Classe de PSI

Feuille d'Exercices 5

Réduction

Eléments propres de matrices

Eléments propres : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'un réel λ est une ***valeur propre*** de M ssi il existe une matrice-colonne ***non nulle*** $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $MX = \lambda X$. X est alors appelé ***vecteur propre*** de M associé à λ.
L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ (en y ajoutant le vecteur nul) est un ***espace vectoriel***, c'est $\operatorname{Ker}(\lambda I_n - M)$. On l'appelle ***espace propre*** associé à λ. On le note $E(\lambda)$.

Polynôme Caractéristique : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Les valeurs propres de M (rp. de u) ***sont exactement les racines*** du polynôme $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$.
χ_M est un polynôme ***unitaire*** de degré n appelé ***polynôme caractéristique*** de M. Il vérifie :

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^n - \operatorname{tr} M\, \lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det M$$

Si $n = 2$, $\chi_M(\lambda)$ est ***entièrement déterminé*** par la trace et le déterminant : $\chi_M(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr} M\, \lambda + \det M$

Propriétés : Comme les valeurs propres sont ***les racines d'un polynôme***, il découle des théorèmes sur les racines d'un polynôme vus en Sup, les théorèmes suivants : toute matrice d'ordre n

- Possède ***exactement*** n valeurs propres ***complexes*** comptées ***avec*** la multiplicité.
- Possède ***au plus*** n valeurs propres réelles
- Si la matrice est ***réelle***, les valeurs propres ***(« vraies ») complexes*** sont 2 à 2 conjuguées avec la multiplicité.
- Si la matrice est ***réelle et d'ordre impair***, elle a (au moins) une valeur propre ***réelle***.
- Si le ***polynôme caractéristique*** s'écrit avec la ***multiplicité*** $\chi_M(\lambda) = \prod_{i=1}^{p}(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$, alors la dimension de l'espace propre $E(\lambda_i)$ associé à λ_i vérifie $1 \le \dim E(\lambda_i) \le m_i$.

Ex 1 ✌✍ On pose $A = \begin{pmatrix} c & 0 & a \\ 2 & b & -1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) CNS pour que A admette $(1, -1, 1)$ comme vecteur propre ?

2) CNS pour que A admette 1 pour valeur propre ?

Ex 2 ✌Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comparez le spectre de A et celui de $M = \alpha A + \beta I_n$.

Ex 3 ✍ ✌Calculez les éléments propres de $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

IMT PSI 2022 (diagonalisabilité matrice $n \times n$) ✍
Ex 4 Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ij} = ij$ pour $1 \le i, j \le n$. Déterminez les éléments propres de A

Ex 5 ✌Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculez son polynôme caractéristique et en déduire $\exists X \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R}) \neq 0$ tq $XA = -X$

CCP PSI 2018-2017 (matrice par blocs 2×2) ✍
Ex 6

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle ~~diagonalisable ?~~ inversible ? Déterminez ses éléments propres.

2) Déterminez les éléments propres de la matrice $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$

IMT 2022 | CCP (Polynome caractéristique de l'inverse) ✍
Ex 7 Soit $A \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$. Exprimez $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

CCP PSI 2014 (valeurs propres d'une matrice $n \times n$) ✷✍
Ex 8 Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice réelle carrée d'ordre n qui a $1, 2, \dots, n$ sur la dernière ligne et dernière colonne et des 0 ailleurs.

Ex 9

1) Que peut-on dire des vp de A^2 par rapport à celles de A?

2) Montrez que la matrice $Diag(-1,0,0)$ n'a pas de racine carrée dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3) Montrez qu'elle en a une infinité dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Ex 10 ✷✍ Etablir que toute matrice stochastique (cad réelle telle que $\forall 1 \le i \le n \quad \sum_{j=1}^{n} M_{ij} = 1$ et $M_{ij} \ge 0$) admet des valeurs propres complexes de module inférieur ou égal à 1.

Eléments propres d'endomorphismes Particuliers / Numériques

Eléments propres : Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une ***valeur propre*** de u ssi il existe un vecteur x de E ***non nul*** tel que $u(x) = \lambda\, x$.
L'ensemble des vecteurs propres associés à une valeur propre λ (en y ajoutant le vecteur nul) est un ***sous-espace vectoriel*** de E, c'est $\operatorname{Ker}(\lambda Id - u)$. On l'appelle ***espace propre*** associé à λ.

Propriétés :

- 0 est valeur propre de u ***ssi*** $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$ ***ssi (en dim. finie)*** u non inversible ***ssi*** $\det u = 0$.
- λ est valeur propre de u ***ssi*** $\operatorname{Ker}(\lambda Id - u) \neq \{0\}$ **ssi** (en dim. finie) $\lambda Id - u$ ***non inversible***.

Ex 11 ✌✍ Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrez $\operatorname{Sp} u = \{0\}$

IMT PC 2016 (endomorphisme de matrices) ✌✍

Ex 12 On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ d'expression $\phi(M) = M - \operatorname{tr}(M) I_n$.

1) Déterminer les éléments propres de ϕ. ~~L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?~~

2) Déterminer sa trace, son déterminant et son polynôme caractéristique

CCP PC 2011-2010 (endomorphisme de polynômes) ✍

Ex 13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto P(-4)X + P(6) \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le noyau, l'image, les valeurs propres et les sous-espaces propres de u. ~~L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?~~

Mines-Ponts PSI 2023-2022 (équation fonctionnelle aux valeurs propres) ✷☜✍

Ex 14 Soient E le $\mathbb{R}$-ev des fonctions de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, p et q deux réels avec $p + q = 1$ et $p \in]-1,0[\cup]0,1[$. On pose $u(f) = g$ avec $g : x \longrightarrow f(px+q)$

1) Montrez que u est un automorphisme de E.

2) Montrez que les vp de u sont dans $]-1,1]$

3) Montrez que si f est vecteur propre de u, il existe un entier k tq $f^{(k)} = 0$. En déduire l'ensemble des vecteurs propres de u. [**2022 :** Question absente] .

4) Calculez $u^n(f)(x)$ par récurrence. [**2022 :** Question absente] .

CCP PSI 2015-2014 (endomorphisme de fonctions) ✍

Ex 15 On note $E = C^\infty\left(\mathbb{R},\mathbb{R}\right)$ et ϕ l'application de E dans E qui à f associe g définie par $g(x) = f'(x) - x f(x)$.

1) Montrez ϕ endomorphisme.

2) Donnez valeurs propres et vecteurs propres de ϕ.

3) Donnez $\operatorname{Ker}\phi^2$.

Mines-Ponts PSI 2023 (endomorphisme de fonctions) ✷

Ex 16 On n ote E l'ev des fonctions continues 1-périodiques à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit > T l'opérateur défini par $\forall f \in E, \forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$.

1) Montrez T endomorphisme de E.

2) Montrez que si m est vp de T, alors $|m| \le 1$. Etudiez le cas $|m| < 1$.

CCP PSI 2013 (endomorphisme de suites) ✷✍

Ex 17 Soit $f : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, u \to v$ où $u_0 = v_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. On admet $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^{\mathbb{N}})$. Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de f.

Centrale PSI 2023 (endomorphisme de polynômes) ✍

Ex 18 Soit E l'ev des fonctions polynomiales. Si $P \in E$, on pose $L(P): x \longrightarrow e^{-x}\int_{-\infty}^{x} P(t)e^{t}\,dt$.

1) Montrez L endomorphisme de E.

2) Trouvez les éléments propres de L.

Ex 19 ✍ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f dans $\mathscr{L}(E)$ et $\Phi\colon\ u \in \mathscr{L}(E) \mapsto f \circ u \in \mathscr{L}(E)$.

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{L}(E)$.

2) Montrer que u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ si et seulement si $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{Id})$.

Diagonalisabilité de Matrices

Définition : $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, carrée d'ordre n, est dite ***diagonalisable*** ssi il existe une matrice ***inversible*** $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$, telle que $P^{-1}MP = D$ où D est une matrice ***diagonale***, cad M est ***semblable*** à une matrice ***diagonale***.

Diagonalisabilité sur le polynôme caractéristique :
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ matrice carrée, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est diagonalisable ssi les ***deux propriétés*** suivantes sont vérifiées :
(i) Le polynôme caractéristique de M ***est scindé sur*** $\mathbb{K}$(toujours vrai sur $\mathbb{C}$). Il s'écrit donc :
$\chi_M(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \times \cdots \times (\lambda-\lambda_p)^{m_p}$ où les λ_i sont 2 à 2 distincts et $m_i \geq 1$ est la ***multiplicité*** de λ_i.
(ii) Pour ***chaque valeur propre*** λ_i de M, on a $\dim E(\lambda_i) = m_i$ (sachant qu'on a ***toujours*** $\dim E(\lambda_i) \leq m_i$)

Conditions Suffisantes de Diagonalisabilité :

- ***Si*** la matrice M est ***symétrique réelle***, elle est diagonalisable. (***Attention ! pas*** une matrice complexe).
- ***Si*** la matrice M possède n ***valeurs propres distinctes***, cad χ_M ***scindé à racines simples***, elle est diagonalisable.

IMT PSI 2016 (matrices 3 × 3) ✌✍

Ex 20 Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1) Trouver les valeurs propres de f. Est-il diagonalisable ?

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Trouver les valeurs propres de $g = af + b\operatorname{Id}$.

3) À quelles conditions sur (a,b) l'endomorphisme g est-il bijectif ?

Ex 21 ✌Montrez que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. est diagonalisable. Diagonalisez-la.

Ex 22 ✌Donnez une CNS pour que la matrice triangulaire $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Ex 23 ✍ ✌On suppose $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Mz la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ diagonalisable.

CCINP PSI 2022 (diagonalisabilité matrice 3 × 3)

Ex 24 Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculez le polynôme caractéristique puis étudiez la diagonalisabilité de $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Centrale PSI 2023 (matrice 3x3) ✷

Ex 25 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrez A a une vp double $a > 0$ et un vp simple $b > 0$. A est-elle diagonalisable ?

2) soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2.Montrez il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_2[X]$ tq $P_f(a) = f(a)$, $P_f(b) = f(b)$, $P_f'(a) = f'(a)$.

3) Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$, on pose $f(A) = P_f(A)$. Calculez $f(A)$ dans les cas où $f: x \to x^2$, puis $f: x \to x^3$.

4) Désormais on prend $f: x \to \frac{1}{x}$. Conjecturez la valeur de $Af(A)$ et prouvez cette conjecture.

Ex 26 Donnez 8 « racines-carrées réelles » de $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

CCINP PSI 2022 (matrice par blocs) ✍

Ex 27 Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$

1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrez que $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P(A) \\ 0_n & 0_n \end{pmatrix} + P(0)\begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$

2) En déduire le rang de la matrice B en fonction de celui de A.

3) On suppose A diagonalisable. Montrez B est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres.

Mines-Ponts PSI 2023 (diagonalisabilité matrice par blocs) ✷

Ex 28 Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs $B = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}$

1) Etablir une relation entre le polynôme caractéristique de B et celui de A.

2) Soit λ un réel. Montrez $\dim \operatorname{Ker}(B - \lambda I_{2n}) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda^2 I_n)$.

3) Etablir une CNS sur A pour que B soit diagonalisable.

Mines-Ponts PC 2014 (matrice 3×3) ✷✍

Ex 29 Soit $z \in \mathbb{C}$. Donner une CNS sur z pour que A soit diagonalisable. $A = \begin{pmatrix} 0 & z & z \\ 1 & 0 & z \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

CCINPBQ MP 2021-2011 (diagonalisabilité matrice 3×3) ✍

Ex 30 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Ex 31 On se donne $A = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$ Diagonalisez $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

CCINP PSI 2022-2014 (racine carrée d'une matrice)

Ex 32 On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

1) A est-elle diagonalisable ? Trouvez les éléments propres de A. [**2014 :** on utilisera le calcul de $C_1 - C_2 - C_3$.]

2) Trouvez $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$

3) Montrez que toutes les matrices R tq $R^2 = A$ sont diagonalisables.

X PSI 2022 | Mines-Ponts PSI 2017 (diagonalisabilité matrice $n \times n$) ✷✍

Ex 33

Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par $c_{ij} = j + n(i-1)$ pour $1 \le i, j \le n$. [**Mines :** $C = A + nB$ avec $A = (j)_{1 \le i,j \le n}$, $B = (i-1)_{1 \le i,j \le n}$] .

1) Déterminez le rang de C.

2) La matrice C est-elle diagonalisable ?

Centrale PSI 2022 (matrice circulante) ✍

Ex 34 Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} e^{i\theta} \\ e^{2i\theta} \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{in\theta} \end{pmatrix}$$

1) Exprimez A comme polynôme en J

2) Montrez J diagonalisables dans $\mathbb{C}$. Déterminez une CNS pour que V soit vecteur propre de J.

3) Montrez A diagonalisable ds $\mathbb{C}$. Exhiber $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ tq $P^{-1}AP$ est diagonale. En déduire expression de $\det A$.

Ex 35 Pour $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, soit $A(a,b,c,d) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le polynôme caractéristique de $A(a,b,c,d)$.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. La matrice $A(x, -x^2, x^3, 0)$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

Ex 36 ✍ Calculez A^n, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 37 ✍ On se donne une matrice B par blocs égale à $B=\begin{pmatrix}A & O\\ A & A\end{pmatrix}\in M_{2n}(\mathbb{C})$

1) Explicitez B^n puis $P(B)$ pour tout $P\in\mathbb{C}[X]$.

2) ✷ Etablir B est diagonalisable $\Longleftrightarrow A=O$ *(Que remarque t-on dans la Q1 ?)*

CCP PSI 2011 (Equation matricielle) ✷✍
Ex 38 Trouvez les $M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tq $M^3-2M=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 10 & 4\end{pmatrix}$

Mines-Ponts PSI 2023 (matrice stochastique 3x3) ✷
Ex 39 Soit $M=\begin{pmatrix}1/2 & 1/4 & 1/4\\ 1/4 & 1/3 & 5/12\\ 1/4 & 5/12 & 1/3\end{pmatrix}$.

1) Montrez M diagonalisable et donnez ses éléments propres.

2) Montrez que (M^n) tend vers une matrice N à préciser.

3) Montrez que N est la matrice d'un projecteur que l'on précisera.

Diagonalisabilité Endomorphismes Particuliers / Numériques

Définition : $u\in\mathscr{L}(E)$, avec E $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, est dit ***diagonalisable***
ssi il existe une ***base*** $\mathscr{E}=(e_1,\dots,e_n)$ de E constituée uniquement de ***vecteurs propres de*** u, cad tq $u(e_i)=\lambda_i e_i$
ssi, de ***manière équivalente***, il existe une base ***dans*** laquelle la matrice de u est ***diagonale***.

Diagonalisabilité d'un endomorphisme et Somme de ses espaces propres :
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n dont ***toutes les valeurs propres distinctes*** sont notées $\lambda_1,\dots,\lambda_p$. Alors u est diagonalisable ssi l'une des propriétés ***équivalentes suivantes*** est vérifiée :
(i) $\dim E(\lambda_1)+\cdots+\dim E(\lambda_p)=n$ (ou $\dim\ \mathrm{Ker}(u-\lambda_1 Id)+\cdots+\dim\ \mathrm{Ker}(u-\lambda_p Id)=\dim E$).
(ii) $E(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_p)=E$ (ou $\mathrm{Ker}(u-\lambda_1 Id)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Ker}(u-\lambda_p Id)=E$)

Mines-Telecom MP 2018 | Mines-Ponts PSI 2013 (endomorphisme de polynômes) ✌✍
Ex 40 Soient $E=\mathbb{R}_n[X]$, $A\in E$ tel que $\displaystyle\int_0^1 A(t)\,dt\neq 0$ et $u:P\in E\to A\displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt-P\int_0^1 A(t)\,dt$.
Montrez $u\in\mathscr{L}(E)$ et déterminez ses éléments propres. u diagonalisable?

CCP PSI (endomorphisme de matrices) ✍
Ex 41 Soient A et B deux matrices carrées non nulles réelles d'ordre n. On définit ϕ sur $M_n(R)$ par $\phi(M)=M+\mathrm{tr}(AM)B$. CNS pour que ϕ soit diagonalisable?

Ex 42 ✷✍ Soient une décomposition en somme directe $E_1\oplus\cdots\oplus E_n=E$, les projecteurs associés $(p_i)_{1\le i\le n}$ et n scalaires $a_1,\dots,a_n$. Montrez que $f\in\mathscr{L}(E)$ défini par $f=a_1p_1+\cdots+a_np_n$ est diagonalisable.
Précisez son polynôme caractéristique. (*On pourra considérer la restriction à E_i*)

Ex 43 ✍ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. On suppose $f(e_1)=f(e_2)=\cdots=f(e_n)=v$ avec $v\in E$. Discutez la diagonalisabilité de f.

Ex 44 ✷ $u\in\mathscr{L}(E)$ est diagonalisable ssi l'endomorphisme induit sur $\mathrm{Im}\,u$ est diagonalisable.

CCP PSI 2022-2021 -2019 (diagonalisabilité endomorphisme) ✍
Ex 45
Soient E un ev de dimension n, l une forme linéaire non nulle sur E et $a\neq 0\in E$. On pose$f:x\in E\longrightarrow l(a)x-l(x)a$.

1) Montrez f endomorphisme de E. Calculez $f(a)$.

2) [**2019 :** Déterminez $\mathrm{Ker}(f)$ et calculez $f(\mathrm{Ker}\,l)$] .

3) Calculez les éléments propres. L'endomorphisme f est-il diagonalisable? [**2021 :** *Ind.* : distinguer les cas $l(a)=0$ et $l(a)\neq 0$]

4) [**2021,2019 :** On suppose $l(a)=0$. Calculez f^2, en déduire un polynôme annulateur de f. Retrouvez le résultat de Q4)]

Ex 46 ✷✍ On se donne deux endomorphismes diagonalisables u et v d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie tels que $u\circ v=v\circ u$ Prouvez qu'ils sont co-diagonalisables. *(On dit aussi diagonalisables dans une même base ou au travers d'une même matrice de passage)*

Ex 47 Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension 4. Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 des endomorphismes de E tels que $f_1+f_2+f_3+f_4=\mathrm{Id}_E$ et $f_i\circ f_j=0$ si $i\neq j$.

1) Montrez que les f_i sont des projecteurs.

2) Montrez $\mathrm{Im}\, f_1\oplus \mathrm{Im}\, f_2\oplus \mathrm{Im}\, f_3\oplus \mathrm{Im}\, f_4=E$.

3) Montrer que $g=3f_1+f_2-2f_3+5f_4$ est diagonalisable et $\mathrm{Sp}\, g=\{3,1,-2,5\}$

Mines-Ponts PSI 2022 | Centrale PSI 2005 (endomorphisme division euclidienne) ✷✍

Ex 48 Soit u défini sur $\mathbb{R}_3[X]$ par $u(P)$ est le reste dans la division euclidienne de $(X^4-1)P(X)$ par X^4-X.

1) Montrez que u est un endomorphisme

2) Donnez $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{rg}\, u$. [**Centrale :** Donnez aussi $\mathrm{Im}\, u$] .

3) u est-il diagonalisable? [**Centrale :** En plus, donnez $\mathrm{Sp}\, u$] .

Ex 49 On définit $\varphi\in L(M_n(\mathbb{R}))$ par : $\forall M\in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M)=2M+{}^tM$.

1) Montrer que $\varphi^2=4\varphi-3\,\mathrm{Id}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

2) Déterminer les vp de φ, les sepropres, la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de φ.

3) Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $\varphi_{a,b}:M\mapsto aM+b\,{}^tM$. Donner une CNS sur (a,b) pour que $\varphi_{a,b}$ soit inversible.

CCINP PSI 2023-2022-2021 (endomorphisme de matrices) ✍

Ex 50 Soit $a,b\in\mathbb{R}^{+*}$ et $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $\forall M\in E,\ u(M)=aM+bM^{\mathrm{T}}$.

1) Montrez que u est un endomorphisme.

2) Trouvez un polynôme annulateur de u de degré 2.

3) Montrez que u est diagonalisable et déterminez ses valeurs propres.

4) Calculez $\mathrm{tr}\, u$ et $\det u$.

Ex 51 ✍ On se place dans un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie E

1) ✌On suppose f diagonalisable. Montrez f^2 diagonalisable. Montrez que la réciproque est fausse.

2) ✷On considère ici un endomorphisme f tel que f^2 est diagonalisable. Etablir f est diagonalisable $\iff$ $\mathrm{Ker}\, f=\mathrm{Ker}\,(f^2)$ *(Indication : utilisez les polynômes annulateurs)*

Centrale PSI 2023 (matrice 2x2 à coefficients entiers) ✷

Ex 52 Soit $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

1) On suppose A inversible. Montrez $A^{-1}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ ssi $\det A\in\{-1,1\}$.

2) On suppose il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tq $A^p=I_2$. Montrez que A est inversible, et que A^{-1} est à coefficients entiers. Montrez qu'il n'existe qu'un nombre fini de polynômes caractéristiques possibles pour A.

Ex 53 ✍ ✷Soit V un ev de dimension n, $f\in\mathcal{L}(V)$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(V)$ tel que : $u\to f\circ u$

1) Montrez $\mathrm{Sp}\,\phi=\mathrm{Sp}\, f$

2) Dimension de $\mathrm{Ker}\,(\phi-\lambda Id)$ en fonction de $\mathrm{Ker}\,(f-\lambda Id)$

3) Montrez ϕ diagonalisable ssi f diagonalisable.

Polynômes annulateurs Particuliers / Numériques

Valeurs propres et polynôme annulateur : Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et P un ***polynôme annulateur*** de u, cad $P(u)=0$. Alors les valeurs propres de u sont ***parmi*** les racines du polynôme, ou autrement dit, $\mathrm{Sp}\,(u)\subset \mathrm{Racines}(P)$

Diagonalisabilité par un polynôme annulateur :
Soit u un endomorphisme. Alors u est ***diagonalisable*** ssi il ***annule un*** polynôme ***scindé à racines simples.***

Ex 54 ✌Soit $A\neq 0\in M_n(\mathbb{R})$ de polynôme annulateur $X(X+2)$. Montrer que -2 est valeur propre de A.

Centrale PC 2012 (polynôme annulateur matrice 3×3) ✌

Ex 55 Déterminer les $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $u^3=u$ et $\mathrm{tr}\,(u)=3$.

CCP PSI 2022 -2019 (polynôme annulateur avec 0 racine simple)

Ex 56 Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E de dim. finie. On suppose 0 racine simple d'un polynôme annulateur de u.

1) Montrez $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$.

2) Montrez que si u est nilpotent, alors u est nul.

Ex 57 Prouvez $A \in M_n(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable si elle vérifie $(A-3I)^3(A+2I) = 0$ et $(A-3I)^2(A+2I) \neq 0$

CCEM PSI 2015 | CCP PSI 2014-2011 | (polynome annulateur matrice 3×3)

Ex 58 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^4 = f^2$ et $\{-1, 1\} \subset \operatorname{Sp} f$. Montrez f diagonalisable.

Mines-Ponts PSI 2023 (polynôme annulateur)

Ex 59 Soit $P = X^5 - 2X^4 - 2X^3 + X^2 + 4X + 4$

1) Vérifiez $P(2) = P'(2) = 0$ et en déduire la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

2) Trouvez les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tq il existe $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P(M) = 0, \det M = \pm 1$ et $\operatorname{tr}(M^3) = 0$.

CCP PSI 2022-2016-2013 | CCP PC 2012-2010 | (racine d'une matrice symétrique)

Ex 60 Soit A symétrique réelle d'ordre n telle que $A^k = I_n$ avec k entier non nul. Montrez $A^2 = I$.

CCP PC 2010 (Traces possibles par polynôme annulateur)

Ex 61 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\operatorname{tr} u$?

CCP PSI 2014-2012 (endomorphisme de matrices)

Ex 62 Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on pose $f(M) = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.

Montrez que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. f est-elle diagonalisable? Donnez ses éléments propres.

CCP PC 2011 (polynôme annulateur matrice 6×6)

Ex 63 Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\operatorname{tr} A = 8$. Calculez le polynôme caractéristique de A.

CCINP PSI 2022-2021 | TPE PSI 2016 (equation matricielle avec transposée)

Ex 64 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 + M^{\mathrm{T}} = I_n$.

1) Montrez que si un polynôme P annule M, alors les vp de M sont des racines de P [**2016 :** Q. absente]

2) On suppose M symétrique. Montrez M diagonalisable. [**2021 :** Est-elle diag. ?] Montrez $\det(M) \times \operatorname{tr}(M) \neq 0$.

3) On ne suppose plus M symétrique. Montrez M diagonalisable.

4) Montrez M inversible ssi 1 n'est pas vp de M. [**2021 :** Montrez alors M symétrique]

Ex 65 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = 0$. Montrez que A n'a pas de valeur propre réelle, puis que n est nécessairement pair. Calculez le déterminant, la trace et le polynôme caractéristique de A.

Ex 66 Mz $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1 vérifie $M^2 = \operatorname{tr}(M)M$ et en déduire que M est diagonalisable ou nilpotente.

Mines-Ponts PSI 2016 (polynôme annulateur matrice $n\times n$)

Ex 67 Soient E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^3 + f^2 - \operatorname{Id}_E = 0$ et $\operatorname{tr}(f) \in \mathbb{Q}$. Montrer que n est un multiple de 3.

Centrale PSI 2016 (matrice antisymétrique augmentée de aI)

Ex 68 On considère la matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$: $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$ avec $bcd \neq 0$.

1) Calculer $A + {}^tA$, ${}^tA A$ et $({}^tA + tI_4)(A + tI_4)$, avec $t \in \mathbb{C}$. En déduire χ_A.

2) On suppose ici $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Montrer que A n'est pas diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

3) Trouver un polynôme simple annulateur de A. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$?

Polynômes d'Endomorphismes / Polynômes Annulateurs Génériques

Théorème : Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ dont ***toutes ses valeurs propres distinctes*** sont $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.
Alors u (ou M) est ***diagonalisable*** ssi u ***annule le*** polynôme $P(X) = (X - \lambda_1) \times \cdots \times (X - \lambda_p)$.

Théorème de Cayley-Hamilton :
Le ***polynôme caractéristique*** χ_u d'un endomorphisme u est ***un polynôme annulateur*** de u, cad $\chi_u(u) = 0$.
En particulier, pour une matrice 2×2, on a toujours $M^2 = \operatorname{tr}(M)\, M - \det(M)\, I_2$

Ex 69 ✍ Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ quelconque.

1) si λ est une vp de M existe t-il P tq $P(M) = 0$ et $P(\lambda) \neq 0$?

2) si λ n'est pas une vp de M existe t-il P tq $P(M) = 0$ et $P(\lambda) \neq 0$?

3) Existe t-il P tq $P(M) = 0$ et $P(2) = 0$? et tq $P(2) = P'(2) = 0$?

Mines-Ponts PSI 2023 (équation matricielle) ✷✍
Ex 70 Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension n et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Déterminez les applications $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\alpha u^3 = \operatorname{tr}(u^2)u$.

Ex 71 ✍

1) Soit $P = aX + b$ avec $a \neq 0, b$ réels. Trouvez $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $P(M) = 0$

2) Soit $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$. Trouvez $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tq $P(M) = 0$

3) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Existe-t-il $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$?

4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Existe-t-il $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$?

Ex 72 Soit f un endomorphisme de E qui admet un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrez que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$, d'abord en dimension finie, puis en dimension quelconque.

Centrale PC 2013 (matrice n × n)
Ex 73 Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $M = (a^{i-j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré deux tel que $P(M) = 0$.

2) Soit $b \in \mathbb{R}$. Donner une CNS sur b pour que $M + bI_n$ soit inversible. Exprimer alors son inverse.

Mines-Ponts PSI 2022 (diagonalisabilité f tq f^2 projecteur) ✷✍
Ex 74 Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et f un endomorphisme de E tq f^2 soit un projecteur.

1) Précisez un polynôme annulateur de f.

2) Montrez il existe deux sev supplémentaires F et G stables par f tq l'endomorphisme induit par f sur F soit inversible et celui induit sur G soit nilpotent.

3) Montrez f est diagonalisable ssi $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$.

Ex 75

1) Soit P un polynôme annulateur d'une matrice nilpotente. Montrez $P(0) = 0$.

2) Montrez il existe un polynôme annulateur d'une matrice inversible tel que $P(0) \neq 0$.

Mines-Ponts PSI 2023 (commutants) ✷✍
Ex 76 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$-ev de dim. n, $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = g \circ f\}$, le commutant de f.

1) On suppose f possède n vp distinctes. Montrez que, pour tout $g \in C(f)$, il existe un unique $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tq $g = P(f)$.

2) On suppose que f est seulement diagonalisable. le résultat précédent reste-t-il vrai ?

Ex 77 ✍ ✷Soit A et B symétriques réelles tq $B = A^3$. Montrez qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(B)$

Centrale MP 2011 | Mines-POnts PSI 2007 ✷✍
Ex 78 Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique χ_A. Soit B une autre matrice.

1) Etablir : A et B n'ont pas de valeur propre commune ***si et seulement si*** $\chi_A(B)$ est inversible.

2) On suppose qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle tq $AM = MB$. Montrez que A et B ont une valeur propre en commun.

Indication : On pourra d'abord montrer $\forall P \in \mathbb{C}[X],\ P(A)M = MP(B)$.

Mines-Ponts PSI 2023 (trace des puissances itérées égales) ✷✍
Ex 79 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\forall k \in \mathbb{N},\ \operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k)$.

1) Montrez $\chi_A = \chi_B$.

2) A et B sont elles toujours semblables ?

Trigonalisation

Théorème : $u \in \mathscr{L}(E)$ (rp $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est ***trigonalisable*** ssi son polynôme caractéristique est ***scindé***.
Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev, toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est ***donc*** trigonalisable.

Ex 80 ✍ Montrez que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Mines-Ponts PSI 2019 (trigonalisation matrice 3 × 3) ✌✍

Ex 81 Pour $c \in \mathbb{R}$, on note $A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix}$

1) Déterminez les réels c tels que $A(c)$ ne soit pas diagonalisable.

2) Soit d la plus petite de ces valeurs. Trouvez P tel que $P^{-1}A(d)P$ soit triangulaire.

Ensam PSI 2017 (racine carrée matrice trigonalisable)

Ex 82

1) La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2) Est-elle trigonalisable ? Si oui, la trigonaliser.

3) Montrez que si $M^2 = A$, alors $\operatorname{Sp} M \subset \{0, -1, 1\}$.

4) Résoudre l'équation $M^2 = A$.

Autres

Ex 83 ✍ Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et ϕ une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$. On note H le noyau de ϕ. Montrez que H est stable par f ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \phi \circ f = \lambda \phi$. *Application :* cherchez tous les ev stables par la matrice du Q3.

CCINP PSI 2022 (commutant endomorphisme cyclique) ✍

Ex 84 Soit E un ev de dimension finie $n \geq 1$, $f \in \mathscr{L}(E)$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses vp distinctes.

1) Montrez $P \longrightarrow (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^n$.

2) (i) Soit g un endomorphisme tq f et g commutent. Montrez que les espaces propres de f sont stables par g puis que tous les vecteurs propres de f sont vecteurs propres de g.

(ii) Montrez il existe une base de E formée par les vecteurs propres communs à f et g.

(iii) Montrez l'existence et l'unicité d'un polynôme P tq $g = P(f)$.

3) Montrez que l'ensemble des endomorphismes g de E qui vérifient $g \circ f = f \circ g$ est un sev de $\mathscr{L}(E)$ et précisez sa dimension.

Mines-Ponts PSI 2023 (matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$) ✷

Ex 85

1) Soit $P \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{C})$ que l'on décompose en $P = Q + iR$ avec $R, Q \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tq $Q + \lambda R \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{R})$.

2) En déduire que 2 matrices A et B réelles, semblables sur $\mathbb{C}$, sont semblables sur $\mathbb{R}$.

3) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $A^3 = B^3 = I_n$ et $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. Montrez A et B semblables.

Mines-Ponts PSI 2023 (trace des puissances itérées égales) ✷✍

Ex 86 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tq $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{tr}(A^k) = \operatorname{tr}(B^k)$.

1) Montrez $\chi_A = \chi_B$.

2) A et B sont elles toujours semblables ?

Ex 87 **Disques de Gershgorin**[1]

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir $\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} D\left(a_{ii}, \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\right)$, où $D(a, R)$ désigne le disque de centre a et de rayon R.

D'abord montrer que si M est à diagonale strictement dominante, cad $\sum_{1 \leq j \leq n \; j \neq i} \left|M_{ij}\right| < M_{ii}$, alors M est inversible

Centrale PSI 2023 (polynôme annulateur de degré quelconque) ✷

Ex 88 Soient E un $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$ tq $(f - a\operatorname{Id}) \circ (f - b\operatorname{Id}) = 0$.

1) Déterminez $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\lambda(f - a\operatorname{Id})$ et $\mu(f - b\operatorname{Id})$ soient des projecteurs.

2) Montrez $\operatorname{Ker}(f - a\operatorname{Id}) = \operatorname{Im}(f - b\operatorname{Id})$.

3) Déterminez f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 89

1) On pose $Q(x) = 2x^5 + X^3 + 2x + 1$. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels $\neq$ et $\mu_i = Q(\lambda_i)$. Montrez il existe un polynôme P tq $P(\mu_i) = \lambda_i$.

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. On pose $B = 2A^5 + A^3 + 2A + I_n$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(B) = A$.

Ex 90 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable dont les valeurs propres sont 2 et 3. On pose $B = A - 4I_n$. Montrer que B est inversible et exprimez B^{-1} comme un polynôme en A.

Ex 91 Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels qu'il existe $a \neq 0$ vérifiant $uv - vu = av$.

1) Montrez que v n'est pas inversible.

2) Montrez, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $uv^k - v^k u = akv^k$.

3) ✷ Montrez que v est nilpotent en considérant l'endomorphisme ϕ de $\mathscr{L}(E)$ défini par $\phi(w) = uw - wu$ ou en utilisante l'exercice de la feuille : si $\operatorname{tr} v^k = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors v est nilpotente.

Ex 92 Etablir que un endomorphisme laisse stables toutes les droites vectorielles (ce qui équivaut à tous les vecteurs sont vecteurs propres) ssi c'est une homothétie.

Ex 93 Soit D une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$. Déterminez les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ laissant stables tous les plans de $\mathbb{R}^3$ contenant D.