qquad \det(\phi) = 1^{n^2-1} \times (n-1)^1 = n - 1 \qquad \chi_\phi(x) = (x-1)^{n^2-1}(x - n + 1)$$

CCP PC 2011-2010 (endomorphisme de polynômes)

Ex 13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(-4)X + P(6) \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. ~~L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?~~

On calcule immédiatement le noyau :

$$P \in \mathrm{Ker}\, u \iff u(P) = 0 \iff P(-4)X + P(6) = 0 \iff P(-4) = P(6) = 0$$

On a appliqué : un polynôme est nul ssi tous ses coefficients sont nuls. A noter que $\operatorname{Ker} u$ est donc l'ensemble des polynômes multiples de $(X+4)(X-6)$, cad les polynômes de la forme $(X+4)(X-6)Q(X)$. On constate :

$$(X+4)(X-6)Q(X) = (X+4)(X-6)\sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k = \sum_{k=0}^{n-2} a_k\,(X+4)(X-6)X^k$$

On a donc une famille génératrice de $\operatorname{Ker} u$: $\left((X+4)(X-6)X^k\right)_{0\le k\le n-2}$. Cette famille est libre par degré tous distincts c'est donc une base de $\operatorname{Ker} u$ et $\dim \operatorname{Ker} u = n-1$ (ce n'était pas demandé). Sur cet exemple, on a vue que l'ensemble des polynômes multiples d'un polynôme $Q(X)$ fixé est toujours un sev. Par contre c'est faux pour l'ensemble des polynômes qui divise un polynôme fixé (je vous laisse y réfléchir)

Le théorème du rang amène $\dim \operatorname{Im} u = \dim \mathbb{R}_n[X] - (n-1) = (n+1)-n+1 = 2$. $\operatorname{Im} u$ est un plan. Comme on remarque immédiatement que $\deg u(P) \le 1$, on en tire $\operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}_1[X]$ et pour des raisons de même dimension, $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}_1[X]$.

On a déjà trouvé 0 vp de u et $E(0) = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], P(-4) = P(6) = 0\right\} = \operatorname{Vect}\left((X+4)(X-6)X^k\right)_{0\le k\le n-2}$.

Analyse :

Si λ est vp de u, $u(P) = P(-4)X + P(6) = \lambda P(X)$, avec $P \neq 0$.

On en déduit ***ou*** P de degré ≤ 1, ***ou*** $\lambda = 0$ déjà traité. Cela « *suffit pour la pratique* », l'analyse est terminée.

Synthèse :

$P = aX+b$ est vecteur propre associé à $\lambda \neq 0$ ssi :

$$P(-4)X + P(6) = \lambda aX + \lambda b \iff \begin{cases} P(-4) = -4a+b &=& \lambda a \\ P(6) = 6a+b &=& \lambda b \end{cases} \iff \begin{cases} (-4-\lambda)a+b &=& 0 \\ 6a+(1-\lambda)b &=& 0 \end{cases}$$

Attention! à bien raisonner. Comme il est nécessaire d'obtenir (au moins) un polynôme non nul, cad au moins un couple $(a,b) \neq (0,0)$, le déterminant de la matrice du système ***doit être nul***, puisque non inversible, soit $(-4-\lambda)(1-\lambda)-6 = 0 \iff \lambda^2+3\lambda-10 = 0$: on a $S = -3$ et $P = -10$: les nombres -5 et 2 conviennent et sont donc les 2 racines. On résout alors le système pour chacune de ces 2 valeurs. Je ne mets pas les détails de ces 2 systèmes 2×2. ***On n'oublie pas*** de revenir au polynôme originel $aX+b$ et on ne donne pas juste les valeurs de a et b.

Conclusion : -5 et 2 sont aussi valeurs propres et $E(-5) = \operatorname{Vect}(-1+X)$ $E(2) = \operatorname{Vect}(6+X)$

Mines-Ponts PSI 2023-2022 (équation fonctionnelle aux valeurs propres) ✷ ☜

Ex 14 Soient E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, p et q deux réels avec $p+q=1$ et $p \in \left]-1,0\right[\cup \left]0,1\right[$. On pose $u(f) = g$ avec $g : x \longrightarrow f(px+q)$

1) Montrez que u est un automorphisme de E.

2) Montrez que les vp de u sont dans $\left]-1,1\right]$

3) Montrez que si f est vecteur propre de u, il existe un entier k tq $f^{(k)} = 0$. En déduire l'ensemble des vecteurs propres de u. [**2022 :** Question absente] .

4) Calculez $u^n(f)(x)$ par récurrence. [**2022 :** Question absente] .

1) Il est immédiat que u est linéaire. C'est un endomorphisme car il est clair aussi que si f est C^∞, g l'est aussi. Comme $y = px+q \iff x = \frac{1}{p}y - \frac{q}{p}$ (car $p \neq 0$), u est bijective de réciproque $f \longrightarrow \left[x \to f(\frac{1}{p}y - \frac{q}{p})\right]$

2) Soit λ une vp de u, donc il existe $f \neq 0$ tq $f(px+q) = \lambda f(x)$, pour tout x. En particulier pour $x = 1$, $f(1) = \lambda f(1)$. On en tire $\lambda = 1$ ou $f(1) = 0$.

On construit la suite récurrente $u_0 = x$, $u_{n+1} = pu_n + q$, puis $u_{n+1} - 1 = p(u_n - 1)$ et l'hypothèse $|p| < 1$ amène donc que la suite (u_n) converge vers 1

Si $\lambda \neq 1$, . On peut aussi écrire :

$$f(u_{n+1}) = \lambda f(u_n) \quad \Longrightarrow f(u_0) = f(x) = \frac{1}{\lambda^n} f(u_n)$$

Si $|\lambda| \geq 1$, $f(u_n) \longrightarrow f(1) = 0$, par continuité de f en 1 et $\frac{1}{\lambda^n}$ bornée. On en déduit que $f(x)$ est nul ***pour toute*** valeur de x, ce qui est absurde pour un vecteur propre.

Si $\lambda = 1$, $f(px+q) = f(x)$ amène à $f(u_{n+1}) = f(u_n) = \cdots = f(u_0) = f(x)$, soit par passage à la limite par continuité de f, $f(x) = f(1) = cste$. Réciproquement, si f est constante, on a bien $u(f) = g = f$.

3) Pour $\lambda = 1$, les vecteurs propres qui sont les fonctions constantes vérifient immédiatement $f' = 1$, soit $k = 1$ convient. Pour $\lambda \in \left]-1,1\right[$, $f(px+q) = \lambda f(x)$ amène par dérivation n-ième, $p^n f^{(n)}(px+q) = \lambda f^{(n)}(x)$. Par suite $f^{(n)}$, si non nul, est un vecteur propre associé à $\mu = \frac{\lambda}{p^n}$. Comme $|p| < 1$, cette quantité $\to +\infty$ avec n. Or on sait que $|\mu| \leq 1$. ceci impose que à partir d'un certain rang $f^{(n)} = 0$.

4) En reprenant la suite récurrente $u_0 = x$ et $u_{n+1} = pu_n + q$, on a immédiatement par récurrence $u^n(x)(x) = f(u_n)$. Reste à calculer cette suite arithmético-géométrique. Par récurrence, on trouve $u_n = p^n x + q(1 + p + \cdots + p^{n-1})$

CCP PSI 2015-2014 (endomorphisme de fonctions)

Ex 15 On note $E = C^\infty\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ et ϕ l'application de E dans E qui à f associe g définie par $g(x) = f'(x) - xf(x)$.

1) Montrez ϕ endomorphisme.

2) Donnez valeurs propres et vecteurs propres de ϕ.

3) Donnez $\operatorname{Ker}\phi^2$.

1) On peut dire ϕ est clairement linéaire par linéarité de la dérivation. Néanmoins, je vous le rédige ***car attention !*** à l'aspect « *fonctionnel* », ϕ est une « *fonction de fonctions* ». Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $f, g \in E$ et tout x réel :

$$\phi\left(\alpha f + \beta g\right)(x) = \left(\alpha f + \beta g\right)'(x) - x\left(\alpha f + \beta g\right)(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) - \alpha x f(x) - \beta x g(x) = \alpha\phi(f)(x) + \beta\phi(g)(x)$$

Ne pas ***oublier*** la preuve de ***endo***morphisme, cad la vérification de ***élément de*** E. Ici, on peut se contenter de dire : si f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, on sait (cours) que f' l'est aussi, donc par sommation $f'(x) - xf(x)$ aussi.

2) ***Analyse :***

Soit λ une valeur propre de ϕ, alors il existe une fonction ***indéfiniment dérivable non nulle*** f telle que $\phi(f) = \lambda.f$, soit encore $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - xf(x) = \lambda f(x)$. On en tire immédiatement que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - (x+\lambda)y = 0$. On sait alors, cours de Sup, que les solutions sont : $y = C\exp\left(\int (x+\lambda)\,dx\right) = C\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + \lambda x\right)$

Comme on a résolu, l'analyse est terminée, mais il faut bien analyser en terme d'éléments propres. A priori, comme on n'a pas trouve de « *contraintes* » sur λ, il semblerait que tout réel est vp et de plus, les seuls vecteurs propres ***possibles*** (qui sont des fonctions ici) associés à λ sont les fonctions ci-dessus..

Synthèse :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ***quelconque***. On n'est pas obligé d'utiliser la constante C, les vecteurs propres étant toujours définis à au moins un scalaire près, on calcule (on essaye d'écrire « *fonctionnellement* ») :

$$\phi\left(x \to e^{1/2x^2 + \lambda x}\right)(x) = \left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right)' - x\left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right) = (x+\lambda)\left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right) - x\left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right) = \lambda\left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right). \quad \textbf{\textit{Ok}}$$

On n'oublie pas de dire (vérifier) que la fonction est bien ***non nulle*** et ***aussi*** qu'elle est bien de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Conclusion, tout réel est valeur propre et l'espace propre associé est une droite (une droite de fonctions) :

$$\operatorname{Sp}\phi = \mathbb{R} \qquad E(\lambda) = \operatorname{Ker}(\phi - \lambda Id) = \operatorname{Ker}(\lambda Id - \phi) = \operatorname{Vect}\left(x \to e^{1/2x^2+\lambda x}\right)$$

3) La il y a une démarche astucieuse pour arriver à résoudre. L'idée « *naturelle* » est de commencer par calculer ϕ^2 :

$$\phi^2\left(f\right)(x) = \left(f'(x) - xf(x)\right)' - x\left(f'(x) - xf(x)\right) = f''(x) - 2xf'(x) + (x^2-1)f(x)$$

Le problème est alors que, lorsqu'on cherche à « *résoudre* » le noyau, cad l'équation différentielle $y'' - 2xy' + (x^2-1)y = 0$, elle est trop difficile à résoudre sans indications. On procède autrement.

On utilise l'équivalence $\boxed{x \in \operatorname{Ker} h^2} \iff h^2(x) = 0 \iff h\big(h(x)\big) = 0 \iff \boxed{h(x) \in \operatorname{Ker} h}$

En revenant à notre exo, comme $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Vect}\left(x \to e^{1/2x^2}\right)$, $\phi(f) \in \operatorname{Ker}\phi$ s'écrit $f'(x) - xf(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$. Encore une équation différentielle linéaire à résoudre **mais** du premier ordre! C'est du cours de Sup.

Résolution de l'équation homogène :

L'équation $y' - xy = 0$ se résoud immédiatement en $y = Ce^{1/2x^2}$.

Variation de la constante : On cherche une solution particulière sous la forme $y = C(x)e^{1/2x^2}$ ce qui donne :

$$C'(x)e^{1/2x^2} + C(x)\left(xe^{1//2x^2} - xe^{1/2x^2}\right) = Ce^{1/2x^2} \iff C'(x) = C \iff C(x) = Cx + D$$

Il vient que les solutions sont $(Cx+D)e^{1/2x^2}$. On peut encore écrire $\boxed{\operatorname{Ker}\phi^2 = \operatorname{Vect}\left(x \to e^{1/2x^2}, x \to x\,e^{1/2x^2}\right)}$. C'est ***un plan***.

Mines-Ponts PSI 2023 (endomorphisme de fonctions) ✷

Ex 16 On note E l'ev des fonctions continues 1-périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit T l'opérateur défini par $\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

1) Montrez T endomorphisme de E.

2) Montrez que si m est vp de T, alors $|m| \leq 1$. Etudiez le cas $|m| < 1$.

1) La linéarité, immédiate, est laissée au lecteur. Quant à « *endo* », Il est clair que $T(f)$ est continue; reste à vérifier la 1-périodicité : $\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x+1) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x+1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}+1\right)\right) = T(f)(x)$ par 1-périodicité de f.

2) Si λ vp de T, il existe $f \neq 0$ tq, pour tout x, $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\lambda f(x)$. f est bornée sur $\mathbb{R}$ car continue et 1 périodique, donc bornée sur le ***segment*** $[0,1]$: cette borne, notée usuellement $\|f\|_\infty$, est ***atteinte***, par exemple en x_0. Ainsi :

$$\left|2\lambda f(x_0)\right| = 2|\lambda|\,\|f\|_\infty \leq \left|f\left(\frac{x_0}{2}\right)\right| + \left|f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)\right| \leq 2\|f\|_\infty \quad \Longrightarrow \quad |\lambda| \leq 1$$

car $\|f\|_\infty \neq 0$ ***car*** ce n'est pas la fonction nulle!

Si f vecteur propre non nul de T associé à λ, on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\lambda}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4\lambda^2}\left(f\left(\frac{x}{4}\right) + f\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{x}{4} + \frac{3}{4}\right)\right)$$

On démontre par récurrence $f(x) = \dfrac{1}{\lambda^n}\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x}{2^n} + \frac{k}{2^n}\right)$ (je vous le laisse). Il vient alors :

$$\left|f(x)\right| \leq \frac{1}{\lambda^n}\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\|f\|_\infty = \frac{1}{\lambda^n}\|f\|_\infty$$

Par suite, si $|\lambda| < 1$,en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, il suit $f(x) = 0$ et ce, pour tout x, soit $f = 0$ ce qui est absurde

Remarque : On vient de démontrer $\operatorname{Sp}_{\mathbb{C}} T \subset U = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$. D'autre part il est clair que 1 est vp de T puisque les fonctions constantes lui sont associées.

CCP PSI 2013 (endomorphisme de suites) ✷

Ex 17 Soit $f : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u \to v$ où $u_0 = v_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. On admet $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de f.

Analyse :

Soit λ une valeur propre de f. Alors $f\big((u_n)\big) = \lambda(u_n) = \begin{cases} u_0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$

La première ligne donne $u_0 = \lambda u_0$ d'où $\lambda = 1$ ou $u_0 = 0$. On vient de montrer que pour une valeur propre $\lambda \neq 1$, alors le premier terme u_0 (de la suite vecteur propre) est ***nécessairement*** nul. Pour $\lambda = 1$, à ce stade de l'analyse, rien n'est démontré.

La deuxième ligne donne $\forall n \geq 1$, :

$$\lambda u_n = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \Longrightarrow u_{n+1} = (2\lambda - 1)u_n \Longrightarrow u_n = (2\lambda - 1)^{n-1} u_1$$

Attention au fait que l'on commemce la récurrence à 1 mais pas à 0. Il reste encore à injecter (u_n) suite non nulle qui nous amène à considérer le cas $\lambda = \frac{1}{2}$. On obtient $u_n = 0$, ***sauf pour*** $n = 1$, donc u_1 quelconque. La première ligne nous donne $u_0 = 0$. Donc il existe des suites non nulles vecteurs propres, celles où u_1 est quelconque, ce qui donne une droite.

Résumons, l'analyse a montré :

- Pour $\lambda = 1$, les seules suites vecteurs propres associées « *possibles* » sont les suites où $u_n = u_1 = a$ pour tout $n \geq 1$ et $u_0 = b$ quelconque.
- Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, les seules suites vecteurs propres associées « *possibles* » sont les suites $(0, a, 0, 0, 0, \dots)$
- Pour $\lambda \neq 1, \frac{1}{2}$, les seules suites vecteurs propres associées « *possibles* » sont les suites $u_n = (2\lambda - 1)^{n-1} u_1$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = 0$. ce sont des suites géométriques mais à partir du rang 1.

En particulier, il semblerait $\mathrm{Sp}\, f = \mathbb{C}$ (on est dans l'ev des suites complexes).

Réciproquement

Examinons ces cas :

- Pour $\lambda = 1$, $f\big((u_n)\big) = f\left(\begin{cases} b & \text{si } n = 0 \\ a & \text{si } n \geq 1 \end{cases}\right) = \begin{cases} b & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a + a) & \text{si } n \geq 1 \end{cases} = (u_n) = 1.(u_n)$

  Pour $b \neq 0$, $(u_n) \neq (0)$, par conséquent 1 est ***bien valeur propre*** de f et l'espace propre associé est un plan formées des suites définies comme plus haut.

  Une base du plan est, par exemple, la famille des 2 suites $(1, 0, 0, 0, \dots)$ et $(0, 1, 1, 1, \dots)$

- Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $f\big((u_n)\big) = f\left(\begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ a & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}0 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{2}(0+0) & \text{si } n \geq 2 \end{cases} = \frac{1}{2}.(u_n)$

  Pour $a \neq 0$, $(u_n) \neq (0)$, par conséquent $\frac{1}{2}$ est ***bien valeur propre*** de f et l'espace propre associé est une droite, la droite dirigée, par exemple, par $(0, 1, 0, 0, 0, \dots)$

- Pour $\lambda \neq 1, \frac{1}{2}$:

$$f\big((u_n)\big) = f\left(\begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ a(2\lambda - 1)^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}\big((2\lambda - 1)^n + (2\lambda - 1)^{n-1}\big) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(2\lambda - 1)^{n-1}(2\lambda - 1 + 1) & \text{si } n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \lambda 0 & \text{si } n = 0 \\ a\lambda(2\lambda - 1)^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases} = \lambda.(u_n)$$

  Pour $a \neq 0$, $(u_n) \neq (0)$, par conséquent ***tout complexe*** $\neq 1, \frac{1}{2}$ est ***bien valeur propre*** de f et l'espace propre associé est une droite, la droite dirigée, par exemple, par $(0, 2\lambda - 1, (2\lambda - 1)^2, (2\lambda - 1)^3, \dots)$

Centrale PSI 2023 (endomorphisme de polynômes)

Ex 18 Soit E l'ev des fonctions polynomiales. Si $P \in E$, on pose $L(P) : x \longrightarrow e^{-x} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} P(t) e^t \, dt$.

1) Montrez L endomorphisme de E.

2) Trouvez les éléments propres de L.

1) La première chose à établir est la convergence de l'intégrale : elle résulte de la continuité de $t \to P(t)e^t$ sur $\left]-\infty, x\right]$ et du fait que $P(t)e^t = o_{-\infty}(\frac{1}{t^2})$

Linéarité immédiate. Reste à prouver endo, cad que $L(P)$ est bien un polynôme. Par linéarité, il faut et il suffit de l'établir pour chaque monôme d'une base comme $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$. En fait, ici çà ne simplifie pas vraiment le calcul, car on sait qu'une primitive d'une fonction de la forme $P(X)e^X$ est nécessairement de la forme $Q(X)e^X$ avec Q de même degré, en ajoutant les croissances comparées en $-\infty$, le résultat suit.

2) ***Analyse :*** Soit λ vp de L, alors $L(P) = \lambda P$ avec $P \neq 0$ puis $\int_{-\infty}^{x} P(t)e^t\, dt = \lambda e^x P(x)$, qui, par dérivation (théorème fondamentale de l'analyse par continuité de la fonction-intégrande et convergence en la borne $-\infty$ (lire plus bas)) amène à $P(x)e^x = \lambda e^x(P(x) + P'(x))$, puis P solution de l'équation différentielle $\lambda y' + (\lambda - 1)y = 0$ ***sur*** $\mathbb{R}$.
Si $\lambda = 0$, on aboutit à $y = 0$ qui n'est pas possible et sinon, l'équation différentielle s'intègre en $y(x) = Ce^{(1-\lambda)x/\lambda}$
Réciproque : $Ce^{(1-\lambda)x/\lambda}$ n'est un polynôme que ssi $\lambda = 1$
Conclusion : $\operatorname{Sp} T = \{1\}$ et $E(1) = \operatorname{Vect}(1)$

Remarques

- ***Attention!*** le théorème fondamental de l'analyse s'énonce : si f continue sur I ***et*** $a \in I$, alors $\int_a^x f$ est C^1 sur I de dérivée f. Il ne donne donc pas exactement le résultat plus haut, car $-\infty$ ne peut-être dans l 'intervalle. En fait, il suffit d'écrire $\int_{-\infty}^{x} f = \int_{-\infty}^{a} + \int_a^x$ et de dériver pour établir que le résultat reste vrai quand la borne est $-\infty$, à condition, bien sûr, que l'intégrale converge.
- T est bijective, il est aisé de démontrer que la bijection réciproque est $P(X) \longrightarrow P(x) + P'(x)$

Ex 19 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f dans $\mathscr{L}(E)$ et $\phi\colon\ u \in \mathscr{L}(E) \mapsto f \circ u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

2) Montrer que u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$.

1) La linéarité de ϕ résulte de la ***linéarité*** de f puisque pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $u, v \in \mathscr{L}(E)$:

$$\phi(\alpha u + \beta u) = f \circ (\alpha u + \beta v) = \alpha f \circ u + \beta f \circ v = \alpha\phi(u) + \beta\phi(v)$$

Je rappelle que la loi $\circ$ se distribue à gauche sur la loi $+$ ***si*** la fonction de gauche est linéaire (regardez au-dessus), ***mais par contre*** se distribue ***toujours*** à droite.
endo résulte du fait que $f \circ u$est bien un endomorphisme de E, par composition d'endomorphismes.

2) Soit u un vecteur propre de ϕ associé à la vp λ, alors $\phi(u) = f \circ u = \lambda u$ et $u \neq 0$. Alors on écrit $f \circ u - \lambda u = 0$ puis $(f - \lambda \operatorname{Id}) \circ u = 0$, ce qui amène, résultat déjà vu et qui peut-être considéré comme du cours, $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$.

Si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$, alors $(f - \lambda \operatorname{Id}) \circ u = 0$, puis comme plus haut, $f \circ u = \lambda u$, soit $\phi(u) = \lambda u$ donc u vecteur propre de ϕ associé à la vp λ (à condition toutefois que ce ne soit pas l'application nulle).
aaa

IMT PSI 2016 (matrices 3×3) ✌

Ex 20 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1) Trouver les valeurs propres de f. Est-il diagonalisable?

2) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Trouver les valeurs propres de $g = af + b\,\mathrm{Id}$.

3) À quelles conditions sur (a,b) l'endomorphisme g est-il bijectif?

1) Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique :

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_3 - M) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda-2)^2$$

les valeurs propres sont 0 et 2, 2 étant d'ailleurs valeur propre double. $\mathrm{Sp}\,M = \{0,2\}$. La matrice M n'est pas inversible car 0 est valeur propre.

A est symétrique ***réelle*** donc est diagonalisable. Si on ne le voit pas, on est obligé d'utiliser le théorème A est diagonalisable ssi la dimension de l'espace propre associé à 2 est 2, ce qui équivaut, par le théorème du rang, à $\mathrm{rg}(2I_3 - A) = 3-2 = 1$:

$$2I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_1 = C_3,\ C_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{rg}(2I-A) = 1$$

2) Comme $g(x) = \lambda x \iff f(x) = \frac{\lambda-b}{a}x$ (pour $a\neq 0$), il suit que les valeurs propres de g sont les λ tels que $\frac{\lambda-b}{a} = 0 \iff \lambda = b$ et $\frac{\lambda-b}{a} = 2 \iff \lambda = b+2a$. g a donc 2 vp : b et $b+2a$.

Le cas $a=0$, qui donne $g = b\,\mathrm{Id}$, homothétie de rapport b, amène que b est la seule vp.

3) Dans le cas $a\neq 0$, g est bijectif ssi 0 ***n'est pas*** valeur propre ce qui s'écrit $b\neq 0$ ***et*** $b\neq -2a$.

Dans le cas $a = 0$, $g = b\,\mathrm{Id}$ est bijectif ssi $b\neq 0$.

Ex 23 ✌On suppose $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Mz la matrice par blocs $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ diagonalisable.

Comme A est diagonalisable, il existe une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale. Ensuite, en raisonnant par blocs, avec des matrices diagonales par blocs, on constate :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}}_{R} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}}_{Q} = \begin{pmatrix} P^{-1}AP & 0 \\ 0 & P^{-1}AP \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}}_{\Delta}$$

On remarque que Q est inversible, d'inverse R, puisque $QR = \mathrm{Diag}(PP^{-1}, PP^{-1}) = \mathrm{Diag}(I_n, I_n) = I_{2n}$ et Δ est bien diagonale. Par suite, B est bien diagonalisable, car ***semblable*** à une matrice diagonale.

Ex 26 Donnez 8 « racines-carrées réelles » de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

On (essaye) diagonalise d'abord A (***Attention!*** n'est possible que si A diagonalisable...)

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ -1 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

On aura remarqué 1 racine évidente. ***A ce stade de l'étude, on ne peut pas*** encore dire si A est diagonalisable : A le sera ssi $\dim E(1) = \dim \operatorname{Ker}(I-A) = 2$. On peut le regarder par un rapide calcul de rang mais diagonalisable n'est pas demandé ici donc on calcule tout de suite les espaces propres, car on en a besoin pour calculer des racines carrées...

Espace propre associé à 1

On sait déjà que c'est ou une droite, ou un plan (hyperplan de $\mathbb{R}^3$), puisque $1 \leq \dim E(1) \leq 2$ (cours).

$$X = \begin{pmatrix} x\ y\ z \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \in E(1) \Longleftrightarrow AX = X \Longleftrightarrow (I-A)X = X \Longleftrightarrow -x+y-z=0$$

$\dim E(1) = 2$, A est donc diagonalisable. Une base de $E(1)$ est $\big((1,1,0),(1,0,-1)\big) = (f_1, f_2)$

Espace propre associé à 2

On sait que c'est une droite (multiplicité 1) :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(2) \Longleftrightarrow AX = 2X \Longleftrightarrow (2I-A)X = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y-z & = & 0 \\ -x+2y-z & = & 0 \\ -x+y & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \\ z & = & z \end{array} \right.$$

$E(2) = \operatorname{Vect}(f_3)$ avec $f_3 = (1,1,1)$.

A est diagonalisable donc on sait (cours) $E(2) \oplus E(1) = \mathbb{R}^3$ donc on sait (cours de Sup sur les sev supplémentaires) que $\mathscr{F} = (f_3, f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. ε est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{On pose } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P_\varepsilon^{\mathscr{F}} \quad \text{on a alors } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$$

On a 8 racines carrées évidentes de la matrice diagonale D qui sont les $\Delta = \operatorname{Diag}(\pm\sqrt{2}, \pm 1, \pm 1)$ (***Attention!*** il y en a d'autres...). Par conséquent les 8 matrieces $P\Delta P^{-1}$ sont racines carrées réelles de A puisque :

$$(P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$$

Resterait à les calculer et d'abord à calculer P^{-1} mais c'est très long...

Remarque : Il y a d'autres racines carrées de A. Le lecteur pourra vérifier que $P\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$ convient.

CCINP PSI 2022 (matrice par blocs)

Ex 27 Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrez que $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$

2) En déduire le rang de la matrice B en fonction de celui de A.

3) On suppose A diagonalisable. Montrez B est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres.

1) On commence par calculer B^k. A cette fin, on calcule d'abord $B^2, B^3, \ldots$ jusqu'à ce qu'on conjecture. On démontre (propose au correcteur de) par récurrence. Je ne met pas cette récurrence ici. On trouve $B^k = \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix}$. ***Attention!*** cette formule ne convient pas pour $k = 0$! (je vous laisse y réfléchir)

Soit $P=\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, en n'oubliant pas que $a_0=P(0)$, et qu'il faut « *l'isoler* » :

$$\begin{aligned}
P(B) &= \sum_{k=1}^{p} a_k B^k + P(0) I_{2n} = \sum_{k=1}^{p} a_k \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0)\left(\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} A^k & A^k \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k A^k & \sum_{k=0}^{p} a_k A^k \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2) Je ne vois pas trop comment déduire le rang… ou alors quelque chose de bien compliqué. J'utilise le théorème usuel de Sup : si A est de rang r, on peut écrire $A = PJ_rQ$, avec P, Q inversibles et J_r la matrice diagonale composée de r 1 puis de $n-r$ 0. On écrit alors par blocs

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1}AQ^{-1} & P^{-1}AQ^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & J_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Comme les deux matrices « *encadrantes* » sont clairement inversibles (quel est leur inverse ?), le rang de B est égal à celui de C. Si on regarde les lignes de C, comme il y a $2n-r$ lignes nulles, $\operatorname{rg} B \leq r$. Et si l'on regarde les colonnes, comme les r premières colonnes représentent le r premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^{2n}$ (je vous laisse y réfléchir), alors $\operatorname{rg} B \geq r$. Finalement $\operatorname{rg} B = r = \operatorname{rg} A$. Ce raisonnement pouvait d'ailleurs quasiment être produit sur la matrice initiale, en gérant un peu différemment les colonnes.

3) On utilise **Q1**. Soit P un polynôme annulateur scindé à racines simples de A. C'est possible comme A est diagonalisable et d'ailleurs le cours nous en donne un, le plus simple d'ailleurs de degré minimal que tant qu'à faire on prend !, $P(X) = \prod_i (X-\lambda_i)$ où les λ_i sont ***les*** valeurs propres ***distinctes*** de A, on ne les compte pas avec la multiplicité. Deux cas :

- Si $P(0)=0$, ***ce qui équivaut*** à 0 vp de A, alors $P(B)=0$, et P, ***scindé à racines simples***, annule B, donc B est diagonalisable.
- Si $P(0)\neq 0$, on considère $Q(X)=XP(X)$ qui est aussi ***scindé à racines simples*** (je vous laisse y réfléchir) et annule aussi A. Q vérifie $Q(0)=0$ et annule B, B est donc diagonalisable.

Ces 2 cas nous donnent déjà (comme P ou Q annulent B) $\operatorname{Sp} B \subset \operatorname{Sp} A \cup \{0\}$. Reste à prouver l'égalité

Méthode 1 : On peut calculer le polynôme caractéristique de B vu que la matrice est triangulaire par blocs :

$$\chi_B(\lambda) = \det(\lambda I_{2n} - B) = \det\begin{pmatrix} \lambda I_n - A & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{pmatrix} = \det(\lambda I_n - A)\det(\lambda I_n) = \lambda^n \chi_A(\lambda)$$

Le résultat suit.

Méthode 2 : Comme B est diagonalisable, rappelons que la multiplicité des valeurs propres est la dimension de l'espace propre associé. $\operatorname{rg} B = r$ donc 0 est valeur propre de B de multiplicité $2n-r$. Soit λ une vp de A et $X\neq 0$ tq $AX=\lambda X$. Alors en ayant l'idée de chercher un vecteur propre sous forme de blocs $Y=\binom{X}{0}$, on arrive à :

$$BY = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda X \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda Y$$

Ceci donne bien λ vp de B ***car (important)*** $Y\neq 0$. Par cette méthode, on a plus les vecteurs propres.

Question : A t-on, sous cette forme, tous les vecteurs propres de B ?

CCINPBQ MP 2021-2011 (diagonalisabilité matrice 3x3)

Ex 28 Soit $A=\begin{pmatrix}0 & a & c\\ b & 0 & c\\ b & -a & 0\end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

On calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x)=\det(xI-A)=\begin{vmatrix}x & -a & -c\\ -b & x & -c\\ -b & a & x\end{vmatrix}=\cdots=x(x^2+ca-ba-bc)$$

- $ca-ba-bc<0$. A a ***3 vp distinctes réelles*** : 0 et $\pm\sqrt{ba+bc-ca}$, donc est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, donc à fortiori, dans $\mathbb{C}$.
- $ca-ba-bc>0$. χ_A n'est ***pas scindé*** sur $\mathbb{R}$, A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (ou autrement dit A n'a pas 3 vp réelles comptés avec la multiplicité). A admet ***3 vp distinctes complexes*** : 0 et $\pm i\sqrt{-ba-bc+ca}$ et est donc diagonalisable dans $\mathbb{C}$.
- $ca-ba-bc=0$. A admet ***une seule*** vp qui est 0. Par conséquent A est diagonalisable (dans $\mathbb{R}$ comme dans $\mathbb{C}$) ssi A est égale à $0.I$ (résultat déjà vu et utilisé en exos) ce qui équivaut à $a=b=c=0$.

Mines-Ponts PC 2014 (matrice 3x3) ✷

Ex 30 Soit $z\in\mathbb{C}$. Donner une CNS sur z pour que A soit diagonalisable. $A=\begin{pmatrix}0 & z & z\\ 1 & 0 & z\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

On calcule le polynôme caractéristique (je ne mets pas les détails ici) $\chi_A=X^3-3zX-z^2-z$. Ensuite l'idée usuelle est de trouver une racine évidente, mais il n'y en a pas pour z quelconque. Alors on peut commencer par regarder le cas ***suffisant*** de diagonalisabilité : les 3 racines complexes sont distinctes. Il faut se rappeler qu'une racine est (au moins) double ssi elle est racine commune de χ_A et χ_A' (en fait toutes les racines complexes sont simples ssi le PGCD $\chi_A\wedge\chi_A'=1$, mais ceci n'est pas dans le programme de PSI). On calcule $\chi_A'=3X^2-3z$. On a de la chance! On a tout de suite les racines de χ_A' : ce sont les racines carrées de z. On les note $\pm\omega$. Regardons si elles sont racines de χ_A :

$$\chi_A(\pm\omega)=\pm\omega^3-3z(\pm\omega)-z^2-z=\pm\omega^3-3\pm\omega^3-\omega^4-\omega^2=-\omega^4-2\omega^3-\omega^2=-\omega^2(\omega+1)^2$$

- Pour $\omega\neq 0,-1$, cad $z\neq 0,1$, χ_A n'a donc que des racines simples et A est donc diagonalisable.
- Si $\omega=0$, cad $z=0$, la matrice est triangulaire avec des 0 sur la diagonale. 0 est donc la ***seule vp***. On sait alors que A esr diagonalisable ssi $A=0i=0$ ce qui n 'est pas.
- Si $\omega=-1$, cad $z=1$, la matrice est symétrique réelle donc diagonalisable.

Conclusion : A est diagonalisable ssi $z\neq 0$.

X PSI 2022 | Mines-Ponts PSI 2017 (diagonalisabilité matrice $n\times n$) ✷

Ex 33

Soit $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $c_{ij}=j+n(i-1)$ pour $1\leq i,j\leq n$. [**Mines :** $C=A+nB$ avec $A=(j)_{1\leq i,j\leq n}$, $B=(i-1)_{1\leq i,j\leq n}$] .

1) Déterminez le rang de C.

2) La matrice C est-elle diagonalisable?

1) On remarque que chaque colonne de C s'écrit $C_j=jU+nV$, où $U=(1,1,\dots,1)$ et $V=(i-1)_{1\leq j\leq n}$. On en déduit $\operatorname{rg} C\leq 2$. En considérant la sous-matrice 2×2 de C d'indices $[1,2]\times[1,2]$ qui vaut $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 1+n & 2+n\end{smallmatrix}\right)$ qui est inversible, on en déduit $\operatorname{rg} C\geq 2$ puis finalement $\operatorname{rg} C=2$

2) On commence par remarquer que la matrice réelle C n'est pas symétrique. Comme $\operatorname{rg} C = 2$, 0 est vp de multiplicité au moins $n-2$. Reste 2 vp à trouver. On constate que :

$$\begin{aligned}
CU &= \Big(\sum_{j=1}^{n} j + n^2(i-1)\Big)_{1\leq i\leq n} = \sum_{j=1}^{n} jU + nV = \frac{n(n+1)}{2}U + n^2 V \\
CV &= \Big(\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + n(i-1)\sum_{j=1}^{n}(j-1)\Big)_{1\leq i\leq n} = \sum_{j=1}^{n} j(j-1)\,U + n\sum_{j=1}^{n}(j-1)\,V = \frac{n^3-n}{3}U + \frac{n^3-n^2}{2}V
\end{aligned}$$

Le plan $P = \operatorname{Vect}(U,V)$ (car (U,V) libre donc base notée $\mathscr{F}$) est donc stable par c (endomorphisme canoniquement associé à C), on considère alors c' l'endomorphisme ***induit*** par c sur P. On sait $\chi_{c'} \mid \chi_c$.

$$\operatorname{Mat}(c', \mathscr{F}) = \begin{pmatrix} \frac{n^2+n}{2} & \frac{n^3-n}{3} \\ n^2 & \frac{n^3-n^2}{2} \end{pmatrix} = C'$$

On peut trouver les 2 vp manquantes en cherchant les 2 vp de la matrice C', à condition qu'on ne trouve pas 0. C'est bien le cas, puisque $\det(C') = \frac{1}{4}(n^2+n)(n^3-n^2) - \frac{1}{3}n^2(n^3-n) = n^3(n+1)(n-1)(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}) < 0$. Elles sont donc aussi distinctes, sauf si la racine double est imaginaire pure (carré négatif), mais ceci n'est pas possible en considérant la trace.

Remarque : On pourrait donc calculer les 2 valeurs propres en calculant celles de C', mais ici le calcul serait un peu fastidieux quoique faisable avec le discriminant. On obtiendrait aussi les 2 vecteurs propres associés mais dans $\mathbb{R}^2$. Comment retrouver / en déduire ceux de C?

Centrale PSI 2022 (matrice circulante)

Ex 34 Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ e^{2i\theta} \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{in\theta} \end{pmatrix}$$

1) Exprimez A comme polynôme en J

2) Montrez J diagonalisables dans $\mathbb{C}$. Déterminez une CNS pour que V soit vecteur propre de J.

3) Montrez A diagonalisable ds $\mathbb{C}$. Exhiber $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP$ est diagonale. En déduire expression de $\det A$.

1) Si $j \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ est l'endomorphisme canoniquement associé à J, il vérifie $j(e_i) = e_{i-1}$ en utilisant usuellement l'indice modulo n ($e_{n+1} = e_1,\ e_{-3} = e_{n-3},\ e_0 = e_n, \dots$ par exemple). Ceci évite de multiplier les cas. On en déduit immédiatement que $j^k(e_i) = e_{i-k}$, en particulier $j^n = \mathrm{Id}$. La matrice J^k est la matrice constituée de 0 et les 1 sur les diagonales $j = i-k$, toujours modulo n, (donc aussi $j = i+n-k$) (pour $1 \leq i, j \leq n$).

Par suite, on a $A = a_0 I + a_1 J + \dots + a_{n-1}J^{n-1}$.

Remarque : A est appelée matrice circulante.

2) On a vu $J^n = I$ donc J ***annule*** $X^n - 1$ polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ (de racines les n racines n-ièmes de 1). Les vp de J sont donc des racines n-ièmes de 1 (***les***?)

On a $JV = (e^{2i\theta}, \dots, e^{in\theta}, e^{i\theta})$ V est vecteur propre de J associé à λ ssi existe k tq $e^{ji\theta} = \lambda e^{(j-1)i\theta}$ (toujours avec la convention l'entier j modulo n). Ceci amène $e^{in\theta} = \lambda^n e^0 = 1$. ***Réciproquement***, si $e^{in\theta} = 1$, on a $JV = e^{i\theta}V$

3) Comme J est diagonalisable, tout polynôme en J l'est, donc A, car $J = PDP^{-1}$ amène immédiatement $Q(J) = PQ(D)P^{-1}$ et $Q(D)$ est bien une matrice ***diagonale*** (somme et produit de matrices diagonales).

Prenons $\theta = \frac{2\pi}{n}$. On a bien $e^{in\theta} = 1$. Notons $\omega = e^{i\theta} = e^{2i\pi/n}$. La question précédente permet de constater que $V(\theta), \dots, V(n\theta)$ sont des vecteur propres et forment une famille libre puisqu'associés à des vps toutes distinctes : les $e^{ik\theta} = \omega^k$ pour $1 \leq k \leq n$, qui sont d'ailleurs les n racines n-ièmes de 1.

La matrice, par blocs de colonnes, $P = [V(\theta)\dots V(n\theta)]$ est donc inversible et vérifie $P^{-1}JP = \mathrm{Diag}(\omega,\omega^2\dots,\omega^n)$, puis $P^{-1}J^kP = \mathrm{Diag}(\omega^k,\omega^{2k},\dots,\omega^{nk})$ et enfin $P^{-1}AP = \mathrm{Diag}\big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^k, \sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^{2k},\dots,\sum_{k=0}^{n-1} a_k\omega^{nk}\big)$.

Ex 36 Calculez A^n, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & \frac16 \\ 2 & 1 & \frac13 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode 1 usuelle par diagonalisabilité :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac12 & -\frac16 \\ -2 & \lambda-1 & -\frac13 \\ -6 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \dots = \lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-3)$$

On a donc A diagonalisable ssi $\dim E(0) = 2$ ssi $\mathrm{Ker}\,A$ est un plan.

Calcul de $E(3) = \mathrm{Ker}(3Id - A)$ On sait que c'est une droite. On obtient $E(3) = \mathrm{Vect}(\frac16,\frac13,1) = \mathrm{Vect}(1,2,6) = \mathrm{Vect}(e_1)$ par :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(3) \iff (3I_3 - A)X = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x - \frac12 y - \frac16 z & = & 0 \\ -2x + 2y - \frac13 z & = & 0 \\ -6x - 3y + 2z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac16 z \\ y & = & \frac13 z \\ z & = & z \end{array}\right.$$

Calcul de $E(0) = \mathrm{Ker}(A)$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(0) \iff AX = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + \frac12 y + \frac16 z & = & 0 \\ 2x + y + \frac13 z & = & 0 \\ 6x + 3y + z & = & 0 \end{array}\right. \iff 6x + 3y + z = 0$$

$E(0)$ est donc un ***plan*** dont une base est $\mathrm{Vect}\Big(\underbrace{(0,1-3)}_{e_2},\underbrace{(1,0,-6)}_{e_3}\Big)$. On en tire aussi A diagonalisable.

On ***diagonalise*** A : comme $E(3) \oplus E(0) = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{F} = (e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'***endomorphisme canoniquement associé*** à A. On pose, par exemple :

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \end{array} = P_\varepsilon^{\mathscr{F}} \qquad P^{-1}AP = (P_\varepsilon^{\mathscr{F}})^{-1}\,\mathrm{Mat}(a,\varepsilon)P_\varepsilon^{\mathscr{F}} = \mathrm{Mat}(a,\mathscr{F}) = \begin{array}{r} \\ e_1 \rightarrow \\ e_2 \rightarrow \\ e_3 \rightarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a(e_1) & a(e_2) & a(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = D$$

puis, sans détailler le calcul de P^{-1} :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -12 & 12 & -2 \\ 12 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & \frac12 3^{n-1} & \frac12 3^{n-2} \\ 2\,3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-2} \\ 2\,3^n & 3^n & 3^{n-1} \end{pmatrix} = 3^{n-1}A$$

Méthode 2 plus élégante par recherche d'un polynôme annulateur (cours d'après) :

On commence par chercher un polynôme annulateur de degré minimum, sachant que **Cayley**[1]-**Hamilton**[2]nous en donne déjà un de degré 3 qui est le polynôme caractéristique $X^3-3X^2=X^2(X-1)$. On est donc ***aussi obligé*** dans cette méthode de calculer le polynôme caractéristique. Comme tout polynôme annulateur a pour racines les valeurs propres 0 et 3, il n'y a ***ici*** qu'un seul candidat « *plus petit* » possible c'est $X(X-3)$. D'autre part, le cours nous apprend que $X(X-3)$ est ***annulateur*** ssi A est diagonalisable. ***Une première possibilité*** est de regarder $\operatorname{rg}(A)$ et de vérifier qu'il es tégal à 1 (c'est immédiat). ***Une deuxième possibilité***, comme $A(A-3I)=A^2-3A$ est de calculer A^2 et de remarquer $A^2=3A$. Bref...on prend donc comme ***polynôme annulateur*** de A, $P(X)=X^2-3X=X(X-3)$.

Comme le demande la méthode, on effectue la ***division euclidienn***e de X^n par $P(X)$ qui amène :

$$X^n=P(X)Q_n(X)+R_n(X)=X(X-3)Q_n(X)+a_nX+b_n$$

Il n'y a pas besoin de calculer le quotient $R_n(X)$, seulement le reste $R_n(X)$. Les valeurs en $X=0$ et $X=3$ nous fournissent :

$$\begin{cases} 0^n &= \quad b_n \\ 3^n &= \quad 3a_n+b_n \end{cases} \iff b_n=0\ a_n=3^{n-1}$$

On en déduit donc $X^n=X(X-3)Q_n(X)+3^{n-1}X$, puis « *en remplaçant* » , $A^n=3^{n-1}A$, en n'oubliant pas que $A(A-3I)=0$. La méthode est bien plus rapide ...

Ex 37 On se donne une matrice B par blocs égale à $B=\begin{pmatrix} A & O \\ A & A \end{pmatrix}\in M_{2n}(\mathbb{C})$

1) Explicitez B^n puis $P(B)$ pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$.

2) ✷ Etablir B est diagonalisable $\iff A=O$ *(Que remarque t-on dans la Q1 ?)*

---

1) Un calcul immédiat et une récurrence montre, laissés au lecteur, que $B^n=\begin{pmatrix} A^n & 0 \\ nA^n & A^n \end{pmatrix}$. Puis par linéarité :

$$P(B)=a_0I_{2n}+a_1B+\cdots+a_pB^p=\begin{pmatrix} a_0I_n+a_1A+\cdots+a_pA^p & 0 \\ A(a_1+2a_2A+\cdots+pa_pA^{p-1}) & a_0I_n+a_1A+\cdots+a_pA^p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ AP'(A) & P(A) \end{pmatrix}$$

Pour arriver à terminer cette exercice, cad traiter la question 2, il ***faut avoir remarqué*** le terme $AP'(A)$.

2) Un sens est immédiat. Supposons B diagonalisable. Comment utiliser cette hypothèse ? La question précédente suggère l'utilisation des polynômes... Il existe un polynôme P ***scindé à racines simples*** tel que $P(B)=0$. Donc $P(A)=0$, d'où on déduit A diagonalisable, et ***aussi*** $AP'(A)=(XP'(X))(A)=0$. Comment l'utiliser ?

On rappelle que a est une racine (au moins) double ssi on $P(a)=P'(a)=0$. Par le contraire, si a est une racine simple $P(a)=0$ et $P'(a)\neq 0$. Notons (a_i) les racines (complexes) de P et (b_i) celles de P'. D'après le cours $P(A)=0$ amène $\operatorname{Sp}A\subset\{(a_i)\}$ et $AP'(A)=0$ amène $\operatorname{Sp}A\subset\{0,(b_i)\}$ d'où $\operatorname{Sp}A\subset\{(a_i)\}\cap\{0,(b_i)\}$. Je vous laisse réfléchir au fait que ceci impose $\operatorname{Sp}A\subset\{0\}$. Par suite A est diagonalisable de seule valeur propre possible 0, donc $A=POP^{-1}=O$.

1. **Arthur Cayley** : mathématicien anglais (1821-1895). Un des inventeurs du calcul matriciel.
2. **William Rowan Hamilton** : mathématicien irlandais (1805-1865). Connu pour la découverte des quaternions.

CCP PSI 2011 (Equation matricielle) ✷

Ex 38 Trouvez les $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tq $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

Il est bien sûr maladroit, voire infaisable, de poser $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et d'essayer de résoudre le système obtenu. On pose, pour raisonner correctement, $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$. U est triangulaire donc de valeurs propres sur la diagonale, -1 et 4, distinctes donc U est diagonalisable.

On « *lit* » aussi sur la matrice $E_U(4) = \mathrm{Vect}(0,1)$ et on calcule immédiatement $E_U(-1) = \mathrm{Vect}(1,-2)$. D'oÃ¹ en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}UP = D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On fait une Analyse-Réciproque :

Analyse : Si M vérifie $M^3 - 2M = U$, M commute avec U puisque $UM = M^4 - 2M^2 = MU$. D'après le cours, $E_U(4)$ est stable par M donc comme c'est une droite, $M(0,1) = \lambda(0,1)$. De même $M(1,-2) = \mu(1,-2)$. Par suite M est aussi diagonalisable et ***même co-diagonalisable***, puisque diagonalisable dans la même base, ou au travers du mÃªme P : $P^{-1}MP = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Réciproque :

$$M^3 - 2M = U \iff P^{-1}M^3P - 2P^{-1}MP = P^{-1}UP \iff \Delta^3 - 2\Delta = D \iff \begin{cases} \lambda^3 - 2\lambda & = & -1 \\ \mu^3 - 2\mu & = & 4 \end{cases}$$

1 est racine évidente de la 1re puis $\lambda^3 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 1)$ $\Delta = 5$. les 2 autres racines sont $\lambda_{+,-} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$.

2 est racine évidente de la 2e puis $\mu^3 - 2\mu - 4 = (\mu - 2)(\mu^2 + 2\mu + 2)$ $\Delta = -4$. les 2 autres racines sont complexes.

Toutes les solutions de l'équation $M^3 - 2M = U$ sont donc les $M = P\Delta P^{-1}$ avec $\mu = 2$ et $\lambda \in \{1, \lambda_+, \lambda_-\}$. Elles sont donc au nombre de 3.

Remarque : Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, il y aurait par contre $9 = 3 \times 3$ solutions, avec les 3 possibilités complexes pour μ.

Mines-Ponts PSI 2023 (matrice stochastique 3x3) ✷

Ex 39 Soit $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 1/4 & 5/12 & 1/3 \end{pmatrix}$.

1) Montrez M diagonalisable et donnez ses éléments propres.

2) Montrez que (M^n) tend vers une matrice N à préciser.

3) Montrez que N est la matrice d'un projecteur que l'on précisera.

1) La matrice est symétrique réelle donc diagonalisable. On calcule le polynôme caractéristique et les espaces propres, je ne mets pas de détails. Il peut être plus astucieux pour les calculs d'écrire $M = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_M(\lambda) = \lambda^3 - \frac{7}{6}\lambda^2 + \frac{7}{48}\lambda + \frac{1}{48} = (\lambda - 1)(\lambda - \frac{1}{4})(\lambda + \frac{1}{12})$, $E(1) = \mathrm{Vect}(1,1,1)$, $E(\frac{1}{4}) = \mathrm{Vect}(-2,1,1)$. Pour le dernier il peut être plus efficace de remarquer qu'il est orthogonal aux deux autres et donc d'effectuer un produit vectoriel des 2 vecteurs précédents, $E(-\frac{1}{12}) = \mathrm{Vect}(0,-1,1)$. On note les vecteurs dans l'ordre e_1, e_2, e_3

Remarque : On peut remarquer que la matrice est ***stochastique*** (coefficients positifs et somme de chaque ligne égale à 1) et même bistochastique (par symétrie) car les colonnes aussi.

2) De $M^n = PD^nP^{-1}$ (avec des notations évidentes), et via la ***continuité*** de $X \to PXP^{-1}$ (car linéaire en dimension finie), il suit l'existence de la limite et :

$$\lim M^n = P \lim D^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = N$$

Remarque : On pourrait même utiliser une BON de vecteurs propres, ce qui donnerait $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$

3) On a clairement $N^2 = N$, donc matrice d'un projecteur, elle projette sur son image $\mathrm{Vect}(e_1) = E(1)$, parallèlement à son noyau = $\mathrm{Vect}(e_2, e_3) = E(\frac{1}{4}) \oplus E(-\frac{1}{12})$, elle est donc orthogonale. C'est ce qu'on appelle un ***projecteur spectral*** (les 3 projecteurs spectraux sont les 3 projecteurs associés à la décomposition $E(1) \oplus E(\frac{1}{4}) \oplus E(-\frac{1}{12}) = \mathbb{R}^3$ (les 2 autres ont pour matrice ? je vous laisse deviner).

Remarques

- Toute matrice de projection sur une droite $\mathrm{Vect}(a, b, c)$ est de rang 1 et telle que toutes les colonnes colinéaires à (a, b, c). Ici, la matrice N est donc de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{smallmatrix}\right)$. En prenant une BON et $N^2 = N$, il vient $a = b = c$ puis $a = \frac{1}{3}$
- Ceci se généralise : si $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ est stochastique (à coefficients > 0), alors via le théorème de Perron-Frobenius, elle admet 1 pour vp simple (associé à $U = (1, \dots, 1)$ et toutes les autres sont de module < 1. A^n converge donc vers la matrice $P\mathrm{Diag}(1, 0, \dots, 0)P^{-1}$, projection spectrale sur U. Toutes les colonnes sont colinéaires à U et on démontre que cette (ces) colinéarité $V = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est vecteur propre de 1 associé à M^{T}. $N = UV^{\mathrm{T}}$ tel que $U^{\mathrm{T}} V = 1$

Mines-Telecom MP 2018 | Mines-Ponts PSI 2013 (endomorphisme de polynômes) ✌

Ex 40 Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, $A \in E$ tel que $\int_0^1 A(t)\,dt \neq 0$ et $u : P \in E \to A \int_0^1 P(t)\,dt - P \int_0^1 A(t)\,dt$.
Montrez $u \in \mathscr{L}(E)$ et déterminez ses éléments propres. u diagonalisable ?

ϕ est ***linéaire*** car pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $P, Q \in E$,

$$\begin{aligned} \phi(\alpha P + \beta Q) &= A(X) \int_0^1 \left(\alpha P(t) + \beta Q(t)\right) dt - \left(\alpha P(X) + \beta Q(X)\right) \int_0^1 A(t)\,dt \\ &= \alpha \left(A(X) \int_0^1 P(t)\,dt - P(X) \int_0^1 A(t)\,dt\right) + \beta \left(A(X) \int_0^1 Q(t)\,dt - Q(X) \int_0^1 A(t)\,dt\right) \\ &= \alpha\,\phi(P) + \beta\,\phi(Q) \end{aligned}$$

ϕ est bien un ***endo***morphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ car d'abord il est immédiat, que comme combinaison linéaire des polynômes $A(X)$ et $P(X)$, $\phi(P)$ est bien un polynôme et ensuite, par la formule du degré d'une somme : $\deg(P + Q) \leq \inf(\deg P, \deg Q)$, on a aussi $\deg(\phi(P)) \leq \inf(\deg A, \deg P) \leq n$.

Analyse pour la recherche des éléments propres de ϕ :

Soit λ une valeur propre de ϕ, il existe donc un polynôme P ***non nul*** tel que $\phi(P) = \lambda P$ soit encore :

$$A(X) \int_0^1 P(t)\,dt - P(X) \int_0^1 A(t)\,dt = \alpha P(X) \iff \left(\int_0^1 P\right) A(X) = \left(\lambda + \int_0^1 A\right) P(X)$$

Il vient alors :

- Si $\lambda + \int_0^1 A \neq 0$ cad $\lambda \neq -\int_0^1 A$, alors $P(X)$ est colinéaire à $A(X)$.
- Si $\lambda + \int_0^1 A = 0$, alors comme $A(X) \neq 0$, il vient $\int_0^1 P = 0$

Maintenant, il faut comprendre que l'analyse est terminée. Essentiellement parce que l'ensemble des polynômes P vérifiant $\int_0^1 P = 0$ est un hyperplan, donc « *l'idée* » est qu'il en « *manque un* » qui est $A(X)$ (la ligne du dessus). On a donc « *tout trouvé* », sous réserve que la réciproque soit Ok. Ceci n'est d'ailleurs pas vraiment à écrire sur la copie.... C'est du feeling mathématique ...

De façon précise qu'a t-on trouvé (prouvé) dans l'analyse? Que pour la valeur propre $-\int_0^1 A$, les seuls vecteurs propres possibles sont les P vérifiant $\int_0^1 P = 0$, un hyperplan donc au « *maximum* » et qu'il y a un autre vecteur propre possible $A(X)$ associé à une valeur propre différente de $-\int_0^1 A$.

Synthèse :

▶ On commence par calculer $\phi(A) = A\int_0^1 A - A\int_0^1 A = 0$. ***Comme*** $A(X) \neq 0$, 0 est valeur propre de ϕ et (***attention au raisonnement!***) donc $E(0) \supset \text{Vect}\Big(A(X)\Big)$. On n'a pas (encore) démontré l'égalité.

▶ Soit $P \in H = \Big\{P \in E \,/\, \int_0^1 P = 0\Big\}$, alors un calcul immédiat amène $\phi(P(X)) = -\int_0^1 A(t)\,dt\ P(X)$. Comme il ***existe*** au moins un $P \neq 0$ tel que $\int_0^1 P = 0$ (par exemple $P = -\frac{1}{2} + X$), alors $\alpha = -\int_0^1 A$ est bien valeur propre et l'espace propre associé vérifie $E(\lambda) \supset H$. Attention au raisonnement, c'est pas parce que « *ceux-là marchent* » qu'il n'y en a pas d'autres d'où l'inclusion.

Conclusion : Comme il ne peut y avoir plus de $n+1$ valeurs propres, ou mieux ici (on reverra cela en cours), la ***dimension totale des espaces propres*** en peut dépasser $n+1$, qu'on a ici, à cause de hyperplan et à cause de $\int_0^1 A \neq 0$ qui donne 2 valeurs propres distinctes, une dimension égale à $(n+1) - 1 + 1 = n+1$, on en déduit que les inclusions précédemment vues ne peuvent être que des égalités :

$$\text{Sp}\,\phi = \left\{0, -\int_0^1 A\right\} \qquad \text{Ker}\,\phi = \text{Ker}\Big(\phi - 0.Id_E\Big) = \text{Vect}\Big(A(X)\Big) \qquad \text{Ker}\Big(\phi + \textstyle\int_0^1 A.Id_E\Big) = H$$

Les $5/2$ en déduiront que l'endomorphisme ϕ est diagonalisable.

Remarque1 :

Je vous démontre que c'est bien un hyperplan : il suffit de démontrer ***noyau d'une forme linéaire non nulle***. Il est clair que $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \int_0^1 P$ est une forme linéaire non nulle. Ok.

CCP PSI (endomorphisme de matrices)

Ex 41 Soient A et B deux matrices carrées non nulles réelles d'ordre n. On définit ϕ sur $M_n(R)$ par $\phi(M) = M + \text{tr}(AM)B$. CNS pour que ϕ soit diagonalisable?

Analyse :

Soit λ une valeur propre de ϕ, il existe donc $M \neq 0$ tel que $\phi(M) = \lambda M$ qui amène $(\lambda - 1)M = \text{tr}(AM)B$.

On en déduit ou bien $\lambda = 1$, ou bien M colinéaire à B (car $M = \frac{\text{tr}(AM)}{\lambda-1}B$). Ceci peut s'analyser un peu plus finement en disant que les ***seuls vecteurs propres possibles associés*** à une valeur propre $\lambda \neq 1$, sont les vecteurs ***colinéaires*** à B.

$\lambda = 1$ amène $\text{tr}(AM) = 0$, car $B \neq 0$. On note $H = \Big\{M, \text{tr}(AM) = 0\Big\}$ qui est un hyperplan (cours), car noyau de la forme linéaire ***non nulle*** $M \to \text{tr}(AM)$. On a donc que les seuls vecteurs propres « *possibles* » sont les matrices appartenant à H. L'analyse est donc terminée.

Synthèse :

On calcule $\phi(B) = (1 + \text{tr}(AB))B = \alpha B$, soit en posant $\alpha = 1 + \text{tr}(AB)$, α est valeur propre de ϕ ***car*** $B \neq 0$, et $E(\alpha) \supset \text{Vect}(B)$. $\forall M \in H$, on a évidemment $\phi(M) = M + 0 = 1.M$, soit $E(1) \supset H$. Deux cas se dessinent alors :

- Si $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$, cad $\alpha \neq 1$, pour des raisons de dimension, $\dim(E(\alpha)\oplus E(1)) \geq 1+n^2-1 = n^2$, on ne peut avoir qu'égalité et nécessairement $E(\alpha) = \operatorname{Vect}(B)$ et $E(1) = H$, et aussi $\dim(\operatorname{Vect}(B)\oplus H) = \dim E(\alpha)+\dim E(1) = n^2$, ce qui amène ϕ diagonalisable.
- Si $\operatorname{tr}(AB) = 0$, $\alpha = 1$, donc B vecteur propre associé à 1. ***Ici***, $\operatorname{Vect}(B) \subset H$. 1 est donc ici la seule valeur propre de ϕ. ϕ n'est donc ***pas diagonalisable***, car sinon, selon un raisonnement usuel, on ne pourrait avoir que $\phi = 1.Id$, ce qui n'est pas.

  Remarque : En fait ici 1 est valeur propre d'ordre n^2 mais l'espace propre associé H a pour dimension n^2-1, on retrouve par une autre méthode que ϕ n'est pas diagonalisable).

Conclusion : ϕ est diagonalisable ssi $\operatorname{tr}(AB) \neq 0$

Remarque : Je rappelle que si une matrice M n'a qu'***une seule*** valeur propre (notée α), elle n'est diagonalisable que si c'est $M = \alpha I_n$. En effet : $M = PDP^{-1} = P\operatorname{Diag}(\alpha,\dots,\alpha)P^{-1} = P\alpha I_n P^{-1} = \alpha PP^{-1} = \alpha I_n$.

Ex 42 Soient une décomposition en somme directe $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n = E$, les projecteurs associés $(p_i)_{1\leq i\leq n}$ et n scalaires $a_1,\dots,a_n$. Montrez que $f \in \mathscr{L}(E)$ défini par $f = a_1p_1+\cdots+a_np_n$ est diagonalisable.
Précisez son polynôme caractéristique. (*On pourra considérer la restriction à* E_i)

Soient $E_1,\dots,E_p$ tels que $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p = E$ et (p_i) les projecteurs associés, cad p_i est la projection sur E_i parallèlement aux « autres », cad $\oplus_{j\neq i}E_j$. On a $p_i \circ p_i = p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$, cad $p_i \circ p_j = \delta_{ij}$ et aussi $p_1+\cdots+p_p = Id$, puisque la somme des E_i est égale à E. Pour tout $x \in E$, on peut « *voir* » $p_i(x)$ comme le décomposé / projeté de x sur « l'axe » E_i.
Pour deux espaces supplémentaires $F \oplus G = E$, si p est la projection sur F parallèlement à G, les projecteurs associés sont p, $\operatorname{Id}-p$ en rappelant que $\operatorname{Id}-p$ est la projection sur G parallèlement à F.

Considérons $f = a_1p_1+\cdots+a_np_n$. Pour tout $x_i \in E_i$, on a $f(x_i) = a_ip_i(x_i) = a_ix_i$, puisque $p_j(x_i) = 0$, pour $j \neq i$. Il vient x_i vecteur propre associé à a_i, ou autrement dit $E(a_i) = \operatorname{Ker}(a_i\operatorname{Id}-f) \supset E_i$ (***Attention!*** , il n'y a pas = à priori). On sait, d'après le cours $E(a_1)\oplus\cdots\oplus E(a_n) \subset E$.
En utilisant l'hypothèse :

$$E = E_1 \oplus\cdots\oplus E_n \subset E(a_1)\oplus\cdots\oplus E(a_n) \subset E$$

on en tire ***l'égalité***, soit $E(a_1)\oplus\cdots\oplus E(a_n) = \operatorname{Ker}(a_1\operatorname{Id}-f)\oplus\cdots\oplus\operatorname{Ker}(a_n\operatorname{Id}-f) = E$, cad f diagonalisable.

On en tire aussi l'égalité $E(a_i) = \operatorname{Ker}(a_i\operatorname{Id}-f) = E_i$, et si $E_i \neq \{0\}$ (hypothèse laissée possible par l'énoncé), il vient a_i est valeur propre de f d'espace propre associé E_i. On a $\chi_f(X) = (X-a_1)^{\dim E_1}\times\cdots\times(X-a_n)^{\dim E_n}$
Ceci est vrai même si $E_i = 0 \iff \dim E_i = 0$

Ex 43 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On suppose $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$ avec $v \in E$. Discutez la diagonalisabilité de f.

En rappelant que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1),\dots,f(e_n))$ pour $(e_1,\dots,e_n)$ base de E (cours), il vient $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(v)$. Si $v=0$, l'endomorphisme f est nul donc diagonalisable. Si $v \neq 0$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v)$ et $\operatorname{rg}(f)=1$. Par le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker} f = n-1$. Par suite la multiplicité de 0 vaut $\mu(0) \geq n-1$. On a $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n$ et par linéarité, $f(v) = (\sum_{k=1}^n v_i)v$.

- Si $\lambda = \sum_{k=1}^n v_i \neq 0$, on a λ vp de f associé à (au moins) v. par suite $\mu(\lambda) \geq 1$. Pour des raisons de dimension (la somme des dimensions de tous les espaces propres ne peut dépasser n) ***ou*** du fait qu'il n'existe pas plus de n vp ***ou*** de multiplicité (la somme totale de toutes les multiplicités de toutes les racines ne peut dépasser n), les ***2 inégalités deviennent des égalités***, puis $\mu(0) = n-1 = \dim \operatorname{Ker} f$ et $\mu(\lambda) = 1 = \dim E(\lambda) = \dim \operatorname{Vect}(v)$. f est donc diagonalisable.
- Si $\sum_{k=1}^n v_i = 0$, 0 est une vp de multiplicité n ***mais*** $\dim E(0) = \dim \operatorname{Ker} f = n-1 < n$ donc f n'est pas diagonalisable.

Conclusion : f est diagonalisable ssi la somme des coordonnées de v est différente de 0.

Remarque : Le lecteur pourra s'assurer, par exemple en prenant une matrice dans une base bien choisie : (v) complétée, que f est diagonalisable ssi $\operatorname{tr}(f) \neq 0$. C'est un résultat général pour un endomorphisme de rang 1

CCP PSI 2022-2021 -2019 (diagonalisabilité endomorphisme)

Ex 45

Soient E un ev de dimension n, l une forme linéaire non nulle sur E et $a \neq 0 \in E$. On pose$f : x \in E \longrightarrow l(a)x - l(x)a$.

1) Montrez f endomorphisme de E. Calculez $f(a)$.

2) [**2019 :** Déterminez $\operatorname{Ker}(f)$ et calculez $f(\operatorname{Ker} l)$] .

3) Calculez les éléments propres. L'endomorphisme f est-il diagonalisable? [**2021 :** *Ind.* : distinguer les cas $l(a)=0$ et $l(a) \neq 0$)]

4) [**2021,2019 :** On suppose $l(a)=0$. Calculez f^2, en déduire un polynôme annulateur de f. Retrouvez le résultat de Q4)]

1) La linéarité de f résulte de la linéarité de l et de celle de $\operatorname{Id} : x \longrightarrow x$. Je ne le démontrerais donc pas ici. l étant une ***forme*** linéaire, $l(a)$ et $l(x)$ sont des réels, $l(a)x - l(x)a$ est bien un ***vecteur*** de E, d'où ***endo***morphisme.

$f(a) = 0$. On en déduit $\operatorname{Vect}(a) \subset \operatorname{Ker} f$ (***Attention!*** à l'erreur de raisonnement : il n'y a pas égalité à priori!)

2) On $x \in \operatorname{Ker} f \iff l(a)x = l(x)a$. Cette écriture permet de comprendre que, ***si*** $l(a) \neq 0$, x est colinéaire à a. On distingue les deux cas :

- ***Si*** $l(a) \neq 0$, on vient de voir x colinéaire à a, soit $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Vect}(a)$. D'après la question précédente, $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(a)$.
- ***Si*** $l(a) = 0$, on a immédiatement $x \in \operatorname{Ker} f \iff l(x).a = 0 \iff x \in \operatorname{Ker} l$ (car $a \neq 0$). Soit $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} l$ qui est alors un ***hyperplan*** (forme linéaire non nulle).

On constate que si $x \in \operatorname{Ker} l, f(x) = l(a).x$. Donc, si $l(a) = 0, f(\operatorname{Ker} l) = \{0\}$, l'ev nul. Si $l(a) \neq 0, f(x)$ colinéaire à x est donc dans $\operatorname{Ker} l$. ***Attention!*** , à priori, seulement $f(\operatorname{Ker} l) \subset \operatorname{Ker} l$. On étudie l'inclusion réciproque : en fait si $x \in \operatorname{Ker} l$, il suffit de remarquer $x = f\left(\frac{1}{l(a)}x\right)$ ***et aussi*** $\frac{1}{l(a)}x \in \operatorname{Ker} l$, d'où l'égalité.

Remarque : Plus subtil : dans le cas $l(a) \neq 0$, on peut remarquer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} l$ sont en somme directe, donc l'endomorphisme induit sur $\operatorname{Ker} l$ est une bijection (je vous laisse y réfléchir), d'où l'égalité pour des raisons de même dimension.

3) La question Q2 aidait (un peu) car elle nous donne la valeur propre 0 et l'espace propre associé qui est $\operatorname{Ker} f$ mais elle n'était pas posée en 2021-2022. On procède par Analyse-Synthèse.

Analyse :

Soit λ vp de f, il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) = l(a)x - l(x)a = \lambda x$ soit $\big(l(a) - \lambda\big)x = l(x)\, a$, égalité ***vectorielle***, à un scalaire près, entre x et a. Même raisonnement qu'avec le noyau : on distingue 2 cas :

- ***Si*** $\lambda \neq l(a)$, alors x est colinéaire à a.

  Il faut bien comprendre le raisonnement : ceci signifie que si la valeur propre n'est pas $l(a)$, une ***seule autre valeur propre*** est « *possible* », celle associée au vecteur propre a, si il l'est…
- ***Si*** $\lambda = l(a)$, alors $l(x) = 0$.

  Il faut, ici aussi, bien comprendre le raisonnement : les seules vecteurs propres (possibles) associés à la vp $l(a)$ sont ceux qui vérifient $l(x) = 0$.

On en sait assez pour procéder à une synthèse…

Synthèse :

On a vu $f(a) = 0 = 0.a$. Donc c'est une ***autre*** valeur propre que $l(a)$ ssi $l(a) \neq 0$ d'où les 2 cas indiqués par l'énoncé pour vous aider :

- $l(a) \neq 0$. On a donc 2 vp de f d'après l'analyse : $l(a)$ et 0. On a vu $E\big(l(a)\big) \supset \operatorname{Ker} l = H$ qui est un hyperplan, et $E\big(0\big) \supset \operatorname{Vect}(a)$. Pour des raisons de dimension (ces deux espaces propres étant en somme directe) ce sont deux égalités. D'où $\dim E\big(l(a)\big) + \dim E\big(0\big) = n - 1 + 1 = \dim E$. f est ***diagonalisable*** (on peut aussi raisonner avec la multiplicité).
- $l(a) = 0$. Une seule valeur propre 0. On sait alors f diagonalisable ssi $f = 0.Id$ ce qui n'est pas car l n'est pas l'application nulle.

  En fait, on a ici, multiplicité de 0 égale à n et dimension de l'espace propre associé (le noyau) égale à $n - 1$

4) $l(a) = 0$. f ***n'est pas*** diagonalisable donc on sait déjà qu'un polynôme annulateur de f ne sera pas scindé à racines simples. Comme il n'y a pas de vp complexes, il sera scindé (dans $\mathbb{R}$) à racines multiples. Comme la seule valeur propre est 0, un polynôme annulateur « *simple* » est sans doute X^2 ou X^3… Je vous laisse y réfléchir …

$$\forall x \in E,\ f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f\big(l(a)x - l(x)a\big) = \underbrace{l(a)}_{0}\, f(x) - l(x)\, \underbrace{f(a)}_{\vec{0}} = 0$$

X^2 est annulateur de f. On en déduit f nilpotent donc non diagonalisable, mais ce n'est pas « *stricto-sensu* » du cours, on le redémontre (un élève « *ambitieux* » peut néanmoins le retenir). ***Attention!*** à ne pas commettre l'***erreur de raisonnement*** suivante (c'est le « *piège* »!) : X^2 n'est pas scindé à racines simples ***donc*** f n'est pas diagonalisable.

Je démontre qu'un endomorphisme nilpotent f (non nul) ne peut pas être diagonalisable. On a $f^p = 0$. D'abord la seule vp possible est 0 puisque $f(x) = \lambda x$,***avec*** $x \neq 0$, amène $f^p(x) = \lambda^p x$ donc $\lambda^p = 0$, puis $\lambda = 0$ (car c'est un réel ou complexe). Par suite f est diagonalisable ssi $f = 0.\mathrm{Id}$ ce qui n'est pas.

Remarque : Si $l(a) = 0, f(x) = -l(x)\ a$. f est de rang 1. Je vous laisse y réfléchir.

Ex 46 ✷On se donne deux endomorphismes diagonalisables u et v d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie tels que $u \circ v = v \circ u$ Prouvez qu'ils sont co-diagonalisables. *(On dit aussi diagonalisables dans une même base ou au travers d'une même matrice de passage)*

Soient u et v deux endomorphismes ***diagonalisables qui commutent*** $u \circ v = v \circ u$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et $E_i = E(\lambda_i) = \operatorname{Ker}(\lambda_i Id - u)$ les espaces propres associés. De la diagonalisabilité de u, il résulte la décomposition en somme directe $E_1 \oplus \cdots \oplus E_p = E$. De la commutativité, le cours nous apprend que E_i est stable par v, soit donc v_i l'endomorphisme induit par v sur E_i. Comme v est diagonalisable, v_i l'est aussi. Considérons alors une base $\mathscr{E}_i$ de E_i constituée de vecteurs propres de v_i. ce sont donc des vecteurs propres de v, mais ***aussi*** des vecteurs propres de u car appartenant à l'espace propre de u qui est E_i.

De la décomposition en somme directe, il résulte que la réunion de ces p bases $\mathscr{E}_i$ est une ***base*** de E constituée de vecteurs propres ***à la fois*** de u et de v.

Remarque : En version matricielle, ce théorème s'écrit : si A et B sont deux matrices ***diagonalisables*** qui ***commutent***, elles sont ***co-diagonalisables***, cad il existe une ***même matrice inversible*** P telle que, à la fois, $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale et $P^{-1}BP = D'$ avec D' diagonale

Mines-Ponts PSI 2022 | Centrale PSI 2005 (endomorphisme division euclidienne) ✷

Ex 48 Soit u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $u(P)$ est le reste dans la division euclidienne de $(X^4-1)P(X)$ par X^4-X.

1) Montrez que u est un endomorphisme

2) Donnez $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{rg} u$. [**Centrale :** Donnez aussi $\operatorname{Im} u$] .

3) u est-il diagonalisable? [**Centrale :** En plus, donnez $\operatorname{Sp} u$] .

1) Pour une fois, linéaire n'est pas évident... Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et P_1, P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$. On note Q_i, R_i leurs restes respectifs dans la division euclidienne de $(X^4-1)P_i(X)$ par X^4-X. On a donc :

$$(X^4-1)(\alpha P_1+\beta P_2) = \alpha(X^4-1)P_1+\beta(X^4-1)P_2 = (\alpha Q_1+\beta Q_2)(X^4-X)+\ \alpha R_1+\beta R_2$$

Comme $\deg(\alpha R_1+\beta R_2) \leq \max(\deg R_1, \deg R_2) < \deg(X^4-X)$, ***c'est la clé du raisonnement!***, c'est bien le ***reste*** dans la division de $(X^4-1)(\alpha P_1+\beta P_2)$ par X^4-X. ***Par conséquent*** $u(\alpha P_1+\beta P_2) = \alpha R_1+\beta R_2 = \alpha u(P_1)+\beta u(P_2)$.

C'est bien un ***endo***morphisme car, par définition de la division euclidienne par X^4-X, le degré du reste est bien ≤ 3.

2) On a immédiatement $P(X) \in \operatorname{Ker} u$ ssi X^4-X divise $(X^4-1)P(X)$. On se rappelle, en raisonnant dans $\mathbb{C}$, qu'un polynôme divise un polynôme Q ***ssi toutes*** ses racines complexes sont racines de Q avec une multiplicité ***au moins aussi*** grande, c'est en général le résultat le plus utile.

Comme $X^4-X = X(X-1)(X-j)(X-j^2)$ et $(X^4-1)P(X) = (X-1)(X+1)(X-i)(X+i)P(X)$, X^4-X divise $(X^4-1)P(X)$ ***ssi*** $0, j, j^2$ racines de P ce qui équivaut à $X(X^2+X+1)$ divise P. Pour des raisons de degré, $\operatorname{Ker} u$ est donc la droite engendrée par $X(X^2+X+1)$, et u est de rang 3.

En notant le rôle particulier de $(X-1)$, et le fait que $(X^4-1)P(X) = Q(X)(X^4-X)+R(X)$ amène que $X-1$ divise $R(X)$, on a l'inclusion $\operatorname{Im} u \subset \{P \in \mathbb{R}_3[X],\ (X-1) \mid P\}$, puis l'égalité pour des raisons de dimension. C'est d'ailleurs l'hyperplan $\{P, P(1) = 0\}$.

3) Si a est vp de u, il existe $P \neq 0$ tq $(X^4-1)P(X) = Q(X)(X^4-X)+aP(X)$ ce qui amène $X(X-1)(X^2+X+1) \mid (X^4-1-a)P(X)$. Comme $\deg P \leq 3$, ***nécessairement***, (au moins) 0 ou 1 ou j ou j^2 est racine de X^4-1-a (on peut enlever le cas j^2 par conjugaison dans un polynôme réel). On arrive à $a = 0, -1, -1+j$, cette dernière exclue aussi car on est dans un $\mathbb{R}$-ev, on cherche par défaut des vp réelles.

Pour $a = -1$, $u(P) = -P$ équivaut à $(X-1)(X^2+X+1) \mid X^3P(X)$, ce qui amène à : l'espace propre associé à -1 est la droite dirigée par $(X-1)(X^2+X+1) = X^3-1$. Comme la somme totale des dimensions des espace propres est 2, u n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$).

Remarque : Si on cherche l'espace propre associé à la vp complexe $-1+j$ (rp. $-1+j^2$), on trouve la droite dirigée par $X(X-1)(X-j^2)$ (rp. $X(X-1)(X-j)$), u est donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

CCINP PSI 2023-2022-2021 (endomorphisme de matrices)

Ex 46 Soit $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$ et $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M \in E,\ u(M) = aM + bM^{\mathrm{T}}$.

1) Montrez que u est un endomorphisme.

2) Trouvez un polynôme annulateur de u de degré 2.

3) Montrez que u est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres.

4) Calculez $\operatorname{tr} u$ et $\det u$.

1) Laissé au lecteur

2) On remarque que u s'écrit $u = a\mathrm{Id} + b\tau$ avec $\tau : M \longrightarrow M^{\mathrm{T}}$. Or les valeurs propres de $a\mathrm{Id} + \phi$ sont immédiatement celles de ϕ augmentées de a et associées aux mêmes espaces propres puisque $\phi(x) = \lambda x \iff (a\mathrm{Id} + \phi)(x) = (a + \lambda)x$. Par suite, τ étant une symétrie puisque $\tau^2 = 1$, on sait alors que ses valeurs propres sont -1 et 1, et que $E_\tau(1) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $E_\tau(-1) = A_n$. On en déduit que les valeurs propres de u sont $a + b$, d'espace propre associé $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, et $a - b$, d'espace propre associé A_n.

Méthode 1 : $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et A_n de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ Pour montrer u diagonalisable,on peut constater $\dim E_u(a+b) + \dim E_u[a-b) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Méthode 2 (par un polynôme annulateur) : On calcule, en remarquant que Id et τ commutent, pour appliquer l'identité remarquable :

$$u^2 = a^2\,\mathrm{Id} + b^2\tau^2 + 2ab\tau = (a^2 + b^2)\,\mathrm{Id} + 2a(u - a\mathrm{Id}) = (b^2 - a^2)\,\mathrm{Id} + 2au$$

u annule le polynôme $X^2 - 2aX - (b^2 - a^2) = \big(X - (a+b)\big)\big(X - (a-b)\big)$, polynôme scindé à racines simples ***si*** $a + b \neq a - b \iff b \neq 0$. De toute façon, si $b = 0$, u est diagonalisable puisque $u = a\mathrm{Id}$. On retrouve d'ailleurs aussi les valeurs propres.

3) Connaissant toutes les valeurs propres λ et leurs multiplicités respectives μ, il suffit d'appliquer les formules du cours la trace est la somme des valeurs propres, soit la somme des $\mu\lambda$ et le déterminant le produit, soit le produit des λ^μ :

$$\operatorname{tr} u = \frac{n(n+1)}{2}(a+b) + \frac{n(n-1)}{2}(a-b) = n^2 a + nb \qquad \det u = (a+b)^{n(n+1)/2}\,(a-b)^{n(n-1)/2}$$

Ex 51 On se place dans un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie E

1) ✌On suppose f diagonalisable. Montrez f^2 diagonalisable. Montrez que la réciproque est fausse.

2) ✷On considère ici un endomorphisme f tel que f^2 est diagonalisable. Etablir f est diagonalisable $\iff \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f^2)$ *(Indication : utilisez les polynômes annulateurs)*

1)

Méthode 1 (par les morphismes) :

f est diagonalisable, il existe donc une base de E $(e_1, \dots, e_n)$ constituée de vecteurs propres de f, cad $f(e_i) = \lambda_i e_i$. On a immédiatement $f^2(e_i) = f(\lambda_i e_i) = \lambda_i f(e_i) = \lambda_i^2 e_i$. Cette base est donc ***aussi constituée de vecteurs propres de*** f^2 : f^2 est diagonalisable.

Méthode 2 : (par les matrices)

M est diagonalisable, il existe donc $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. Il s'ensuit $M^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. D^2 étant aussi diagonale, M^2 est ***semblable à une matrice diagonale***, donc diagonalisable.

La réciproque de f diagonalisable $\Longrightarrow f^2$ diagonalisable est fausse comme l'établit le contre-exemple suivant :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \qquad\qquad R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$R^2 = -I$ est diagonalisable puisque diagonale! R n'est pas diagonalisable car son polynôme caractéristique $\chi_J(x) = x^2 - \operatorname{tr} J\, x + \det J = x^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (c'est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$).

2)

$\boxed{\Longleftarrow}$ Ici $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et f^2 diagonalisable. Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, ***scindé à racines simples***, qui annule f^2. Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ ses racines complexes (qui sont donc de multiplicité 1). On a donc :

$$\left(f^2 - \alpha_1 I d_E\right) \circ \dots \circ \left(f^2 - \alpha_p I d_E\right) = 0$$

L'idée à trouver était que, le polynôme $Q(X) = P(X^2)$ annule f, cad : $Q(X) = (X^2 - \alpha_1) \times \cdots \times (X^2 - \alpha_p)$. Evidemment, ***à priori***, il n'a aucune raison d'être à racines simples. Mais il est ***scindé*** car on est dans $\mathbb{C}$. Pour simplifier, étudions 2 cas :

- Aucun des α_i n'est nul. En notant $\pm\beta_i$, les deux racines carrées complexes de α_i, on a

  $$Q(X) = (X + \beta_1)(X - \beta_1) \dots (X + \beta_p)(X - \beta_p)$$

  qui est bien à racines simples, car la « *distinction* » des α_i amène la « *distinction* » des $\pm\beta_i$ (c'est un peu « *triché* » lire plus bas). f est donc ***diagonalisable***.

  Notons que l'hypothèse sur les noyaux n'est pas utile dans ce cas. D'ailleurs, on a ***ici*** $\operatorname{Ker} f = \{0\} = \operatorname{Ker} f^2$, 0 n'est pas valeur propre et f et f^2 sont des bijections.

- Un des α_i est nul. Notons le α et « *gardons* » les autres. On a donc ici

  $$Q(X) = X^2 \underbrace{(X + \beta_1)(X - \beta_1) \dots (X + \beta_p)(X - \beta_p)}_{R(X)} = X^2\, R(X)$$

  On voit bien le « *problème* » : 0 est racine double du polynôme annulateur ce qui ***ne prouve rien***, mais on ne peut appliquer le théorème.... Il faut donc utiliser l'hypothèse sur les noyaux. En rappelant qu'il est immédiat (quasi-cours) que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, l'hypothèse servira certainement plutôt sous la « *forme* » $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ qui s'écrit ***aussi*** : ***si*** $f^2(y) = 0$, ***alors*** $f(y) = 0$.

  Soit $x \in E$. Comme l'endomorphisme $Q(f) = O$, il suit, en particulier : $Q(f)(x) = \left(f^2 \circ R(f)\right)(x) = f^2\left(R(f)(x)\right)$ d'où l'on tire $R(f)(x) \in \operatorname{Ker} f^2$, et par ***hypothèse***, $R(f)(x) \in \operatorname{Ker} f$, soit $f(R(f)(x)) = 0$ ou encore en utilisant le polynôme $S(X) = X\, R(X)$, on a $S(f)(x) = 0$. Ceci étant vrai ***pour tout*** x, $S(X)$ est donc un ***polynôme annulateur*** de f et il est ***scindé à racines simples***. f est donc ***diagonalisable***.

  $$S(X) = X\,(X + \beta_1)(X - \beta_1) \dots (X + \beta_p)(X - \beta_p)$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Ici f et f^2 sont diagonalisables. On sait, de manière quasi-immédaite, $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ (Je ne le redémontre pas ici, c'est trop simple). On va démontrer l'égalité par l'égalité des dimensions.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une ***base*** de E de ***vecteurs propres*** de f, avec $f(e_i) = \lambda_i e_i$. C'est aussi une base de E de vecteurs propres de f^2, car $f^2(e_i) = \lambda_i^2 e_i$, comme déjà vu plus haut. Rappelons que pour des endomorphismes diagonalisables, la multiplité d'une valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre. On a

$$\mu_f(0) = \text{Card}\left\{i \,\middle|\, \lambda_i = 0\right\} \qquad \mu_{f^2}(0) = \text{Card}\left\{i \,\middle|\, \lambda_i^2 = 0\right\}$$

De $\lambda_i = 0 \iff \lambda_i^2 = 0$, il suit $\mu_{f^2}(0) = \mu_f(0)$, puis $\dim \text{ Ker} f = \dim \text{ Ker} f^2$.

Remarque : Démontrons proprement que si les n complexes λ_i sont tous distincts et non nuls , alors leurs $2n$ racines-carrées sont aussi distinctes :

▶ Dans $\mathbb{R}$, c'est un peu plus simple. Evidemment on doit supposer $\lambda_i \geq 0$ et non nul. Il suffit de dire que l'application $x \longrightarrow x^2$ est ***injective*** sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$, ce qui se prouve par dérivée ***strictement*** positive (ou négative). Par conséquent les n racines carrées positives des λ_i sont distinctes ente elles et les n racines carrées négatives entre elles. Ensuite les nombres positifs sont nécessairement distincts des nombres négatifs, puisque non nuls.

▶ Dans $\mathbb{C}$, On considère aussi l'application $x \longrightarrow x^2$ mais ici ***on ne peut pas dériver*** pour prouver l'injectivité. On se place dans la partie A_+ de $\mathbb{C}$ définie par $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x > 0 \text{ ou } (x = 0 \text{ et } y > 0)\}$, comme déjà parlé en cours : il y a une unique racine carrée de tout nombre complexe z non nul dans A_+, c'est celle là que l'on ***note*** $\sqrt{z}$. Il est immédiat que « *l'autre* » est dans $A_- = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x < 0 \text{ ou } (x = 0 \text{ et } y < 0)\}$. Reste à montrer l'***injectivité*** sur A_+ et sur A_-.

On se contente de A_+ et on utilise la ***définition*** de l'injectivité : $f(x) = f(y) \implies x = y$. Soit donc $z = \alpha + i\beta \in A_+$ et $z' = \alpha' + i\beta' \in A_+$ tels que $z^2 = z'^2$. Il vient $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha'^2 - \beta'^2$ et $2\alpha\beta = 2\alpha'\beta'$ et le module donne $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha'^2 + \beta'^2$. Par sommation, $2\alpha^2 = 2\alpha'^2$, qui ont réels, puis par positivité, $\alpha = \alpha'$. Ensuite $\beta = \beta'$, soit $z = z'$.

Par conséquent il y a n racines carrées distinctes dans A_+, n autres dans A_-, et comme $A_+ \cap A_- = \emptyset$, elles sont bien toutes distinctes entre elles

---

Ex 53 ✷Soit V un ev de dimension n, $f \in \mathscr{L}(V)$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(V)$ tel que : $u \to f \circ u$

1) Montrez $\text{Sp}\,\phi = \text{Sp}\, f$

2) Dimension de $\text{Ker}(\phi - \lambda Id)$ en fonction de $\text{Ker}(f - \lambda Id)$

3) Montrez ϕ diagonalisable ssi f diagonalisable.

---

1)

On montre l'égalité de ces ensembles par la double inclusion :

$\boxed{\text{Sp}\,\phi \subset \text{Sp}\, f}$

Soit $\lambda \in \text{Sp}\,\phi$, alors il existe un ***endomorphisme*** u non nul tel que $\phi(u) = f \circ u = \lambda u$. Comme $u \neq O$, il ***existe au moins un*** vecteur $y \in V$ tel que $u(y) \neq 0$ et il s'ensuit $f\big(u(y)\big) = \lambda u(y)$. Comme $u(y) \neq 0$, on en ***déduit*** λ valeur propre de f, cad $\lambda \in \text{Sp}\, f$.

$\boxed{\text{Sp}\, f \subset \text{Sp}\,\phi}$

Soit $\lambda \in \text{Sp}\, f$, il existe donc $y \neq 0$, tel que $f(y) = \lambda y$. Rappelons alors que tous les vecteurs colinéaires à y sont alors aussi vecteurs propres associés à λ.

Il faut « *trouver* » un ***endomorphisme*** non nul u tel que $f \circ u = \lambda u$, ce qui s'écrit aussi ***pour tout*** x, $f\big(u(x)\big) = \lambda u(x)$. Considérons alors la ***projection*** p sur la droite $\text{Vect}(y)$ parallèlement à n'importe quel supplémentaire (il en existe c'est du cours). Remarquons bien que pour tout x de V, $p(x)$ est colinéaire à y. Il s'ensuit :

$$\forall x \in V, \quad \phi(p)(x) = (f \circ p)(x) = f(p(x)) = \lambda p(x) \quad \Longrightarrow \quad \phi(p) = \lambda p$$

p ***n'est pas l'application nulle*** (car $p(y) = y \neq 0$). D'où on a bien $\lambda \in \mathrm{Sp}\,\phi$.

2) Notons $n = \dim V$. Soit λ une valeur propre commune à ϕ et f. Montrons $\dim \mathrm{Ker}\,(\phi - \lambda Id_{\mathscr{L}(V)}) = n \dim \mathrm{Ker}\,(f - \lambda Id_V)$. Notons ces espaces propres $E_\phi(\lambda)$ et $E_f(\lambda)$.

$$u \in E_\phi(\lambda) \Longleftrightarrow \forall x \in V,\ \phi(u)(x) = (f(u(x)) = \lambda u(x) \Longleftrightarrow \forall x \in V,\ u(x) \in E_f(\lambda) \Longleftrightarrow \ \mathrm{Im}\,u \subset E_f(\lambda)$$

Cet exercice « ramène »à un autre exercice *classique*, qui est de déterminer la dimension du sev L de $\mathscr{L}(V)$ des endomorphismes u tels que $\mathrm{Im}\,u \subset F$, F étant un sous-ev donné. La dimension est $n \times \dim F \leq n^2 = \dim \mathscr{L}(V)$ comme nous allons le démontrer : Il suffit de considérer l'isomorphisme trivial, noté ψ qui à un endomorphisme $u \in L$ (donc tel que $\mathrm{Im}\,u \subset F$) associe le morphisme $\psi(u) = u'$ de $\mathscr{L}(V,F)$ défini par $u'(x) = u(x)$! ψ isomorphisme est immédiat, la réciproque de ψ étant évidente. Il s'ensuit $\dim L = \dim \mathscr{L}(V,F) = \dim V \times \dim F = n \times \dim F$
Pour en revenir à notre exo, nous avons donc $\dim E_\phi(\lambda) = n \times \dim E_f(\lambda)$

3)

Méthode 1 : (utilise les questions précédentes)

On utilise la question précédente. En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres 2 à 2 distinctes et communes à ϕ et f (d'après Q1). D'après Q2 :

$$\dim E_\phi(\lambda_1) + \cdots + \dim E_\phi(\lambda_p) = n \times \left(\dim E_f(\lambda_1) + \cdots + \dim E_f(\lambda_p)\right)$$

IL vient immédiatement :
$\dim E(\lambda_1) + \cdots + \dim E(\lambda_p) = n\ (= \dim V) \Longleftrightarrow \dim F(\lambda_1) + \cdots + \dim F(\lambda_p) = n^2\ (= \dim \mathscr{L}(V))$,
ce qui donne exactement f diagonalisable ssi ϕ diagonalisable.

Méthode 2 : (directe par les matrices)

On se donne une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme ϕ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\phi(U) = MU$. Considérons la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en notant usuellement la matrice E_{ij} comme la matrice possédant un 1 à la position (i,j) et 0 ailleurs, base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on ***ordonne comme suit*** : $(E_{11}, E_{21}, \dots, E_{n1}, E_{12}, E_{22}, \dots, E_{n2}, \dots, \dots, E_{1n}, E_{2n}, \dots, E_{nn})$
On va écrire la matrice A de ϕ dans cette base et établir A diagonalisable ssi M diagonalisable.

Commençons par regarder ce qui se passe pour $n = 2$. Posons $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. On calcule :

$$\phi(E_{11}) = ME_{11} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \phi(E_{21}) = ME_{21} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} \quad \phi(E_{12}) = ME_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \phi(E_{22}) = ME_{22} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

En faisant ***très attention*** à l'ordre qui est $(E_{11}, E_{21}, E_{12}, E_{22})$, on constate :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & O \\ O & M \end{pmatrix}$$

Regardons maintenant le cas quelconque. Le lecteur constatera que M_{ij} est le $i+(j-1)n$-ième vecteur de cette base. Ecrivons la matrice A de ϕ dans cette base. On calcule alors

$\phi(M_{ij}) = M \times M_{ij} = \sum_{k,l} m_{kl} M_{kl} \times M_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} M_{kj}$

On a utilisé la formule, que je ne redémontre pas ici, $E_{ij} \times E_{kl} = \delta_{jk} E_{il}$. On constate alors que les coordonnées correspondant à cette colonne (qui est la $i+(j-1)n$-ième colonne de A) sont la ième colonne de M, mais colonne qui commence « à la position »M_{1j}, soit la $1+(j-1)n$-ième ligne. Regardons bien ce qui se passe pour les premiers indices.

Pour la première colonne de A, $i=j=1$, la 1ère colonne de M commence à la position $1+(j-1)n=1$. Pour la deuxième colonne de A, $i=2$, $j=1$. On a la deuxième colonne de M qui commence à la position $1+(j-1)n=1$ aussi. La nième colonne de A, correspondant à $i=n$, $j=1$ contient la nième colonne de M aussi à la position 1. Donc dans la matrice A, se retrouve la matrice M dans le coin en haut à gauche.

Pour la $n+1$-ème colonne de A, $i=1$, $j=2$. On y retrouve la $i=1$ colonne de M et à la position $i+(j-1)n=n+1$. Le lecteur vérifiera que jusqu'à la $2n$ ième colonne de A, on trouvera toutes les colonnes de$M$ successivement toutes à la position $n+1$. Bref on trouve dans la matrice A, la matrice M à la position $(n+1,n+1)$ en haut à gauche.

Comme dans le cas $n=2$, la matrice A est une matrice diagonale par blocs, avec n blocs diagonaux tous égaux à M. IL s'ensuit immédiatement A diagonalisable ssi M diagonalisable.

Centrale PSI 2023 (matrice 2x2 à coefficients entiers) ✶

Ex 52 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1) On suppose A inversible. Montrez $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ssi $\det A \in \{-1,1\}$.

2) On suppose il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq $A^p = I_2$. Montrez que A est inversible, et que A^{-1} est à coefficients entiers. Montrez qu'il n'existe qu'un nombre fini de polynômes caractéristiques possibles pour A.

1) Si A est inversible avec $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $AA^{-1} = I$ amène $\det(A)\det(A^{-1} = 1$ puis, $\det(A^{-1})$ étant un produit-somme d'entiers est un entier comme $\det(A)$. Les seuls entiers inversibles d'inverse un entier sont ± 1.

Réciproquement, si A à cofficients entiers et $\det(A) = \pm 1$, montrons A^{-1} à coefficients entiers.

Méthode 1 (par la comatrice) La comatrice de A (notée $\operatorname{com} A$) n'est pas stricto-sensu au programme de PSI mais ce n'est rien d'autre que la matrice des cofacteurs et les cofacteurs sont au programme... Rappelons que pour une matrice $A = (a_{ij})$, le cofacteur de a_{ij} (ou le cofacteur d'indice (i,j)) est $(-1)^{i+j} \times \det(A_{ij})$ où A_{ij} est la sous-matrice de A d'ordre $n-1$ obtenue en rayant la i^e ligne et la j^e colonne. La formule de développement suivant la ligne L_i (rp. colonne C_j) du déterminant est donnée par $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$ (rp. $\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$), c'est du cours.

Si, dans la matrice A, nous mettons à la place de la ligne L_i la ligne L_k, le déterminant est nul (2 lignes égales) et la formule « *subsiste* », car les cofacteurs correspondant à la ligne i, eux, restent les mêmes et devient $0 = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} \det(A_{ij})$. Raisonnement identique avec les colonnes. On obtient donc, pour tous $1 \le i,k \le n$:

$$\delta_{ik} \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} \det(A_{ij}) \qquad \delta_{ki} \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ik} \det(A_{ij})$$

Le lecteur vérifiera qu'on obtient les formules produits de matrices, plus exactement :

$$\operatorname{com} A \times A^{\mathrm{T}} = \det(A) I_n \qquad A^{\mathrm{T}} \times \operatorname{com} A = \det(A) I_n$$

Ceci donne $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\operatorname{com} A)^{\mathrm{T}}$. La comatrice étant à coefficients entiers (les cofacteurs), le résultat suit.

Méthode 2 (système de Cramer) : La colonne C_j de la matrice se calcule par la résolution du système de Cramer $AX = E_j$ où E_j est le j^e vecteur de la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On sait alors que x_i est donné par le quotient du déterminant de A_i (A_i est la matrice A où on a changé la j^e colonne par E_j), c'est donc un entier, divisé par $\det(A)$. x_i est donc bien un entier. On peut redémontrer ce résultat, en considérant ce système à coefficients dans $\mathbb{K}^n$, il s'écrit en une seule ligne :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i C_i = E_j \quad \Longrightarrow \quad \det(A_i) = \det_{\mathscr{E}}\left(C_1, \ldots, C_{j-1}, E_j, C_{j+1}, \ldots, C_n\right) = \det_{\mathscr{E}}\left(C_1, \ldots, C_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} x_i C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \det_{\mathscr{E}}\left(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n\right) = 0 + \cdots + 0 + x_i \det(A) + 0 + \cdots + 0$$

On a appliqué la n-linéarité et le caractère alterné de $\det_{\mathscr{E}}$

2) $X^p - 1$ étant annulateur de A, 0 n'est pas vp de A donc A est inversible. On peut aussi remarquer que $A^{-1} = A^{p-1}$ qui nous donne bien des coefficients entiers. Les polynômes caractéristiques possibles sont ceux à coefficients entiers. En raisonnant dans $\mathbb{R}$, les polynômes irréductibles possibles sont $X-1$, $X+1$ (si p pair) et, en regroupant les vps 2 à 2 conjuguées, $P_k = X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)X + 1$, avec $1 \leq k \leq p-1$, $k \neq \frac{p}{2}$ si p pair, ***mais surtout*** n'oublions pas la dimension $n = 2$. Il reste donc $(X-1)^2$, (X^2-1) et $(X+1)^2$ (si p pair) et les P_k où $2\cos\left(\frac{2k\pi}{p}\right)$ est un entier (c'est d'ailleurs la trace de A). Ceci impose que le cosinus vaut $0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}$, ± 1 sont exclus (polynôme non irréductible). On rajoute donc X^2+1, $X^2 \pm X + 1$

On peut être plus précis : préciser les différents cas possibles selon p : il vient $\frac{2k\pi}{p} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ ce qui donne respectivement pour les couples (k,p) : $(m,4m)$, $(3m,4m)$, $(m,6m)$, $(m,3m)$, $(2m,3m)$, $(5m,6m)$. Je vous laiss affiner les différents cas selon la congruence $\text{ppcm}(4,6,3) = 12$

Remarque : On peut donc en déduire que ***nécessairement*** $A^{12} = I_2$

CCP PSI 2022 -2019 (polynôme annulateur avec 0 racine simple)

Ex 56 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E de dim. finie. On suppose 0 racine simple d'un polynôme annulateur de u.

1) Montrez $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

2) Montrez que si u est nilpotent, alors u est nul.

1) $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2$ est immédiat. Laissé au lecteur. Je rappelle que « *ceci* » s'appelle la suite des noyaux itérés :

$$\{0\} = \operatorname{Ker} Id = \operatorname{Ker} u^0 \subset \operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker} u^2 \subset \cdots \subset \operatorname{Ker} u^k \subset \operatorname{Ker} u^{k+1} \subset \ldots$$

Ceci n'est pas « *stricto sensu* » du cours. On peut aussi savoir que si E est de dimension finie, on a à partir d'un certain rang, que des égalités. Idem avec les images, mais l'inclusion inverse.

Pour démontrer l'inclusion réciproque, il va falloir utiliser l'hypothèse : il existe un polynôme annulateur de u où 0 est racine simple, on peut l'écrire $P(X) = a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_p X^p$ ***avec*** $a_1 \neq 0$ (on aurait aussi pu écrire $P(X) = XQ(X)$ ***avec*** $Q(0) \neq 0$, mais c'est un peu moins pratique ici).

Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$, donc $u^2(x) = 0$ et donc $u^k(x) = 0$ pour $k \geq 2$. P est annulateur de u donc $P(u) = 0$ mais aussi $P(u)(x) = 0$ (je rappelle que $P(u(x))$ n'a pas de sens), soit :

$$a_1 u(x) + a_2 u^2(x) + \cdots + a_p u^p(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_1 u(x) = 0 \Longrightarrow u(x) = 0 \textbf{ car } a_1 \neq 0 \Longrightarrow x \in \operatorname{Ker} u$$

2) Supposons en plus de l'hypothèse, u nilpotent, cad il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$. Utilisons ici plutôt $P(X) = XQ(X)$ avec $Q(0) \neq 0$. D'autre part, on sait que la seule valeur propre possible d'un endomorphisme nilpotent est 0. Comme ce n'est pas stricto-sensu du cours, je le redémontre : soit λ vp de u, il existe $x \neq 0$, $u(x) = \lambda x$ puis $u^p(x) = \lambda^p x = 0$ d'où $\lambda^p = 0$, car $x \neq 0$, soit $\lambda = 0$.

Méthode 1 : Ensuite $Q(u)$ est ***inversible*** car 0 ***n'est pas*** valeur propre de $Q(u)$: En effet, le cours nous apprend que les valeurs propres (en raisonnant dans $\mathbb{C}$) de $Q(u)$ sont exactement les $Q(\lambda_i)$ avec λ_i les vp de u (on trigonalise). ***Si*** 0 était vp de $Q(u)$, on aurait l'existence d'un λ_i vp de u tel que $Q(\lambda_i) = 0$. Or la seule vp de u est 0, d'où $Q(0) = 0$. ***Absurde!*** Par suite $P(u) = u \circ Q(u) = 0$ amène $u = 0$. Cette méthode est « *zolie* » mais elle n'utilise pas la question 1 …

Méthode 2 : Je vais faire bref : si $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$, comme je vous disais plus haut, un résultat de la suite des noyaux itérés (démontré en cours, voir feuille de Septembre, je ne le redémontre pas ici) amène que tous les noyaux sont alors égaux ***à partir de*** $k = 2$, en particulier $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2 = \cdots = \operatorname{Ker} u^p = \operatorname{Ker} 0 = E$ d'où $\operatorname{Ker} u = E$ ce qui est $u = 0$.

Ex 57 ✌Prouvez $A \in M_n(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable si elle vérifie $(A-3I)^3(A+2I) = 0$ et $(A-3I)^2(A+2I) \neq 0$

Méthode 1 :

A annule le polynôme $P(X) = (X-3)^3(X+2)$. par suite, on sait $\operatorname{Sp} A \subset \{-2, 3\}$. Notons que le polynôme P ***n'est pas*** scindé à racines simples, donc on ne peut ***rien en déduire***… 4 cas possibles :

- $\operatorname{Sp} A = \emptyset$. A n'est alors pas diagonalisable car il est nécessaire qu'il y a ait n valeurs propres, comptées avec la multiplicité (ce qui « *peut* » n'en faire qu'un distincte).
- $\operatorname{Sp} A = \{-2\}$. Un théorème nous dit alors que A est diagonalisable ssi $X+2$ est annulateur.
- $\operatorname{Sp} A = \{3\}$. Un théorème nous dit alors que A est diagonalisable ssi $X-3$ est annulateur.
- $\operatorname{Sp} A = \{-2, 3\}$ Un théorème nous dit alors que A est diagonalisable ssi $(X+2)(X-3)$ est annulateur.

Or il est impossible que ces 3 polynômes soient annulateurs, puisque par hypothèse, le polynôme $(X-3)^2(X+2)$, qui leur est multiple, ne l'est pas.

Méthode 2 :

Il faut démontrer $\operatorname{Ker}(-2I - A) \oplus \operatorname{Ker}(3I - A)$ inclus ***strictement*** dans E, qui est ici $\mathbb{R}^n$. Comment le démontrer? Tout simplement, en trouvant un $X\ (\in E)$ tel que $x \notin \operatorname{Ker}(-2I-A) \oplus \operatorname{Ker}(3I-A)$. On se doute déjà que cela vient de l'hypothèse $(A-3I)^2(A+2I) \neq 0$

Dans ce genre de raisonnements, on procède en général par analyse-synthèse, pour comprendre comment trouver ce X. Je ne reproduis pas l'analyse ici, d'abord parce qu'elle ne vous est pas tellement utile, ensuite parce que j'en pas fait car j'ai « *deviné* », et troisièmement pour que cous compreniez que seule la synthèse démontre et donc suffit sur une copie.

Par hypothèse $(A-3I)(A-3I)(A+2I) \neq 0$, donc il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{R}^n$) tel que $(A-3I)(A-3I)(A+2I)X \neq 0$. En particulier, on a $(A-3I)(A+2I)X \neq 0$. Montrons par l'absurde $X \notin \operatorname{Ker}(-2I-A) \oplus \operatorname{Ker}(3I-A)$:

Si $X \in \operatorname{Ker}(-2I-A) \oplus \operatorname{Ker}(3I-A)$, alors $X = Y + Z$, avec $AY = -2Y$ et $AZ = 3Z$ (je rappelle que ces 2 noyaux sont les espaces propres associés à -2 et 3). On a aussi, de manière équivalente, $(-2I-A)Y = 0$ et $(3I-A)Z = 0$ puis :

$$\begin{aligned}(A-3I)(A+2I)X &= (A-3I)(A+2I)Y + (A-3I)(A+2I)Z \\ &= (A-3I)\left[(A+2I)Y\right] + (A+2I)\left[(A-3I)Z\right] \\ &= (A-3I)0 + (A+2I)0 = 0\end{aligned}$$

Absurde! Je rappelle qu'on peut commuter les polynômes en A puisque les A^k commutent avec les A^m et les I.

CCEM PSI 2015 | CCP PSI 2014-2011 | (polynome annulateur matrice 3×3*)*

Ex 58 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^4 = f^2$ et $\{-1, 1\} \subset \operatorname{Sp} f$. Montrez f diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$. A annule donc le polynôme $P(X) = X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ qui est scindé mais pas à racines simples. On en déduit $\operatorname{Sp} A \subset \{0, -1, 1\}$, cad les seules valeurs propres possibles réelles (ou complexes) sont $0, 1$ ou -1. En ajoutant l'hypothèse $A \supset \{-1, 1\}$, on obtient deux cas :

- $\operatorname{Sp} A = \{0, -1, 1\}$. Ne pas oublier que l'on est en dimension $3\ldots$ Comme A d'ordre 3 a ***3 valeurs propres distinctes***, A est diagonalisable.

- $\operatorname{Sp} A = \{-1, 1\}$ Ici, 0 n'est pas valeur propre de A qui est donc ***inversible***, on multiplie donc à gauche l'égalité entre matrices par A^{-2}. IL vient $A^2 = I$. Ici, un autre polynôme annulateur trouvé $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est bien ***scindé à racines simples***, soit A diagonalisable.

Mines-Ponts PSI 2023 (polynôme annulateur) ✷

Ex 59 Soit $P = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$

1) Vérifiez $P(2) = P'(2) = 0$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

2) Trouvez les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tq il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P(M) = 0, \det M = \pm 1$ et $\operatorname{tr}(M^3) = 0$.

1) De $P(2) = P'(2) = 0$, on déduit $(X-2)^2 \mid P(X)$. On calcule alors $P(X) = (X-2)^2(X^3 + 2X^2 + 2X + 1)$. Racine évidente -1 puis $P(X) = (X-2)^2(X+1)(X^2 + X + 1)$ qui est la décomposition en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ (degré 1 et degré 2 sans racines réelles) et dans $\mathbb{C}$, c'est $P(X) = (X-2)^2(X+1)(X-j)(X-j^2)$.

2) ***Analyse :***

Puisque P est annulateur, $\operatorname{Sp}_C M \subset \left\{-2, 2, j, j^2\right\}$. P n'est malheureusement pas scindé à racins simples. Notons respectivement m, p, q les multiplicités au sens large, (cad 0 possible si la valeur n'est pas vp) de $-1, 2, j$, la multiplicité de j^2 étant aussi q par conjugaison puisqu'on recherche une matrice réelle. On sait que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, si M a pour vps ***complexes*** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, comptées avec la multiplicité, la matrice $Q(M)$ a pour vp les $Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_n)$ (je ne le redémontre pas ici, il suffit de trigonaliser dans $\mathbb{C}$). On a donc le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} m+p+2q & = & n \\ \det M = (-1)^m 5^p j^q (j^2)^q & = & \pm 1 \\ \operatorname{tr} M^3 = m(-1)^3 + p5^3 + qj^3 + q(j^2)^3 & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} m+p+2q & = & n \\ 5^p & = & 1 \\ -m + 5^3 p + 2q & = & 0 \end{array}\right. \Longrightarrow n = 4q$$

On a aussi $m = 2q$, utile pour la réciproque. n multiple de 4 est une condition nécessaire.

Réciproque :

n est multiple de 4, il suffit, en considérant des matrices diagonales par le même bloc 4×4 de trouver ***une*** matrice 4×4 qui convient. On la prend diagonale par blocs, elle aussi, $M = \operatorname{Diag}(-1, -1, R)$ où R est la (matrice de) rotation d'angle (de mesure) $\frac{2\pi}{3}$ (qui aura bien pour vp $j$et j^2, c'est $R = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$.

- Elle annule $Q(X) = (X+1)(X^2 + X + 1)$ car ses blocs le font et $Q(X) \mid P(X)$ donc P annulateur. Ok.
- $\det(M) = (-1)^2 jj^2 = 1$. Ok.
- $M^3 = \operatorname{Diag}((-1)^3, (-1)^3, R^3)$ où R^3 est la rotation d'angle (de mesure) $3\frac{2\pi}{3}$, donc est égale à I_2, donc $\operatorname{tr} M^3 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0$. Ok.

Remarque : Je rappelle, même si ce n'est pas au programme stricto-sensu, que les 2 vps de la rotation dans le plan d'angle (de mesure) θ sont $e^{\pm i\theta}$.

CCP PSI 2022-2016-2013 | CCP PC 2012-2010 | (racine d'une matrice symétrique)

Ex 60 Soit A symétrique réelle d'ordre n telle que $A^k = I_n$ avec k entier non nul. Montrez $A^2 = I$.

A annule le polynÃ´me $X^k - 1$, scindé Ã racines simples mais dans $\mathbb{C}$ (les k valeurs propres k-ièmes de 1), donc est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Ceci dit, on sait qu'elle est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, puisque symétrique réelle.

Par contre, on apprend que ses vp sont parmi les k racines k-ièmes de 1, or ***les vps de*** A ***sont réelles***. On en déduit $\operatorname{Sp} A \subset \{-1,1\}$, puisque -1 et 1 sont les seuls nombres réels racines n-ièmes de 1 (suivant la parité). A étant ***diagonalisable***, elle annule donc $(X-1)(X+1)$ soit X^2-1, ce qui amène $A^2 = I$.

CCP PSI 2014-2012 (endomorphisme de matrices)

Ex 62 Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $f(M) = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.
Montrez que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. f est-elle diagonalisable? Donnez ses éléments propres.

Pour prouver diagonalisable sans calculer les éléments propres, à part l'idée d'une matrice (ou d'un endomorphisme) symétrique réelle, une autre idée est de trouver un polynôme annulateur scindé à racines simples. On commence par calculer f^2 :

$$f^2\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \operatorname{Id}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On en déduit $f^2 = \operatorname{Id}$, soit f annule $X^2-1 = (X-1)(X+1)$ qui est bien scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$. On reconnaît une symétrie.

On a $\operatorname{Sp} f \subset \{-1,1\}$. f étant diagonalisable, le spectre n'est pas vide. Les 2 cas de singleton $\{1\}$ et $\{-1\}$ sont aussi exclus : pour 1, si 1 est la seule vp de f ***et*** f ***diagonalisable***, ce ne peut-être que $1.\operatorname{Id}$ (rappelé maintes fois en cours), ce qui n'est pas. Analogue pour -1. ***Conclusion :*** $\operatorname{Sp} f = \{-1,1\}$.

Le calcul des espaces propres est aisé, je ne calcule que $E(1)$:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E(1) \iff f(M) = 1.M \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \\ c = a \\ d = b \end{cases} \iff \begin{cases} c = a \\ d = b \end{cases}$$

$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. C'est un plan.

CCP PC 2011 (polynôme annulateur matrice 6×6)

Ex 63 Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\operatorname{tr} A = 8$. Calculez le polynôme caractéristique de A.

A annule le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X = X(X^2 - 3X + 2) = X(X-1)(X-2)$. On en déduit $\operatorname{Sp} A \subset \{0,1,2\}$ et, P étant ***scindé à racines simples*** dans $\mathbb{R}$, A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Notons m_0, m_1, m_2 les multiplicités respectives de $0,1,2$ en ***convenant*** (c'est usuel) que la multiplicité vaut 0 si le réel n'est pas valeur propre (pas racine).

N'oublions pas l'hypothèse A inversible qui amène 0 n'est pas vp (ou $m_0 = 0$). Bref, on ne s'en « *occupe* » plus. L'hypothèse $\operatorname{tr}(A) = 8$, en se rappelant que la trace est la somme de toutes les vp (complexes comptées ***avec*** la multiplicité), amène $8 = 1 \times m_1 + 2 \times m_2$. Pour finaliser, on n'oublie pas l'hypothèse de dimension (d'ordre) qui est 6! Soit $m_1 + m_2 = 6$. La résolution immédiate de ce système 2×2 donne $m_1 = 4, m_2 = 2$. Il vient immédiatement :

$$\chi_A(x) = (x-1)^4(x-2)^2 \qquad \det(A) = 1^4 \times 2^2 = 4$$

CCINP PSI 2022-2021 | TPE PSI 2016 (equation matricielle avec transposée)

Ex 64 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^{\mathrm{T}} = I_n$.

1) Montrez que si un polynôme P annule M, alors les vp de M sont des racines de P [**2016 :** Q. absente]

2) On suppose M symétrique. Montrez M diagonalisable. [**2021 :** Est-elle diag.?] Montrez $\det(M) \times \operatorname{tr}(M) \neq 0$.

3) On ne suppose plus M symétrique. Montrez M diagonalisable.

4) Montrez M inversible ssi 1 n'est pas vp de M. [**2021 :** Montrez alors M symétrique]

1) C'est du cours! à redémontrer donc : si $P(M) = 0$, $\text{Sp}\, M \subset Rac(P)$ Je ne le re-fais pas ici. ***Attention!*** cette question tombe régulièrement.

2) Il y a un piège! C'est (peut-être) faux si elle est (vraie) ***complexe***! Mais l'équation s'écrit alors $M^2 + M = I_n$, ce qui nous donne le polynôme annulateur $X^2 + X - 1$ de racines $\alpha, \alpha' = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, scindé à racines simples donc diagonalisable (dans $\mathbb{C}$ à priori! D est réelle, mais, à priori, P pourrait être complexe). 0 n'est pas valeur propre donc M inversible, soit $\det(M) \neq 0$. Si on note p la multiplicité de α avec $0 \leq p \leq n$, alors celle de α' est $n - p$, ce qui amène :

$$\text{tr}(M) = p\frac{1+\sqrt{5}}{2} + (n-p)\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{n}{2} + (2p-n)\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Si $\text{tr}(M) = 0, \sqrt{5} = \dfrac{n}{n-2p}$ est ***rationnel. Absurde!***

Remarque : Il vaut peut être mieux savoir redémontrer ce résultat valide pour $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$. Par l'absurde, donc.
Si $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ est rationnel (on suppose toujours p et q premiers entre eux ($p \wedge q = 1$) sinon des raisonnements pourraient ête invalidés). Alors, au carré, $5q^2 = p^2$, donc $5 \mid p^2$ donc nécessairement $5 \mid p$ (c'est de l'arithmétique somme toutes assez logique), d'où $5^2 \mid p^2$ puis, en réinjectant, $5 \mid q$. ***Absurde!*** car p et q sont premiers entre eux.

3) On cherche un polynôme annulateur en essayant de se « *débarrasser* » de la transposée. De l'équation on tire $(M^{\text{T}})^2 = (I_n - M^2)^2 = M^4 - 2M^2 + I_n$, formule du binôme de **Newton**[3] ***valide*** puisque les deux matrices M^2 et I_n commutent. En passant à la transposée dans l'équation on obtient aussi : $(M^2)^{\text{T}} = (I_n - M^{\text{T}})^{\text{T}} = I_n - M$. L'égalité amène $M^4 - 2M^2 + I_n = I_n - M$, soit $M^4 - 2M^2 + M = 0$.

Le polynôme $X^4 - 2X^2 + X = X(X^3 - 2X + 1) = X(X-1)(X-\alpha)(X-\alpha')$ est donc ***annulateur*** de M avec $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On en déduit $\text{Sp}\, M \subset \{0, 1, \alpha, \alpha'\}$. Le polynôme étant ***scindé à racines simples***, la matrice est diagonalisable (à priori dans $\mathbb{C}$: une matrice complexe peut avoir des vecteurs propres complexes associés à des vp réelles!). Si la matrice est réelle, le polynôme annulateur est scindé à racines simples réelles donc la matrice est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

4) Je démontre la contraposée des 2 implications :

Si 1 est vp de M, alors $MX = 1.X$ avec $X \neq 0$, puis $M^2X = 1^2X = X$, soit $(M^2 - I)X = 0$ ce qui amène par l'équation hypothèse de l'énoncé, $M^{\text{T}}X = 0$, soit M^{T} non inversible (***car*** $X \neq 0$), puis, c'est du cours, M non inversible (cela vient de $\det(M) = \det(M^{\text{T}}) = 0$).

Si M non inversible, M^{T} ne l'est pas non plus, ni donc $M^2 - I$. Par conséquent, cours, 1 est vp de M^2.***Attention!*** on ne peut pas en déduire 1 vp de M (pensez à $(-I)^2$). Par contre, on a un résultat qui nous dit (lisez-bien, c'est à l'envers en fait) : si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les n vp complexes (comptées avec la multiplicité), alors $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$ sont les n vp de M^2. Pour le démontrer, il suffit de trigonaliser : si $M = PTP^{-1}$, $M^2 = PT^2P^{-1}$ et sur la diagonale de T^2, il y a les vp au carré, cad les coefficients diagonaux de T au carré. ***On en déduit*** alors que ***ou*** 1 est vp de M, ***ou*** -1 est vp de M. En reprenant Q3, ce ne peut-être que 1.

Je vous démontre la question posée (en plus) à l'oral CCINP de 2021 : si M est inversible, 0 et 1 ne sont pas vp donc $M - I$ inversible aussi. En reprenant l'équation $M^4 - 2M^2 + I_n = M(M-I)(M-\alpha I)(M-\alpha' I)$ et en la multipliant par $M^{-1} \times (M-I)^{-1}$ (inutile de préciser à gauche ou à droite, toutes ces matrices, polynômes en M, commutent, il vient $(M - \alpha I)(M - \alpha' I) = M^2 + M - I = 0$. Or, par hypothèse on a $M^2 + M^{\text{T}} - I = 0$. Il suit $M^{\text{T}} = M$.

3. **Isaac Newton** : anglais (1643-1727). Partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Connu pour la formule du binôme et la méthode éponyme d'approximation des zéros d'une fonction.

Ex 65 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = 0$. Montrez que A n'a pas de valeur propre réelle, puis que n est nécessairement pair. Calculez le déterminant, la trace et le polynôme caractéristique de A.

$A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ annule le polynôme $Q = X^2 + X + 4$. Comme $\Delta = -15$, ce polynôme n'a pas de racines réelles et donc d'après un théorème $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \emptyset$ d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$. Deux méthodes pour démontrer la parité de la dimension :

Méthode1 : On sait que toute matrice ***réelle*** d'ordre impair admet ***au moins une*** valeur propre réelle. Par la ***contraposéee***, cet énoncé devient : si une matrice ***réelle*** ne possède aucune valeur propre ***réelle***, son ordre est pair.

Méthode 2 : En raisonnant dans $\mathbb{C}$, ce polynôme Q possède deux racines complexes **non réelles** conjuquées, notées α et $\overline{\alpha}$ (inutile de les expliciter pour l'instant). La matrice étant réelle, le cours nous apprend que les vecteurs propres sont « *conjugués* » (au sens des coefficients de la matrice-colonne), et comme conséquence $\dim E(\alpha) = \dim E(\overline{\alpha})$. Le polynôme $Q = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ étant scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donc $E(\alpha) \oplus E(\overline{\alpha}) = \mathbb{C}^n$.
En passant aux dimensions, il vient $n = \dim E(\alpha) + \dim E(\overline{\alpha}) = 2\dim E(\alpha)$, d'où la parité.

On pose donc $n = 2p$. α et $\overline{\alpha}$ sont chacune, racines de ***même*** multiplicité (donc p) du polynôme caractéristique. Notons que les habituelles relations coefficients-racines dans un polynôme permettent d'écrire la somme et le produit des racines sans les calculer : $S = \alpha + \overline{\alpha} = 2\Re\alpha = -1$ et $P = \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 4$. ENsuite on a :

$$\operatorname{tr} A = p\alpha + p\overline{\alpha} = pS = \boxed{\frac{-n}{2}} \qquad \det A = \alpha^p\overline{\alpha}^p = P^p = 4^p = \boxed{2^n} \qquad \chi_A(\lambda) = (X-\alpha)^p(X-\overline{\alpha})^p = \boxed{(\lambda^2+\lambda+4)^{n/2}}$$

Mines-Ponts PSI 2016 (polynôme annulateur matrice n × n) ☜ ✷

Ex 67 Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 + f^2 - \mathrm{Id}_E = 0$ et $\operatorname{tr}(f) \in \mathbb{Q}$. Montrer que n est un multiple de 3.

1) Par hypothèse, $P(X) = X^3 + X^2 - 1$ est annulateur de f. Un brève étude des variations, via $P'(X) = 3X^2 + 2X$, (je ne la reproduis pas ici), montre que P n'a qu'une seule racine réelle sur $\left]0, +\infty\right[$. On la note α. Les 2 autres sont donc complexes conjuguées, notées ω et $\overline{\omega}$. Par conséquent $\mathrm{Sp} f \subset \{\alpha, \omega, \overline{\omega}\}$ et f est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, P étant scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. On note $m = \mu(\omega)$ (qui peut-être nulle si ω n'est pas vp mais dans ce cas, par réalité, $\overline{\omega}$ ne l'est pas non plus et par diagonalisabilité, $f = \alpha\,\mathrm{Id}$). On a donc :

$$\operatorname{tr}(f) = m\omega + m\overline{\omega} + (n-2m)\alpha = 2m\Re\omega + (n-2m)\alpha \in \mathbb{Q}$$

Par le tvi, $0 < \alpha < 1$ et $\alpha \notin \mathbb{Q}$ car si $= \alpha = \frac{p}{q}$ (avec $p \wedge q = 1$, premiers entre eux, ne pas oublier cette hypoyhèse sur l'écriture d'un rationnel, assez essentielle dans les raisonnements, vous allez voir), alors $p^3 + qp^2 - q^3 = 0$ ce qui amène $p \mid q$ absurde (vous voyez?). D'autre part, formules coefficients-racines d'un polynôme, $\alpha + \omega + \overline{\omega} = -1 = \alpha + 2\Re\omega$.

Ceci amène $\operatorname{tr}(f) = -2m + \alpha(n-3m) \in \mathbb{Q}$, puis $\alpha(n-3m) \in \mathbb{Q}$ puis $n = 3m$.

Centrale PSI 2016 (matrice antisymétrique augmentée de aI) ☜

Ex 68 On considère la matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$: $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ avec $bcd \neq 0$.

1) Calculer $A + {}^tA$, ${}^tA\,A$ et $({}^tA + tI_4)(A + tI_4)$, avec $t \in \mathbb{C}$. En déduire χ_A.

2) On suppose ici $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

3) Trouver un polynôme simple annulateur de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$?

Ex 69 Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ quelconque.

1) si λ est une vp de M existe t-il P tq $P(M) = 0$ et $P(\lambda) \neq 0$?

2) si λ n'est pas une vp de M existe t-il P tq $P(M) = 0$ et $P(\lambda) \neq 0$?

3) Existe t-il P tq $P(M) = 0$ et $P(2) = 0$? et tq $P(2) = P'(2) = 0$?

1) ***Non***! puisque le cours donne : si P est annulateur de M, $\operatorname{Sp} M \subset \text{Racines}(P)$, donc, ici, λ racine de P. Allez réviser la démo du cours.

2) ***Oui!***. On sait qu'il existe toujours un polynôme annulateur en dimension finie, notons le Q.

- Si $Q(\lambda) \neq 0$, Q convient.
- Si $Q(\lambda) = 0$, soit m la multiplicité de λ, donc $Q(X) = (X-\lambda)^m R(X)$ avec $R(\lambda) \neq 0$. Q étant annulateur, on a $(M-\lambda I)^m R(M) = 0$. ***Comme*** λ ***n'est pas*** vp de M, on sait $M - \lambda I$ inversible. Par suite, en multipliant par $(M-\lambda I)^{-m}$ à gauche, on obtient $R(M) = 0$. R convient.

Remarque : Méthode alternative, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, on sait que χ_M est annulateur de M. On sait aussi que les racines de χ_M sont ***exactement*** les vp de M. Par suite $\chi_M(\lambda) \neq 0$ et χ_M convient.

3) Rappelons que $P(2) = 0$ (rp. $P(2) = P'(2) = 0$) signifie 2 racine de P, au moins de multiplicité 1, (rp. 2 racine au moins double de P), ce qui s'écrit aussi $P(X) = (X-2)Q(X)$ (rp. $P(X) = (X-2)^2 Q(X)$).

Soit P un polynôme annulateur de M (par exemple χ_M), alors le polynôme $(X-2)P(X)$ (rp. $(X-2)^2 P(X)$ convient…

Mines-Ponts PSI 2023 (équation matricielle) ✷

Ex 70 Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminez les applications $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $\alpha u^3 = \operatorname{tr}(u^2)u$.

Analyse - Réciproque :

Si $\alpha u^3 = \operatorname{tr}(u^2)u$, $u^3 = \frac{\operatorname{tr} u^2}{\alpha} u$.

- Si $\operatorname{tr}(u^2) = 0$, $u^3 = 0$ donc u nilpotente d'indice ≤ 3. Réciproquement, u^2 aura pour vp 0^2 à la multiplicité n, car 0 est la seule vp de u (les vps complexes de $P(M)$ sont les $P(\lambda)$ si λ sont celles de M, comptées avec la multiplicité), donc $\operatorname{tr}(u^2) = 0$ et égalité ok. On peut considérer que ce cas contient le cas $u = 0$
- Si $\frac{\operatorname{tr}(u^2)}{\alpha} = a^2 > 0$, $\operatorname{Sp} u \subset \{0, -a, a\}$ et u diagonalisable car $X^3 - a^2 X$ est scindé à racines simples. Notons l, m, p $(l+m+p = n)$ les multiplicités respectives (au sens large) de $0, -a, a$, multiplicité 0 indiquant non vp. Alors u^2 a pour vps 0 et a^2 de multiplicités l et $m+p$, soit $\operatorname{tr}(u^2) = (m+p)a^2$, donc $\alpha = m+p$ entier non nul dans $[\![1;n]\!]$ $(u \neq 0)$; Réciproquement, si α est ***entier*** $= q \in [\![1;n]\!]$, tout endomorphisme diagonalisable de vps a, ***réel quelconque non nul***, de multiplicité m avec $0 \leq m \leq q$, $-a$ de multiplicité $q-m$ et 0 de multiplicité $n-q$ convient puisqu'elle annulera le polynôme $X(X-a)(X+a) = X^3 - a^2 X$ avec $\operatorname{tr}(u^2) = ma^2 + (q-m)a^2 + 0 = qa^2 = \alpha a^2$
- Si $\frac{\operatorname{tr}(u^2)}{\alpha} = -a^2 < 0$, $\operatorname{Sp} u \subset \{0, -ia, ia\}$. Raisonnement similaire avec en plus $m = p$, par réalité, et donc α est ici, nécessairement, un entier pair de $[\![1;n]\!]$. Par contre ***Attention!*** à la réciproque : si α ***entier pair*** $= 2q \in [\![1;n]\!]$, tout endomorphisme ***réel*** diagonalisable dans $\mathbb{C}$ de vps ia, a ***réel quelconque non nul***, de multiplicité q, $-ia$ de multiplicité q et 0 de multiplicité $n-2q$ convient puisqu'elle annulera le polynôme $X(X-ia)(X+ia) = X^3 + a^2 X$ avec $\operatorname{tr}(u^2) = -qa^2 - qa^2 + 0 = -2qa^2 = -\alpha a^2$.

  Est-ce suffisant de dire çà (un endomorphisme réel diagonalisable dans $\mathbb{C}$) ? En passant aux matrices, on peut préciser en donnant , à une matrice inversible P près, cad à une similitude près, les matrices diagonales par blocs de blocs de taille 1 égaux à 0 et de blocs 2×2 réels ayant pour vps ia et $-ia$ $(a \neq 0)$. Par Cayley-Hamilton, ce sont toutes les matrices 2×2 de trace nulle $(-ia+ia)$ et de déterminant égal à $ia\times(-ia)=a^2$, soit $\begin{pmatrix} b & (b^2+a^2)c \\ -\frac{1}{c} & -b \end{pmatrix}$ avec $b, c \neq 0$ quelconques.

Ex 71

1) Soit $P = aX + b$ avec $a \neq 0, b$ réels. Trouvez $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $P(M) = 0$

2) Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$. Trouvez $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tq $P(M) = 0$

3) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Existe-t-il $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$?

4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Existe-t-il $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$?

1) $P(M) = 0 \iff aM + bI = 0 \iff M = \frac{-b}{a} I$.

Remarque : Plus généralement, il existe ***un*** polynôme annulateur de degré de 1 ssi M est une (matrice de) homothétie. ***Mais Attention!*** une homothétie peut annuler ***un*** polynôme annulateur qui n'est pas de degré 1 (je vous laisse y réfléchir)

2) Je rappelle que, via le théorème de Cayley-Hamilton (ou un calcul direct!), une matrice M d'ordre 2 vérifie toujours $M^2 - \operatorname{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$. L'idée est donc, ici, de trouver (en fait il y a même un ssi) une matrice vérifiant $\operatorname{tr}(M) = -\frac{b}{a}$ et $\det(M) = \frac{c}{a}$. La matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ \frac{1}{a} & -\frac{b}{a} \end{pmatrix}$ convient.

3) Soit P un polynôme quelconque complexe de degré $n \geq 1$. D'après le théorème d'Alembert-Gauss, il existe au moins une racine que l'on note ω, soit $P(\omega) = 0$. La matrice $M = \omega I$ convient. (car $P(\omega I) = P(\omega)I = 0$).

4) Si le polynôme réel admet (au moins) une racine réelle, par exemple r, comme plus haut, la matrice rI convient.

Par contre si P n'admet pas de racines réelles, c'est un peu plus compliqué. On peut commencer par remarquer que P est nécessairement de degré pair (cours de Sup) et que ses racines, « *vraies* » complexes sont 2 à 2 conjuguées, comptées avec la multiplicité. Puisque $n = 2p$, le lecteur comprendra tout seul qu'il suffit de trouver une matrice 2×2 qui convient, car alors on prendra alors la matrice diagonale par blocs $M = \operatorname{Diag}(J, \dots, J) \in \mathscr{M}_{2p}(\mathbb{R})$ en p blocs qui conviendra aussi car , si on a bien compris tous les mécanismes des polynômes de matrices :

$$P(M) = P\big(\operatorname{Diag}(J, \dots, J)\big) = \operatorname{Diag}\big(P(J), \dots, P(J)\big) = \operatorname{Diag}(0, \dots, 0) = 0$$

Notons ω une des valeurs propres complexes de P. Pour trouver une matrice J 2×2 qui convient, il suffit de trouver une matrice ***réelle*** qui a pour valeur propre ω et $\overline{\omega}$. ***Comme*** $\operatorname{tr}(J) = \omega + \overline{\omega} = 2a$ (avec $a = \Re\omega$) et $\det(J) = \omega\overline{\omega} = |\omega|^2 = b$ réel, par une méthode analogue à plus haut, la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & 2a \end{pmatrix}$ convient.

Mines-Ponts PSI 2022 (diagonalisabilité f tq f^2 projecteur) ✷

Ex 74 Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et f un endomorphisme de E tq f^2 soit un projecteur.

1) Précisez un polynôme annulateur de f.

2) Montrez il existe deux sev supplémentaires F et G stables par f tq l'endomorphisme induit par f sur F soit inversible et celui induit sur G soit nilpotent.

3) Montrez f est diagonalisable ssi $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$.

1) Un polynôme annulateur du projecteur f^2 est $X^2 - X$, donc un polynôme annulateur de f est $(X^2)^2 - X^2 = X^4 - X^2$

2) On a $X^4 - X^2 = X^2(X^2-1)$. je rappelle que tout noyau d'un polynôme en f est stable par f. POsons $F = \operatorname{Ker}(f^2 - \mathrm{Id}) = \operatorname{Ker} P(f)$ et $G = \operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} Q(f)$. On a $F \oplus G = E$:

- $F \cap G = \subset \{0\}$ car si $f^2(x) = x$ et $f^2(x) = 0$, $x = 0$!
- $F + G = E$. Dans le cas de noyaux de polynômes en f, tels que comme ici $P(X)Q(X)$ annulateur de f, l'idée est de chercher 2 polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tels que $A(X)P(X) + B(X)Q(X) = 1$: en effet, on aura alors (***Attention!*** au parenthésage) $P(f)\big(A(f)(x)\big) + Q(f)\big(B(f)(x)\big) = x$ et comme $P(f)(y) \in \operatorname{Ker} Q(f)$, et inversement, c'est gagné! (je vous laisse y réfléchir).

  Ici c'est $1 \times X^2 - 1 \times (X^2-1) = 1$

  Remarque : Evidemment, on peut plus simplement trouver la décomposition sur F et G par une analyse synthèse.

L'endomoprhisme f' induit par f sur l'ev stable $G = \operatorname{Ker} f^2$ est évidemment nilpotent car $f'^2 = 0$!
L'endomorphisme f'' induit par f sur le sev stable $F = \operatorname{Ker}(f^2 - \mathrm{Id})$ vérifie évidemment $f''^2 - \mathrm{Id}_F = 0$, n'a pas pour vp 0 et est donc inversible.

3) f est diagonalisable ssi les 2 endomorphismes induit f' et f'' sur les 2 sevs ***supplémentaires*** $F \oplus G$ le sont. Or, comme déjà vu, f'' annule $X^2 - 1$, donc l'est (c'est une symétrie de F) et f' nilpotent ne l'est jamais, sauf si $f' = 0$, ce qui se traduit par f restreint à $\operatorname{Ker} f^2$ est l'application nulle, soit $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$. Inclusion réciproque connue donc égalité

Mines-Ponts PSI 2023 (commutants) ✷

Ex 76 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-ev de dim. n, $f \in \mathscr{L}(E)$. On pose $C(f) = \{g \in \mathscr{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$, le commutant de f.

1) On suppose f possède n vp distinctes. Montrez que, pour tout $g \in C(f)$, il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tq $g = P(f)$.

2) On suppose que f est seulement diagonalisable. le résultat précédent reste-t-il vrai?

1) Je rappelle que le commutant de f est un sev de $\mathscr{L}(E)$. Se rappeler qu'il contient ***toujours*** les $P(f)$, qui forme un ev de dimension au + n par Cayley-Hamilton (vous voyez pourquoi?), et si le polynôme minimal (annulateur de degré minimum) est de degré p ($p \leq n$), c'est un sev de dimension p (vous voyez pourquoi?). La question, fréquente, est : en contient-il d'autres, que les polynômes en f? La réponse est, cela dépend..., et , au passage (ce n'est pas du cours-programme), quand il n'en contient pas d'autres, on l'appelle endomorphisme (ou matrice) ***cyclique***.

f possédant n vp distinctes est diagonalisable. En rappelant qu'un polynôme annulateur a pour racines les n vps, il est donc de degré $\geq n$ (sauf le polynôme nul). Et d'ailleurs, celui annulateur de degré minimum est de degré n et est $\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$, c'est du cours (à part le mot minimal). Soit $\mathscr{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de f, avec e_i associé à λ_i. Posons $u = e_1 + \cdots + e_n$ et considérons alors la famille $\mathscr{E} = \big(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)\big)$. C'est une base de E (démo après).

Unicité : Soient 2 polynômes P, Q de degré $\leq n-1$ vérifiant $P(f) = Q(f)$ alors $P - Q$ est un polynôme annulateur de degré $\leq n-1$, ce qui est impossible sauf le polynôme nul, soit $P = Q$

Existence : Soit g dans le commutant de f. On a $g(u)$ est un vecteur de E, il s'écrit donc dans la base $\mathscr{E}$: $g(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(u)$. Posons alors $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Alors, pour tout $1 \leq i \leq n-1$:

$$g(f^i(u)) \overset{(1)}{=} f^i(g(u)) = f^i\Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(u)\Big) \overset{(2)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{k+i}(u) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(f^i(u)) = P(f)(f^i(u))$$

- **(1)** g est dans le commutant de f
- **(2)** f est linéaire

On a donc l'égalité de g et $P(f)$ sur la base $\mathscr{E}$ de E, soit $g = P(f)$.

La matrice de passage de la base $\mathscr{F}$ à la famille $\mathscr{E}$ est la matrice de Van der Monde $\left(\lambda_i^{j-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ (je vous laisse y réfléchir) donc inversible, car les λ_i sont 2 à 2 distincts, soit $\mathscr{E}$ est une base.

Remarque : Nous venons de démontrer qu'un endomorphisme à n vps distinctes est cyclique.

2) Si f est diagonalisable (avec une vp au moins double), le résultat est en défaut. Par exemple, pour $n = 3$, on prend la matrice diagonale donc diagonalisable $D = D\text{iag}(1,2,2)$. Je vous laisse démontrer à la main que toutes les matrices 3×3 qui commutent est ensemble des matrices diagonales par blocs $D\text{iag}(\alpha, B)$ où B est une matrice 2×2 ***quelconque***. Le commutant est ici de dimension 5 : il n'est donc pas égal à l'ensemble des polynômes de D qui est de dimension ≤ 3 (et même 2 si vous avez bien compris le préambule). Il n'est pas difficile de donner un contre-exemple en dimension n quelconque, je vous laisse le faire.

Attention ! , Nous n'avons pas démontré que pour toute matrice avec une vp au moins double, le résultat est en défaut ... Ce n'était pas vraiment demandé, je pense.

Remarques

- Nous venons (presque...) de démontrer qu'un endomorphisme diagonalisable est cyclique ssi il a n vps distinctes.
- On démontre que le commutant est toujours de dimension $\geq n$ (même si le sev des polynômes en f est de dimension $< n$). En fait, le sev des polynômes en f est de dimension n ssi f est cyclique... Tout ceci, bien sûr, n'est pas du cours-programme mais « *tombe* » régulièrement.

Ex 77 ✷Soit A et B symétriques réelles tq $B = A^3$. Montrez qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(B)$

Analyse :

A et B commutent puisque $AB = A^4 = BA$. Elles sont diagonalisables, car symétriques réelles, ***donc co-diagonalisables*** (c'est l'exercice + haut ***à retenir*** pour les élèves « *ambitieux* »). Il existe alors un ***même*** $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D\text{iag}(a_1,\ldots,a_n)$ et $P^{-1}BP = D\text{iag}(b_1,\ldots,b_n)$. L'hypothèse $B = A^3$ s'écrit donc, en diagonalisant : $P^{-1}BP = (P^{-1}AP)^3 = P^{-1}A^3P$, puis $\forall 1\leq i\leq n,\ b_i = a_i^3$. Pour écrire $A = Q(B)$, ce qui équivaut, via la co-diagonalisabilité par P, à $D\text{iag}(a_i) = D\text{iag}\big(Q(a_i^3)\big)$ puis à trouver un polynôme réel Q, ou tout au moins de prouver son existence, tel que $Q(b_i) = Q(a_i^3) = a_i$.

Synthèse :

Il est inutile de s'intéresser aux a_i égaux (donc les a_i^3), alors on s'intéresse aux $i \in J \subset [\![1 ; n]\!]$ tels que les $(a_i)_{i\in j}$ soient 2 à 2 distincts. Donc par ***injectivité*** (car bijectivité) de $x \longrightarrow x^3$, on a que les $(a_i^3)_{i\in J}$ sont tous 2 à 2 distincts. On introduit alors les polynômes de Lagrange $(L_i)_{i\in J}$ associés aux $(a_i^3)_{i\in J}$ et le polynôme $Q(X) = \sum_{i\in J} a_i L_i(X)$ convient.

Centrale MP 2011 | Mines-POnts PSI 2007 ✷

Ex 78 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique χ_A. Soit B une autre matrice.

1) Etablir : A et B n'ont pas de valeur propre commune ***si et seulement si*** $\chi_A(B)$ est inversible.

2) On suppose qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle tq $AM = MB$. Montrez que A et B ont une valeur propre en commun.

Indication : On pourra d'abord montrer $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)M = MP(B)$.

1) Dans $\mathbb{C}$, χ_A est scindé : $\chi_A = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_i}$. $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{p}(B-\lambda_i I_n)^{m_i}$ est inversible (par un det) ssi ***chaque*** $B-\lambda_i I_n$ est inversible, ce qui équivaut à λ_i n'est pas vp de B, pour tout i.

2) S'il existe M tq $AM = MB$, par récurrence immédiate $A^k M = MB^k$, pour tout k entier naturel, puis avec un polynôme quelconque $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$, par sommation :

$$P(A)M = \sum_{k=0}^{p} a_k A^k M = \sum_{k=0}^{p} a_k M B^k = M \sum_{k=0}^{p} a_k B^k = MP(B)$$

L'idée est d'utiliser $P = \chi_A$ et, via le théorème de Cayley-Hamilton $\chi_A(A) = 0$, il vient $M\chi_A(B) = 0$. Par l'absurde : ***si*** A et B n'ont aucune vp en commun, $\chi_A(B)$ inversible, d'où $M = 0$, ***absurde***.

Mines-Ponts PSI 2023 (trace des puissances itérées égales) ✷

Ex 79 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k)$.

1) Montrez $\chi_A = \chi_B$.

2) A et B sont elles toujours semblables ?

1) Par sommation et linéarité, on en déduit que pour tout polynôme P, $\operatorname{tr} P(A) = \operatorname{tr} P(B)$. Je rappelle, qu'en trigonalisant dans $\mathbb{C}$, on a que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les vp de M, comptées avec la multiplicité, alors (toutes) les vp de $P(M)$ sont les $P(\lambda_i)$.

Si A possède une vp λ qui n'est pas vp de B, on construit un polynôme P tq $P(\lambda) = 1$ et P s'annule sur toutes les autres valeurs propres de A et B. On aura donc $P(B)$ de vp toutes nulles, soit $\operatorname{tr} P(B) = 0$ et $\operatorname{tr} P(A) = \mu P(\lambda) \neq 0$ où μ est la multiplicité de la vp $P(\lambda)$ de $P(A)$ (***Attention!*** ce n'est pas nécessairement la mutliplilcté de λ dans A). ***Absurde!***

Conclusion : A et B ont les mêmes vp.

Si A et B ont une vp λ qu in'est pas à la même multiplicité, soit $\mu_A \neq \mu_B$. On construit un polynôme P teq … (je vous laisse y réfléchir).

2) La réponse est non parce qu'avoir même vps est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que 2 matrices soient semblables. Elle est quand même suffisante si les n vp sont 2 à 2 distinctes ou si les deux matrices sont diagonalisables. je vous donne un exemple d'une matrice 6×6 qui a, par exemple, 2 pour vp de multiplicité 4 et 3 de multiplicité 2. Je vous écris toutes les « *possibilités* » de semblable (par une matrice triangulaire « *minimum* » de Jordan).

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

On dit qu'il y a 10 ***classes de similitude*** ; ***Attention!*** , cette façon « *différente* » de positionner les 1 est beaucoup plus complexe que vous ne le pensez. A titre d'exercice, ***classez*** ces matrices (elles ont toutes 0 vp triple) en classes de similitude (je vous laisse y réfléchir) :

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Ex 80 Montrez que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Considérons la matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $T - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comme T est triangulaire, il est immédiat que ses valeurs propres sont sur la diagonale et donc : 1 de multiplicité 2 et 2 valeur propre simple. Il est aussi clair que $\operatorname{rg}(I - T) = 2$, soit $\dim E(1) = \dim \operatorname{Ker}(I - T) = 1$ (et donc d'ailleurs, T non diagonalisable). ***Dans le cours***, on sait que si une matrice est semblable à T, elle a les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités, ***mais ce n'est pas suffisant***. En fait, il suffirait de vérifier que l'espace propre de A associé à 1 a même dimension que T, cad 1, ***mais ce n'est pas du cours***. On va donc procéder autrement, et dans ce genre de situations, c'est une analyse-synthèse où on recherche une base adaptée à ce « *changement de bases implicite* ».

Analyse :

Si A est semblable à T et soit $a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A, alors ***on sait*** qu'il existe une base $e_1, \ldots, e_3$ de $\mathbb{R}^3$ telle que T est la matrice de a dans cette base, cad : $a(e_1) = e_1 \quad a(e_2) = e_1 + e_2 \quad a(e_3) = 2e_3$.
On en tire immédiatement, e_1 vecteur propre associé à 1 et e_3 vecteur propre associé à 2. Ensuite on écrit (c'est ca qu'il faut avoir déjà vu une fois, et on « *procède* » toujours de manière plus ou moins analogue) :

$$a(e_2) - e_2 = e_1 \Longrightarrow (a - Id)(e_2) = e_1 \textbf{ puis } (a - Id)(e_1) = 0 = (a - Id)^2(e_2)$$

Conclusion :, on « *prend* » $e_2 \in \operatorname{Ker}(a - Id)^2$ ***mais pas dans*** $\operatorname{Ker}(a - Id)$ (sinon $e_1 = 0$). On rappelle $\operatorname{Ker}(a - Id) \subset \operatorname{Ker}(a - Id)^2$. On « *prend* » ensuite $e_1 = (a - Id)(e_2)$. Il ***faut comprendre*** que l'analyse est terminée...

Synthèse :

• On prend e_3 vecteur propre associé à 2. On aura donc bien $a(e_3) = 2e_3$. ***Il faut quand même vérifier*** que c'est ***possible***, cad 2 est bien valeur propre de A. On calcule le polynôme caractéristique de A, je ne le fais pas ici, de toute façon , on va trouver $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)$. ...
• On prend $e_2 \in \operatorname{Ker}(a - \mathrm{Id})^2 \smallsetminus \operatorname{Ker}(a - \mathrm{Id})$, puis $e_1 = (a - \mathrm{Id})(e_2)$. On aura donc bien $a(e_2) = e_1 + e_2$, puis comme $(a - Id)(e_1) = (a - Id)^2(e_2) = 0$, on aura bien $a(e_1) = e_1$. Reste, aussi, ***à vérifier que c'est possible***. Il faudra donc ***avoir*** 1 valeur propre et $\operatorname{Ker}(a - Id) \not\subset \operatorname{Ker}(a - Id)^2$. 1 vp, on l'a au-dessus et pour le reste, on considère (je vous laisse calculer les 2 noyaux) :

$$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

• On terminera en ***vérifiant*** que (e_1, e_2, e_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
Méthode 1 : plus simple : on calcule ***explicitement*** deux vecteurs e_3 et e_2 comme indiqué plus haut, puis le e_1, et on vérifie base par un $\det 3 \times 3 \neq 0$.
Méthode 2 : méthode alternative, plus délicate mais plus élégante et sans calcul explicite des e_i,, en rappelant que $\operatorname{Ker}(I_3 - A) \oplus \operatorname{Ker}(2I_3 - A) \subsetneq \mathbb{R}^3$ car A non diagonalisable, on établit que, par contre, $\operatorname{Ker}(I_3 - A)^2 \oplus \operatorname{Ker}(2I_3 - A) = \mathbb{R}^3$ (je ne le démontre pas). On aura donc bien base par supplémentarité (je vous laisse y réfléchir).

Mines-Ponts PSI 2019 (trigonalisation matrice 3×3) ✌

Ex 81 Pour $c\in\mathbb{R}$, on note $A(c)=\begin{pmatrix}-c & -1 & c\\ -1 & 1-c & 1\\ c & -1 & -c\end{pmatrix}$

1) Déterminez les réels c tels que $A(c)$ ne soit pas diagonalisable.

2) Soit d la plus petite de ces valeurs. Trouvez P tel que $P^{-1}A(d)P$ soit triangulaire.

1) On calcule le polynôme caractéristique (je ne mets pas les détails ici) $\chi_A(x)=x^3+(3c-1)x^2+2(c^2-c)$ On peut toujours considérer la somme et le produit des 2 racines autres que 0 : $S=1-3c$ et $P=2(c^2-c)$. Vous trouvez? On peut trouver... sinon vous faites un discriminant. Je ne mets pas les détails non plus , on trouve $-2c$ et $1-c$. on examine les « *deux* » cas usuels :

- Les 3 vp sont 2 à 2 ***distinctes*** ce qui amène A diagonalisable. Cela correspond à $-2c\neq 0,\ -2c\neq 1-c,\ -2c\neq 1-c$ soit $c\notin\{-1,0,1\}$
- Si $c=0$, 0 est de multiplicité 2, il faut regarder le $\operatorname{rg} A$ qui est immédiatement 2, donc A n'est pas diagonalisable.
- Si $c=1$, 0 est de multiplicité 2 aussi et $\operatorname{rg} A=2$, A n'est pas diagonalisable.
- Si $c=-1$, 2 est de multiplicité 2 et $2I-A=\left(\begin{smallmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$. $\operatorname{rg}(2I-A)=2$, A n'est pas diagonalisable

Conclusion : A n'est pas diagonalisable ssi $c\in\{-1,0,1\}$

Remarque : Pour ces 3 valeurs de c, le polynôme caractéristique étant ***scindé sur*** $\mathbb{R}$, A est trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

2) si $c=-1$, 0 est vp simple et 2 vp double. On remarque $C_1=-C_3$ qui amène $u=(1,0,1)\in\operatorname{Ker} A$ et pour des raisons de dimension égale à 1, l'égalité $E(0)=\operatorname{Ker}(A)=\operatorname{Vect}(1,0,1)$. La matrice $2I-A$ écrite plus haut montre $C_1-2C_2+C_3=0$ qui par un raisonnement analogue amène $E(2)=\operatorname{Vect}(1,-2,1)$ (on pourrait bien sûr résoudre le système 3×3 comme méthode alternative). On pose $v=(1,-2,1)$. On complète par $w=(0,0,1)$ qui amène $\mathscr{F}=(u,v,w)$ base de $\mathbb{R}^3$ (on laisse au lecteur le soin de vérifier que c'est bien une base, par un déterminant par exemple).

On pose alors $P=P_\varepsilon^{\mathscr{F}}=\left(\begin{smallmatrix}1&1&0\\0&-2&0\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$, avec ε base canonique de $\mathbb{R}^3$ et a l'endomorphisme canoniquement associé à A. La formule de changement de bases amène :

$$P^{-1}AP=\left(P_\varepsilon^{\mathscr{F}}\right)^{-1}\operatorname{Mat}(a,\varepsilon)\,P_\varepsilon^{\mathscr{F}}=\operatorname{Mat}(a,\mathscr{F})=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&2&b\\0&0&c\end{pmatrix}$$

Les 2$^{\text{re}}$ colonnes se justifient par $a(u)=0.u$ et $a(v)=2.v$. Pour calculer la 3$^{\text{e}}$ colonne de cette dernière matrice, cad le (a,b,c), il faut d'abord calculer $a(w)$ qui, d'ailleurs, n'est pas à calculer! puisqu'on a ***pris soin*** de compléter par le 3$^{\text{e}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$, son image est ***donc*** la 3$^{\text{e}}$ colonne de A, soit $a(w)=(-1,1,1)$. ***L'erreur*** est ensuite de mettre ces 3 composantes à la place de (a,b,c) car ce sont les ***coordonnées*** dans la base ε et on cherche celles dans la $\mathscr{F}$. On résoud un petit système :

$$(-1,1,1)=a(1,0,1)+b(1,-2,1)+c(0,0,1)\iff\left\{\begin{array}{rcl}a+b&=&-1\\-2b&=&1\\a+b+c&=&1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}a&=&-\frac12\\b&=&-\frac12\\c&=&2\end{array}\right.$$

Remarque : $c=2$ était « *prévisible* », il n'y avait pas besoin de le calculer, pourquoi?

a

Ex 83 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et ϕ une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$. On note H le noyau de ϕ. Montrez que H est stable par f ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \phi \circ f = \lambda\phi$. *Application :* cherchez tous les ev stables par la matrice du Q3.

On démontre les 2 implications :

On suppose $\phi \circ f = \lambda\phi$. Soit $x \in H = \operatorname{Ker}\phi$ et montrons $f(x) \in H : \phi(f(x)) = \lambda\phi(x) = 0$. Ok.

On suppose H hyperplan stable par f, cad $f(H) \subset H$. $\phi \circ f$ est donc une forme linéaire qui s'annule sur H. Comme toutes les formes linéaires qui s'annulent sur un même hyperplan H sont colinéaires (de la même façon que toutes leurs équations sont colinéaires), il existe un scalaire λ tel que $\phi \circ f = \lambda\phi$. Si $\phi \circ f$ s'annule sur E tout entier, le résultat reste valide avec $\lambda = 0$.

Soit $\mathscr{E}$ une base de E. La matrice de ϕ dans cette base (comme ϕ va de E dans $\mathbb{R}$) est une matrice-ligne $X = \begin{pmatrix} a_1 \dots a_n \end{pmatrix}$ et d'ailleurs l'équation de l'hyperplan dans cette base est $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Matriciellement, si on note M la matrice de f dans la base $\mathscr{E}$, l'équation plus haut s'écrit :

$$XM = \lambda X \iff ({}^{\mathrm{T}}XM) = \lambda X^{\mathrm{T}} \iff M^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}} = \lambda X^{\mathrm{T}}$$

Ceci équivaut à X^{T} vecteur propre de M^{T}. Bref, trouver les hyperplans stables par f (représenté par la matrice M) ***équivaut*** à chercher les vecteurs propres $(a_1, \dots, a_n)$ de la ***transposée*** M^{T} et alors ce seront les ***hyperplans d'équations*** $a_1x_1 + a_nx_n = 0$! Résultat que les élèves « *ambitieux* » peuvent retenir.

Mettons ceci en pratique sur la matrice (3,3) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle qu'une droite est stable ssi elle est dirigée par un vecteur propre (cours). L'espace nul $\{0\}$ et l'espace tout entier $\mathbb{R}^3$ sont évidemment stables. Remarquons aussi qu'ici les plans sont des hyperplans…
Je ne mets pas ici le détail de calcul des éléments propres : 1 est valeur propre double associé au plan $x + y + z = 0$ dont une base est $\big((1,-1,0),(1,0,-1)\big)$ et 4 valeur propre associé à $\operatorname{Vect}(1,1,1)$? Comme $M^{\mathrm{T}} = M$, les espaces propres sont les mêmes.

- les droites stables par M sont toutes les droites dirigées par les vecteurs $(1,1,1)$ ou $(a+b,-a,-b)$ avec a, b réels.
- les plans stables sont les plans d'équations (on se sert des vecteurs propres de la transposée qui ***ici*** sont les mêmes mais ce n'est pas le cas en général ou on fait un deuxième calcul). Donc les plans stables sont les plans (hyperplans) d'équation $x + y + z = 0$ et $(a+b)x - ay - bz = 0$.

a

Mines-Ponts PSI 2023 (trace des puissances itérées égales) ✷

Ex 86 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k)$.

1) Montrez $\chi_A = \chi_B$.

2) A et B sont elles toujours semblables ?

1) Par sommation et linéarité, on en déduit que pour tout polynôme P, $\operatorname{tr} P(A) = \operatorname{tr} P(B)$. Je rappelle, qu'en trigonalisant dans $\mathbb{C}$, on a que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les vp de M, comptées avec la multiplicité, alors (toutes) les vp de $P(M)$ sont les $P(\lambda_i)$.

Si A possède une vp λ qui n'est pas vp de B, on construit un polynôme P tq $P(\lambda)=1$ et P s'annule sur toutes les autres valeurs propres de A et B. On aura donc $P(B)$ de vp toutes nulles, soit $\operatorname{tr} P(B)=0$ et $\operatorname{tr} P(A)=\mu P(\lambda)\neq 0$ où μ est la multiplicité de la vp $P(\lambda)$ de $P(A)$ (***Attention!*** ce n'est pas nécessairement la mutliplilcté de λ dans A). ***Absurde!***

Conclusion : A et B ont les mêmes vp.

Si A et B ont une vp λ qu in'est pas à la même multiplicité, soit $\mu_A\neq\mu_B$. On construit un polynôme P teq … (je vous laisse y réfléchir).

2) La réponse est non parce qu'avoir même vps est une condition nécessaire mais pas suffisante pour que 2 matrices soient semblables. Elle est quand même suffisante si les n vp sont 2 à 2 distinctes ou si les deux matrices sont diagonalisables. je vous donne un exemple d'une matrice 6×6 qui a, par exemple, 2 pour vp de multiplicité 4 et 3 de multiplicité 2. Je vous écris toutes les « *possibilités* » de semblable (par une matrice triangulaire « *minimum* » de Jordan).

$$\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&1&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&0\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&0&0&0\\0&2&0&0&0&0\\0&0&2&1&0&0\\0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&3&1\\0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}$$

On dit qu'il y a 10 ***classes de similitude*** ; ***Attention!*** , cette façon « *différente* » de positionner les 1 est beaucoup plus complexe que vous ne le pensez. A titre d'exercice, ***classez*** ces matrices (elles ont toutes 0 vp triple) en classes de similitude (je vous laisse y réfléchir) :

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Centrale PSI 2023 (polynôme annulateur de degré quelconque) ✷

Ex 88 Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $f\in\mathscr{L}(E)$. On suppose il existe $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a\neq b$ tq $(f-a\mathrm{Id})\circ(f-b\mathrm{Id})=0$.

1) Déterminez $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tq $\lambda(f-a\mathrm{Id})$ et $\mu(f-b\mathrm{Id})$ soient des projecteurs.

2) Montrez $\operatorname{Ker}(f-a\mathrm{Id})=\operatorname{Im}(f-b\mathrm{Id})$.

3) Déterminez f^n pour $n\in\mathbb{N}$.