Classe de PSI

Feuille d'Exercices 5

☞ ***Thèmes des semaines du 21 et 28 Novembre 2016 :***
- Suite et Séries de fonctions : Convergence simple, uniforme, normale.
- Th de continuité, dérivabilité et intégration. Th d'interversion de limites.

Ex 1 Etudier la convergence simple et uniforme sur l'intervalle indiqué des suites de fonctions suivantes

$$nx^n(1-x^2) \quad [0,1] \qquad xe^{\frac{x}{n}} \quad \mathbb{R}^+ \qquad \frac{(\ln x)^{2n}-2}{(\ln x)^{2n}+2} \quad]0,+\infty[\qquad \begin{cases} n^2x(1-nx) & 0\le x\le \frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$$

$$\min\left(n,\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad \mathbb{R} \qquad \frac{2^n x}{1+n2^nx^2} \quad \mathbb{R} \qquad \left(\frac{x}{n}\right)^{nx} \quad \mathbb{R}^{+*}$$

✌ **Ex 2** On pose $f_n(x)=\dfrac{n}{\sqrt{\pi}}e^{-n^2x^2}$.

1) Etudiez la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

2) Démontrez la convergence uniforme sur les intervalles $]-\infty,-a]$ et $[a,+\infty[$ pour $a>0$. La suite (f_n) converge t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$. (*Indication :* on pourra considérer $f_n(\frac{1}{n})$.

Ex 3 Soit $f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $f_n:\begin{cases}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(x+\dfrac{x(1-x)}{n}\right)\end{cases}$.

1) Montrez que f_n est correctement définie.

2) Etudiez la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n).

✌ **Ex 4** Montrez que $f(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{-t}}{n^2+t^2}$ est définie et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ex 5 Etudiez la convergence simple et normale des séries de fonctions suivantes

$$\sum xe^{-n^2x^2} \quad \mathbb{R} \qquad \sum(-1)^n\frac{n+x^2}{n^2} \qquad \sum\frac{xe^{-nx}}{\ln n} \qquad \sum\frac{x^n}{1+nx^{2n}} \quad \mathbb{R}^+ \qquad \sum\frac{(-1)^n}{x^2+n} \quad \mathbb{R}$$

$$\sum\arctan\frac{x}{n^2+x^2} \quad \mathbb{R} \qquad \sum\frac{nx}{1+n^3x^2} \quad \mathbb{R}^+ \qquad \sum\begin{cases}\dfrac{\sin x}{n+1} & \Longleftarrow\ n\pi\le x\le(n+1)\pi \\ 0 & \Longleftarrow\ x\in\mathbb{R}^+-[n\pi,(n+1)\pi]\end{cases}$$

Ex 6 Soit la série de fonct. de terme général sur $[0,1]$, $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n(x)=\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)-\dfrac{x}{n}$.

Lorsque la série converge, on pose $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}$.

1) Démontrez que S est dérivable sur $[0,1]$.

2) Calculez $S'(1)$. *Indication :* Décomposez en éléments simples.

✌ **Ex 7** Montrez que $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^{3/2}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Ex 8 Montrez $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\sum_0^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}$.

✷ **Ex 9** Montrez $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}\quad(a,b>0)$

Ex 10 Soit $\sum(-1)^ng_n$ une série d'applications de $I\subset\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tq $\forall x\in I$, la suite $(g_n(x))$ est décroissante et la suite (g_n) converge unifomément vers 0 sur I. Montrez la série converge uniformément sur I.

✷ **Ex 11** Etudiez la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} xe^{-n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

✌ **Ex 12** Montrez $\int_0^1 \frac{1}{1-t/2}\,\mathrm{d}t = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$

Ex 13 **Fonction ζ de Riemann** [1] On définit cette fonction par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

✌ **1)** Donnez le domaine de définition de ζ.

2) Etudiez la monotonie de ζ, puis établir $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 0$ $\lim_{x\to 1} \zeta(x) = +\infty$.

✷ **3)** Donnez un équivalent de ζ, en 1_+.

Ex 14 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n+x}$.

1) Déterminez suivant les valeurs de a, le domaine de définition de S.

2) Soit a tel que $|a| < 1$. Montrez S continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Déterminez une relations entre $S(x+1)$ et $S(x)$.

4) Déterminez un équivalent de S en O^+.

5) Déterminez un équivalent de S en $+\infty$.

Ex 15 Montrez que $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{-kt^2}}{k^2+1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ex 16 Calculez $\int_0^1 \frac{x\ln x}{1-x}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{\pi^2}{6}$.

Ex 17 On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2x^2}$

✌ **1)** Montrez que S est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

✷ **2)** S est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$?

Ex 18 Etudiez $\lim_{x\to 0_+} \sum_1^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$ et $\lim_{x\to+\infty} \sum_1^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$

Ex 19 On pose $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\sinh(nx)}$.

1) Déterminez le domaine de définition et de continuité de f.

2) Etudiez les variations de f et donnez ✷un équivalent de f en 0_+ et $+\infty$.

Ex 20 On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2}$.

✌ **1)** Montrez $\mathrm{Def} f = \mathbb{R}^+$.

2) Montrez f continue sur $\mathbb{R}^+$ et C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculez f'' et en déduire f' sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Montrez que f est non dérivable en 0.

4) Montrez, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) + \int_0^x \ln(1-e^{-t})\,\mathrm{d}t$.

✷ **Ex 21** Montrez que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} \frac{x^2}{1+n^2x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

✷ **Ex 22** On considère la série de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ $\sum \alpha_n e^{inx}$ tq la suite réelle (α_n) décroit vers 0. Montrez que la série de fonctions converge uniformément sur tout intervalle $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ $(0 < \varepsilon < \pi)$. (*On utilisera une transformation d'**Abel**[2], cad on utilisera $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$ et on écrira $e^{inx} = S_n(x) - S_{n-1}(x)$*).

Ex 23 On pose $f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n} (\cos x)^n \sin(nx)$

1) Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}$ et de période π.

2) Etablir que f est de classe C^1 sur $]0,\pi[= I$

3) Calculez f sur I. Continuité de f en 0 et π ?

Ex 24 Etudiez la convergence de la série de fonctions $\sum (\tanh(x+n) - \tanh n)$ sur $\mathbb{R}$.