Quelques corrections sur l'Intégrale Généralisée

Ex 1

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}\,dt = I$$

- $f(t) = \dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est ***continue*** sur $]0,1[$: on a bien $1-t>0$.
- ***Etude en*** $t=0$ ***:***

  $|f(t)| \sim_0 -\ln t$ et $\ln t$ est intégrable en 0 (cours) donc, critère d'équivalent fonction positive, f est ***intégrable*** en 0.
- ***Etude en*** $t=1$ ***:***

  $|f(t)| \sim_{1_-} \dfrac{|t-1|}{\sqrt{1-t}} = \sqrt{1-t}$. On en déduit $\lim_1 f(t) = 0$, cad f se prolonge en une fonction ***continue*** en 1 : f est donc ***intégrable*** en 1. (On pouvait aussi, 2e méthode, reconnaître une fonction de **Riemann** [1] intégrable en 1 avec $\alpha = -\frac{1}{2}$).

f est ***intégrable*** sur $]0,1[$ donc l'intégrale I converge absolument , donc converge c'est-à-dire existe.

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt[3]{t^2(1-t)}} = I$$

On pose $f(t) = \dfrac{1}{(1+t)\sqrt[3]{t^2(1-t)}}$

- f est ***continue*** sur $]0,1[$. Je rappelle que $\sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
- ***Etude en*** $t=0$ ***:***

  $|f(t)| \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{1\times\sqrt[3]{t^2\times 1}} = \dfrac{1}{t^{2/3}}$. Du critère ***d'équivalent*** d'une fonction ***positive*** à une fonction de Riemann intégrable en 0 ($\alpha = \frac{2}{3} < 1$), il en résulte f ***intégrable*** en 0
- ***Etude en*** $t=1$ ***:*** La changement de variable $u = t-1 \xrightarrow{t\to 1} 0$ amène :

  $$f(t) = \frac{1}{(1+(1+u))\sqrt[3]{(1+u)^2(-u)}} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2\times\sqrt[3]{1\times(-u)}} \quad\Longrightarrow\quad |f(t)| \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{2(1-t)^{1/3}}$$

  Du critère ***d'équivalent*** d'une fonction ***positive*** à une fonction de Riemann intégrable en 1 ($\alpha = \frac{1}{3} < 1$), il en résulte f ***intégrable*** en 1.

f est ***intégrable*** sur $]0,1[$ donc l'intégrale I converge absolument , donc converge c'est-à-dire existe

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x}\ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) dx = I$$

On pose $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x}\ln\left(\dfrac{2+x}{1+x}\right)$

- f est ***continue*** sur $]0,+\infty[$: $\frac{2+x}{1+x} > 0$ sur $]-\infty,-2[\,\cup\,]-1,+\infty[$

1. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

- ***Etude en*** $x = 0$ ***:***
  $\left|f(x)\right| \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} \times \ln 2 = \ln 2$. f se prolonge en une fonction ***continue*** en 0 (par la valeur $\ln 2$) d'où son ***intégrabilité*** en 0.
- ***Etude en*** $x = +\infty$ ***:***
  On remarque que $u = \dfrac{2+x}{1+x} \xrightarrow{x\to+\infty} 1$ et on sait $\ln u \sim_1 (u-1)$ d'où :
  $$\left|f(t)\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi/2}{x}\left(\left(\frac{2+x}{1+x}\right)-1\right) = \frac{\pi}{2x}\,\frac{1}{1+x} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2x^2}$$
  Du critère ***d'équivalent*** d'une fonction ***positive*** à une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ ($\alpha = 2 > 1$), il en résulte f ***intégrable*** en $+\infty$.

f est ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$ donc l'intégrale I converge absolument , donc converge c'est-à-dire existe

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t^{\left(\frac{-t}{t+1}\right)}\,dt}$$

On pose $f : t \to t^{\left(\dfrac{-t}{t+1}\right)} = \exp\left(\dfrac{-t\,\ln t}{t+1}\right)$

- f est ***continue*** sur $\left]0,+\infty\right[$.
- ***Etude en*** $t = 0$:
  On utilise le « *critère* $t^a f(t)$ » de **Riemann**[1] (***Attention***! en 0 avec $a = \frac{1}{2} < 1$) :
  $$\sqrt{t}f(t) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln t + \frac{-t\ln t}{t+1}\right) = \exp\left(\frac{(-1/2t+1/2)\ln t}{t+1}\right) = \exp\big(g(t)\big) \quad \text{avec } g(t) \sim_0 \frac{1/2\ln t}{1} \to -\infty$$
  Par composition de limites avec exp, il vient $\lim_{t\to 0} t^{1/2}f(t) = e^{-\infty} = 0$, puis l'***intégrabilité*** de f en 0.
- ***Etude en*** $t = +\infty$
  La méthode générale est d'utiliser le « *critère* $t^a f(t)$ » de **Riemann**[1](***Attention!*** borne infinie ici) :
  $$t^a f(t) = \exp\left(\frac{\big((a-1)t+a\big)\ln t}{t+1}\right) = \exp\big(g(t)\big) \quad \text{avec } g(t) \sim_{+\infty} \begin{cases} \dfrac{(a-1)t\ln t}{t} \longrightarrow \operatorname{sgn}(a-1)\infty & \text{si } a \neq 1 \\ \dfrac{\ln t}{t} \longrightarrow 0 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$
  Par composition de limites avec exp, il vient, selon le paramètre a, si $a > 1$, $\lim_{+\infty} t^a f(t) = +\infty$, si $a < 1$, $\lim_{+\infty} t^a f(t) = 0$, si $a = 1$, $\lim t^a f(t) = 1$. Bref, le critère donné en cours ne « *marche* » pas ici.

  On procède différemment en développant à l'intérieur de l'exp jusqu'à un $o(1)$, procédé déjà vu en cours :
  $$f(t) = \exp\left(\frac{-t\ln t}{t+1}\right) = \exp\left(-\frac{t\ln t}{t}\,\frac{1}{1+\frac{1}{t}}\right) = \exp\left(-\ln t\left(1-\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)\right) = \exp\big(-\ln t + o(1)\big) = \exp\big(\ln t\big)\times e^{o(1)} \sim_{+\infty} \frac{1}{t}\times 1 = \frac{1}{t}$$
  De par la comparaison avec une fonction de **Riemann**[1], la fonction f n'est ***pas intégrable*** en $+\infty$.

L'intégrale I ne ***converge donc pas absolument*** et comme la fonction-intégrande f est positive, l'intégrale ne converge pas, c'est-à-dire n'existe pas.

Remarques

- Je rappelle pour une fonction quelconque $f = o_a(1) \Longleftrightarrow \lim_a f = 0$
- le « *raisonnement* » $e^f \sim e^g$ car $f \sim g$ est ***faux*** et le résultat en général faux aussi… (ici, le résultat est vrai, par chance).
- Avec un critère $t^a f(t)$ amélioré, ***qui n'est pas au programme***, le critère pouvait « *marcher* » en $t = +\infty$. Je le donne pour les élèves « *curieux et ambitieux* » (seulement en $+\infty$) :

$a > 1$	$\lim\limits_{t\to+\infty} t^a\left|f(t)\right| = \ell$ avec $\ell < +\infty$	$f(t)$ intégrable en $+\infty$
$a \leq 1$	$\lim\limits_{t\to+\infty} t^a\left|f(t)\right| = \ell$ avec $\ell > 0$	$f(t)$ non intégrable en $+\infty$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{dt}{\arccos(1-t)} = I}$$

- $f(t) = \dfrac{1}{\arccos(1-t)}$ ***continue*** sur $\left]0,1\right]$: on a bien $-1 < 1-t < 1$. Je rappelle $\arccos 1 = 0$ et $\arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}$
- ***Etude en*** $t = 0$

  On a $\cos(u) - 1 \underset{u \to 0}{\sim} -\frac{1}{2}u^2$. On sait qu'on peut remplacer u par n'importe quelle quantité qui tend vers 0 (puisque par composition de limites, le rapport tendra aussi vers 1). On prend $u(t) = \arccos(1-t)$: on a $u(t) \longrightarrow 0$, lorsque $t \longrightarrow 0$. Par conséquent, comme on peut multiplier et prendre les puissances d'équivalents :

  $$(1-t)-1 = \cos\big(\arccos(1-t)\big) - 1 \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}\arccos^2(1-t) \implies \arccos^2(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} 2t \implies \arccos(1-t) \underset{\to 0}{\sim} \sqrt{2}\,\sqrt{t}$$

  Il vient que $\left|f(t)\right| \sim_0 \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{t^{1/2}}$. Du critère d'***équivalent d'une fonction positive*** à une fonction de ***Riemann*** intégrable en 0 (car $\frac{1}{2} < 1$), il vient l'intégrabilité de f en 0.

f est donc ***intégrable*** sur $\left]0,1\right]$, soit l'intégrale I converge absolument, donc converge, c'est-à-dire existe.

CCINP PSI 2023 (calcul d'intégrale)

Ex 2 On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t \cos t)\,dt$.

1) Montrez que I converge.

2) Montrez $J = 2I$

3) Calculez I.

1) En posant $f(t) = \ln\sin t$:

- f est ***continue*** sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$. ***car on a bien*** $\sin t > 0$ sur cet intervalle.
- ***Etude en*** $t = 0$ ***:*** Dans un voisinage de $t = 0$, on écrit :

  $$\left|f(t)\right| = \left|\ln\big(t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)\big)\right| = \left|\ln\big(t(1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2))\big)\right| = \left|\ln t + \ln\big(1 \underbrace{- \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)}_{\to 0}\big)\right| = \left|\ln t - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)\right| \sim_0 \left|\ln t\right|$$

  De l'intégrabilité de ln en 0 (cours ou critère $t^a g(t)$), il résulte du ***critère d'équivalent*** des fonctions ***positives*** que f est ***intégrable*** aussi en 0.

f est donc intégrable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, d'où l'intégrale I converge absolument, donc converge (cad existe).

2) Le changement de variables $u = \frac{\pi}{2} - t$ $\quad du = -dt$, C^1 et ***bijectif*** de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ amène :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt = \int_{\pi/2}^0 \ln\sin\big(\frac{\pi}{2} - u\big)(-\mathrm{d}u) = \int_0^{\pi/2} \ln\cos u\,\mathrm{d}u$$

Ensuite, on écrit :

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin t \times \cos t\big)\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln\sin t + \ln\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln\sin t\,dt + \int_0^{\pi/2} \ln\cos t\,dt = 2I$$

3)

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin t \times \cos t\big)\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\frac{1}{2}\sin(2t)\big)\,dt = \int_0^{\pi/2} \ln\big(\frac{1}{2}\big)dt + \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(2t)\big)\,dt \overset{(1)}{=} -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln\big(\sin(u)\big)\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(u)\big)\,\mathrm{d}u + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln\big(\sin(u)\big)\,\mathrm{d}u\right) \overset{(2)}{=} -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\left(I + \int_{\pi/2}^{0} \ln\big(\sin(\pi - v)\big)(-dv)\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\left(I + \int_0^{\pi/2} \ln\big(\sin(v)\big)\,dv\right) = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}(2I) \implies \boxed{I = -\frac{\pi}{2}\ln 2}$$

- **(1)** On a effectué le changement de variables $u = 2t$ licite car C^1 et bijectif de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $\left]0,\pi\right]$
- **(2)** On a effectué le changement de variables $v = \pi - u$ licite car C^1 et bijectif de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right[$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$

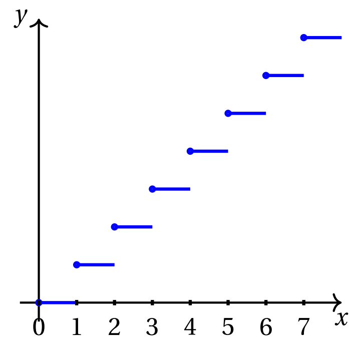
Centrale PC | CCP PSI 2017-2012 (calcul d'intégrale avec partie entière)

Ex 3 On admet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1) Décomposez en éléments simples $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2}$.

2) ✷Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 xE\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor dx$.

1) Sans nécessité de donner le détail, on trouve : $\dfrac{2x+1}{x(x+1)^2} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$



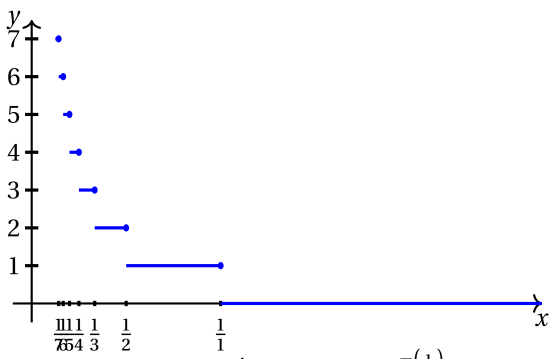
REPRÉSENTATION DE $E(x)$

Rappelons la définition de la partie entière d'un réel x

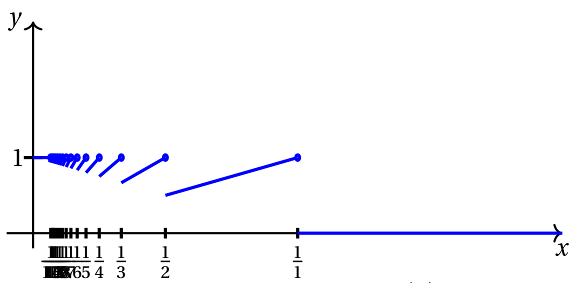
$$k \in \mathbb{Z} = E(x) \Longleftrightarrow k \leq x < k+1$$

2) la fonction $x \longrightarrow E(x)$ est continue par morceaux (et même en escaliers) sur $\mathbb{R}$.

$$k \leq \frac{1}{x} < k+1 \Longleftrightarrow E\left(\frac{1}{x}\right) = k \Longleftrightarrow \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k} \Longleftrightarrow f(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right) = kx$$



REPRÉSENTATION DE $E\left(\frac{1}{x}\right)$



REPRÉSENTATION DE $x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$

L'intégrabilité de f sur $]0,1]$ résulte de la continuité par morceaux et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}, \quad 0 \leq |f(x)| = kx \leq \frac{k}{k} = 1$$

Critère de majoration d'une fonction ***positive*** par la fonction constante 1, intégrable sur $]0,1]$, car intervalle ***borné*** (les fonctions constantes non nulles ne sont pas intégrables en $+\infty$). L'intégrale existe donc.

Pour le calcul, on utilise la propriété de **Chasles**[2] avec $[0,1] = [\frac{1}{2},1] \cup [\frac{1}{3},\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4},\frac{1}{3}] \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xE\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{1/k+1}^{1/k} xE\left(\frac{1}{x}\right) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{1/k+1}^{1/k} xk\, dx = \sum_{k=1}^{+\infty} k \int_{1/k+1}^{1/k} x\, dx \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left[\frac{x^2}{2}\right]_{1/k+1}^{1/k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2(k+1)^2} - \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2k+1}{2k(k+1)^2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{2} \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2}\right) + \frac{1}{2} \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2}\right) + \frac{1}{2} \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{1} - \frac{1}{N+1} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\pi^2}{12}}
\end{aligned}$$

2. **Michel Chasles** : mathématicien français (1793-1880). A introduit en géométrie les grandeurs orientées. Auteur d'un *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.*

IMT PSI 2023-2022 (calcul intégrale) ✍

Ex 4

1) Donnez un équivalent de $\frac{1}{t} - \arctan(\frac{1}{t})$ au voisinage de $+\infty$.

2) Nature et calcul de $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan(\frac{1}{t})\right) dt$ [**2022 :** *indication :* utilisez un $\varepsilon > 0$ puis le faire tendre vers $+\infty$]

1) On a immédiatement par le dl usuel de arctan en 0, $\frac{1}{t} - \arctan\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3t^3}$

2)

- $f : t \to \frac{1}{t} - \arctan\frac{1}{t}$ ***continue*** sur $\left[1, +\infty\right[$
- ***Etude en*** $t = +\infty$ **:** D'après Q1, f étant positive en $+\infty$ on peut appliquer le critère d'équivalent et par critère de Riemann, f ***intégrable*** en $+\infty$.

Il en résulte f ***intégrable*** sur $\left[1, +\infty\right[$ d'où la convergence absolue, donc convergence de l'intégrale.

$$\int_1^{\varepsilon} \left(\frac{1}{t} - \arctan\frac{1}{t}\right) dt = \int_1^{\varepsilon} \frac{dt}{t} - \int_1^{\varepsilon} \arctan\frac{1}{t}\, dt \overset{(1)}{=} \int_1^{\varepsilon} \frac{dt}{t} - \left[t\arctan\frac{1}{t}\right]_1^{\varepsilon} + \int_1^{\varepsilon} \frac{-t\,dt}{1+t^2}$$
$$= \frac{\pi}{4} - \varepsilon\arctan\frac{1}{\varepsilon} + \int_1^{\varepsilon} \frac{dt}{t(1+t^2)} \overset{(2)}{\Longrightarrow} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\frac{1}{t}\right) dt = \frac{\pi}{4} - 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$$

- **(1)** On effectue une ipp avec $u' = 1 \quad v = \arctan\frac{1}{t} \quad u = t \quad v' = \frac{-1}{1+t^2}$
- **(2)** On fait tendre $\varepsilon \longrightarrow +\infty$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)}$ existant (immédiatement par le critère de Riemann) et $\varepsilon\arctan\frac{1}{\varepsilon} \sim_{+\infty} \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1$

On termine en calculant l'intégrale à l'aide d'une décomposition en éléments simples

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+t^2)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2} = \lim_{A\to+\infty} \left[\ln t - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_1^A = \frac{1}{2}\ln 2 + \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\ln\left(\frac{A^2}{1+A^2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \arctan\frac{1}{t}\right) dt = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2}\ln 2}$$

Ex 5 Montrez $\frac{1}{1+x^2\,|\sin x|^{3/2}}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On cherchera à *ramener* à l'étude d'une série.

On pose $f(x) = \frac{1}{1+x^2\,|\sin x|^{3/2}}$.

La continuité sur $\mathbb{R}$ est immédiate, vu la non nullité du dénominateur. On va suivre l'indication de l'énoncé qui laisse sous-entendre que les critères de convergence usuels ne s'appliqueront pas bien. On revient à « *l'intégrale partielle* » et vu la parité, on ne « s'occupe » que de $+\infty$: on pose $F(x) = \int_{\pi/2}^{x} f$ et

$$F\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \int_{\pi/2}^{n\pi/2} \frac{1}{1+x^2\,|\sin x|^{3/2}}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi+\pi/2} \frac{1}{1+x^2\,|\sin x|^{3/2}}\,dx}_{u_k}$$

On montre d'abord la convergence de cette série $\sum u_n$ à termes positifs avec le changement $u = x - n\pi$:

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{1+(u+n\pi)^2|\sin u|^{3/2}} \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{1+(-\pi/2+n\pi)^2|\sin u|^{3/2}} \\
&\overset{(1)}{=} 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{1+(-\pi/2+n\pi)^2 \sin u^{3/2}} \overset{(2)}{\leq} \int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+(-\pi/2+n\pi)^2\left(\frac{2}{\pi}u\right)^{3/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1+\alpha(n-1/2)^2 u^{3/2}} \\
&\overset{(3)}{=} \frac{1}{(n-1/2)^{4/3}} \int_0^{(n-1/2)\beta} \frac{\gamma\, dv}{1+v^{3/2}} \overset{(4)}{\leq} \frac{1}{(n-1/2)^{4/3}} \int_0^{+\infty} \frac{\gamma\, dv}{1+v^{3/2}}
\end{aligned}$$

La série converge par comparaison à une série de **Riemann**[1] convergente ($4/3 > 1$). Le (1) résulte de la parité assurée par la majoration précédente. Le « *choix initial subtil* » de $\pi/2$ permet d'utiliser la minoration issue d'un argument de convexité que je ne détaille pas ici mais qui donne un résultat bien connu (et à retenir pour les élèves « *ambitieux* ») sur $[0,\pi/2]$, $\sin u \geq \frac{2}{\pi}u$. Les constantes strictement positives α,β,γ ne sont pas calculées par efficacité. Le dernier changement de variables du (3) $v = \alpha^{2/3}\,(n-1/2)^{4/3}\,u$ a pour but de « *complètement extraire le n* ». La dernière majoration du (4) résulte de la positivité et de la convergence de l'intégrale (immédiat).

On termine en remarquant que « *tout* » est positif ce qui permet de majorer et de prouver la convergence en majorant la fonction croissante F (et donc l'intégrabilité de f puisque la fonction est positive)

$$0 \leq F(x) \leq F\left(\left(E\left(\frac{x}{\pi}\right)+1\right)\pi + \frac{\pi}{2}\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1/2)^{4/3}}\right)\int_0^{+\infty} \frac{\gamma\, dv}{1+v^{3/2}} = cste$$

Remarques

- La convergence et l'intégrabilité étant des notions locales, il est plus simple d'étudier sur $[\pi/2,+\infty[$ car cela évite un « résidu ».
- $E\left(\frac{x}{\pi}\right)\pi \leq x < \left(E\left(\frac{x}{\pi}\right)+1\right)\pi$ permet d'encadrer x par deux $n\pi$ consécutifs.
- On notera que cette intégrale « donne » un exemple d'une fonction ***intégrable*** dans un voisinage de $+\infty$ ***mais on n'a pas*** $\lim_{+\infty} f = 0$. (En fait il n'y a pas de limite, comme le cours nous l'a appris, le lecteur est invité à le prouver en considérant deux suites...)
- Il est tout à fait possible qu'il y ait une méthode plus courte...

Mines-Ponts PSI 2022-2021-2019-2018-2016 (calcul intégrale de Dirichlet)

Ex 7

Soit $f : x \longrightarrow \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$ et $g : x \longrightarrow \cos(x)\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$.

1) Montrez $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ convergent.

2) Montrez que f et g sont solutions de l'équation différentielle $y'' + y = \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

3) En déduire que $f = g$ puis la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt$.

1) ***Attention!*** ici, il n'y a ***pas intégrabilité*** de $\frac{\sin t}{t}$ et $\frac{\cos t}{t}$ au voisinage de l'infini.

La convergence de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ résulte de la ***continuité*** de $\frac{\sin t}{t}\,dt$ sur $[x,+\infty[$ (***à condition de prendre*** $x > 0$) et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\int_x^A \frac{\sin t}{t}\,dt$ existe et est finie par l'ipp $u' = \sin t \quad v = \frac{1}{t} \quad u = -\cos t\, v' = \frac{-1}{t^2}$:

$$\lim_{A\to+\infty}\int_x^A \sin t\,\frac{1}{t}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\left[\cos(t)\frac{1}{t^2}\right]_x^A - \int_x^A \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt = -\frac{\cos x}{x^2} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

car cette dernière intégrale converge car $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ donne l'intégrabilité dans un voisinage de $+\infty$.

2) ***Dérivabilité de*** g **:**

On rappelle le théorème fondamental de l'analyse : si f continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors $F : x \longrightarrow \int_a^x f$ est définie, continue et même C^1 sur I et sa dérivée est $f(x)$. si en outre f est C^k, alors F est C^{k+1}

Prêter attention au fait que ici, x est ***en bas***, et que $+\infty$ ne ***peut pas*** être un $a \in I$... On écrit

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = -\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

g est donc indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt - \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt \\
g'(x) &= -\sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt + \cos(x)\frac{-\sin(x)}{x} - \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt - \sin(x)\frac{-\cos(x)}{x} \\
&= -\sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt - \cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt \\
g''(x) &= -\cos(x)\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt - \sin(x)\frac{-\sin(x)}{x} + \sin(x)\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt - \cos(x)\frac{-\cos(x)}{x} \\
&= -g(x) + \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad g \text{ est solution } \textbf{\textit{sur}}\ \mathbb{R}^{+*} \text{ de } y'' + y = \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Dérivabilité de f :

On applique le théorème C^2 d'une intégrale à paramètre. On prend $x \in J = \mathbb{R}^{+*}$ et $h(x,t) = \dfrac{e^{-tx}}{1+t^2}$. les dérivées partielles existent sur $\mathbb{R}^2$ et $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \dfrac{-t}{1+t^2}e^{-xt}$ $\quad \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \dfrac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}$

- $\forall x \in \left]0,+\infty\right[, \forall 0 \le k \le 1,\ t \longrightarrow \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)$ est ***intégrable*** sur $\mathbb{R}^{+*}$ continuité sur $\left[0,+\infty\right[$ et $\le \frac{1}{t^2}$ en $+\infty$, et ce pour tout $x \ge 0$
- $\forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ t \longrightarrow \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ x \longrightarrow h(x,t)$ est C^2 sur $\left]0,+\infty\right[$.
- ***Hypothèse de Domination sur tout segment*** $[a,b] \subset \left]0,+\infty\right[$ ***:***

$$\forall x \in [a,b] \subset \left]0,+\infty\right[,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ \left|\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t)\right| = \left|\frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt}\right| \le \frac{t^2}{1+t^2}e^{-at} = \xi(t)$$

Majoration résulte de $x \ge a$ et $t > 0$. ξ est ***intégrable*** sur $\mathbb{R}^{+*}$: $o(\frac{1}{t^2})$ au voisinage de $+\infty$ ***car*** $a > 0$

Alors F est de classe C^2 sur $\left]0,+\infty\right[$.

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}e^{-tx}\, dt \qquad f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t}{1+t^2}e^{-tx}\, dt \qquad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}e^{-tx}\, dt$$

$$\forall x > 0,\ f(x) + f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2}{1+t^2}e^{-tx}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\, dt = \left[\frac{e^{-tx}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$$

On ***conclut :*** f est solution ***sur*** $\mathbb{R}^{+*}$ de $y'' + y = \frac{1}{x}$.

3) On cherche à appliquer le théorème de Cauchy et donc on regarde si f et g vérifient les mêmes conditions initiales :

$$f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \qquad g(0) = \cos(0)\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

De toute façon, on ne pouvait pas prendre 0! car $0 \notin \mathbb{R}^{+*}$.

L'astuce est ici de se servir du fait que g est ***solution particulièr*** de l'équation différentielle. Par suite, comme l'équation homogène a immédiatement comme solutions $A\cos(x) + B\sin(x)$, il vient :

$$\forall x > 0,\ f(x) = A\cos(x) + B\sin(x) + g(x) = \cos(x)\Big(A + \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt\Big) + \sin(x)\Big(B - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt\Big)$$

Limite en $+\infty$ ***:***

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \text{ car } \left|f(x)\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{1}{1+t^2}e^{-tx}\,dt\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx}\,dt = \frac{1}{x}$$

Comme ***restes d'intégrales convergentes***, $\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$, $\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt \longrightarrow 0$. Par suite, on doit avoir $h(x)=A\cos(x)+B\sin(x)\longrightarrow 0$, ce qui impose $A=B=0$.

Remarque : On peut le démontrer, par caractérisation séquentielle de la limite, en prenant $x_n=2n\pi$ et $y_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$ $h(x_n)=A$ et $h(y_n)=B$.

4) On passe à la limite en 0 dans $\forall x>0, f(x)=g(x)$:

- $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=\dfrac{\pi}{2}$ par ***continuité en 0***; Hypothèse de Domination :

$$\forall x\in[a,b]\subset\mathbb{R}^+,\ \left|\frac{e^{-tx}}{1+t^2}\right| \leq \frac{1}{1+t^2} \text{ intégrable sur } \mathbb{R}^+$$

- $\lim_{x\to0} g(x)=\cos(0)\times\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt+0$ par ***continuité*** de $\sin,\cos$, ***convergence*** de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$ (déjà vu en $+\infty$ et se prolonge par continuité en 0 puisque $\frac{\sin(t)}{t}\sim_{t=0}\sim 1$. POur le cosinus, ceci ne marche pas! l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}$ ***diverge***! Il suffit de montrer ***bornée*** car elle est multipliée par sinus qui tend vers 0. Pour tout x, on prend n_x entier tel que $(n_x-1)\pi<x\leq n_x\pi$ puis

$$\int_x^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t}\,dt=\int_x^{n_x\pi}\frac{\cos(t)}{t}+\sum_{k=n_x}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\cos(t)}{t}=\underbrace{\int_x^{n_x\pi}\frac{\cos(t)}{t}}_{k(x)}+\sum_{k=n_x}^{+\infty}(-1)^k\underbrace{\int_0^{\pi}\frac{\cos(u)}{u+k\pi}}_{u_k}$$
$$=k(x)+\sum_{k=n_x}^{+\infty}(-1)^k u_k$$

$\left|k(x)\right| \leq \displaystyle\int_x^{n_x\pi}\frac{dt}{t}\leq (n_x\pi-x)\frac{1}{x}=\frac{\pi}{x}\longrightarrow 0$ et $|u_k|$ ***décroit*** vers 0 : par le CSSA, $\left|\displaystyle\sum_{k=n_x}^{+\infty}(-1)^k u_k\right|\leq |u_{n_x}|\longrightarrow 0$ car $n_x\longrightarrow+\infty$ lorsque $x\longrightarrow+\infty$.

On conclut $\lim_0 f(x)=f(0)=\dfrac{\pi}{2}=\lim_0 g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,dt$

a

Mines-Ponts PSI 2023 (calcul intégrale) ✷

Ex 8 Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+e^x}\,dx$. On pourra utiliser $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\,du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+e^x}\,dx$ converge car $f: x\to\dfrac{\sqrt{x}}{1+e^x}$ ***intégrable*** sur $[0,+\infty[$ car :

- f est ***continue*** sur $[0,+\infty[$.
- ***Etude en*** $x=+\infty$ $|f(x)|\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{x}e^{-x}$ qui est intégrable en $+\infty$ par le critère $x^\alpha f(x)$: $\alpha=2>1$ et $\lim_{+\infty}x^2\sqrt{x}e^{-x}=0$. Le critère d'équivalent des fonctions positives permet d'en déduire l'intégrabilité de f en $+\infty$

Le calcul de l'intégrale était très difficile, voire impossible, pour les 3/2 à ce stade de l'année. On utilise le développement en série géométrique $\dfrac{1}{1+u}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u^n$, ***mais Attention!*** , il faut avoir $|u|<1$, alors qu'on a $e^x\geq1$. On utilise alors l'astuce, classique, suivante :

$$\frac{\sqrt{x}}{1+e^x}=\frac{\sqrt{x}\,e^{-x}}{1+e^{-x}}=\sqrt{x}e^{-x}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(e^{-x}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{x}\,e^{-(n+1)x}$$

On a bien, ***sur*** $]0,+\infty[$, $|e^{-x}|<1$. On arrive alors à $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\sqrt{x}\,e^{-(n+1)x}\,dx$. Il faut ensuite un théorème d'interversion des symboles $\sum$ et $\int$ et c'est ce théorème qui manquait aux 3/2 (dans le cours de fin novembre). On l'appelle théorème d'intégration terme à terme; on vérifie ses hypothèses, après avoir posé $f_n(x)=(-1)^n\sqrt{x}\,e^{-(n+1)x}$

- Les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $[0,+\infty[$: $o_{+\infty}(\frac{1}{x^2})$ ***car***, ***Attention!*** , $n+1>0$.

- La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $\left[0,+\infty\right[$ (elle provient d'un développement en série!) et sa somme est ***continue par morceaux*** sur $\left[0,+\infty\right[$.
- La série numérique $\sum_n \int_{\left[0,+\infty\right[} |f_n|$ converge : le plus simple est de calculer l'intégrale car ce calcul sert après ...

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\, e^{-(n+1)x}\, dx \overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} u e^{-u^2} 2u \,\mathrm{d}u \,\frac{1}{n+1} = \frac{2}{(n+1)^{3/2}} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$\overset{(2)}{=} \frac{2}{(n+1)^{3/2}}\left(\left[-\frac{u}{2}e^{-u^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right) \overset{(3)}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{2(n+1)^{3/2}}$$

- **(1)** Changement $u = \sqrt{n+1}\sqrt{x}$ soit $x = \frac{1}{n+1}u^2$, C^1 et bijectif de $\left]0,+\infty\right[$ sur $\left]0,+\infty\right[$
- **(2)** Ipp avec $x = u \quad y' = ue^{-u^2} \quad x' = 1 \quad y = -\frac{1}{2}e^{-u^2}$. ***Attention!*** , on doit vérifier qu'elle est licite à cause de la borne $+\infty$: l'intégrale obtenue converge bien! (intégrabilité en $+\infty$ aisée laissée au lecteur)
- **(3)** Valeur de l'intégrale de Gauss, rappelée par l'énoncé,

Il est clair que cette série de Riemann $\sum \int_{\mathbb{R}^+} |f_n|$ converge.

On termine l'exercice :

$$I = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \sqrt{x}\, e^{-(n+1)x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n \sqrt{x}\, e^{-(n+1)x}\, dx \overset{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}}{2(n+1)^{3/2}} \overset{(2)}{=} \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right)}$$

- **(1)** Calcul effectué plus haut, sans le $(-1)^n$.
- **(2)** On rappelle que la fonction ζ de Riemann vaut (ce n'est pas au programme, juste de la culture mathématique) $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, définie ssi $x > 1$. Quand on a un $(-1)^n$, série de Riemann alternée, on procède comme suit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} + \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^x} = \frac{1}{2^{x-1}}\zeta(x) \implies \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x} = \left(\frac{1}{2^{x-1}} - 1\right)\zeta(x)}$$

Remarque : Il n'est pas possible de dire grand-chose sur le « *nombre* » $\zeta(\frac{3}{2})$. Ce n'est pas un nombre qui s'exprime à l'aide des fonctions usuelles et des nombres usuels. Très peu d'ailleurs des « *nombres* » $\zeta(x)$ s'expriment « *usuellement* ». On connaît, bien sûr $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$; les $\zeta(2n)$ s'expriment à l'aide de π^{2n} et des nombres de Bernoulli. Par exemple, pour $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$, on a « *inventé* » un nouveau nombre, le nombre d'Apéry (un mathématicien).
On trouve sur Wikipedia que $\zeta(\frac{3}{2})$ est utilisé pour calculer la température critique d'un condensat de Bose-Einstein dans une boîte à frontière périodique, et pour l'onde de spin des systèmes magnétiques, que $\zeta(3)$ intervient dans la formule de la luminance photonique de la loi de Planck, que $\zeta(4)$ apparaît quand on intègre la loi de Planck pour obtenir la loi de Stefan-Boltzmann (en dimension 3) ...

https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_z%C3%AAta_de_Riemann

Ex 9

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{izt-t^2}\cos(t)\,dt = I\ (z\in\mathbb{C})}$$

- La fonction $g : t \to e^{izt-t^2}\cos(t)$ est ***continue*** sur $\left[0,+\infty\right[$ (exponentielle complexe).
- ***Etude en*** $t=+\infty$ **:**

  $\left|g(t)\right| = \left|\cos t\right| e^{-t^2} e^{-\Im(z)t}$. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a immédiatement, par croissances comparées, $\lim_{+\infty} t^2|g(t)| = 0$, ce qui amène par ***critère*** $t^a f(t)$, comme $a=2>1$, l'intégrabilité de g en $+\infty$.

g est ***intégrable*** sur $\left[0,+\infty\right[$ donc l'intégrale I converge absolument , donc converge c'est-à-dire existe.

Remarque : Rappel : pour $z\in\mathbb{C}$, $\left|e^z\right| = e^{\Re z}$ $\qquad \arg(e^z) = \Im z$

Ex 11 Intégrales de Frullani

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $0<a<b$. On veut montrer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{a}{b}$

1) En supposant $f\,C^1$, montrez l'intégrale converge « *sur* » $\left]0,1\right]$.

2) Montrez $\displaystyle\int_\varepsilon^A \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx = \int_{aA}^{bA}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$.

3) Montrez $\dfrac{f(u)}{u}$ intégrable sur $\left[1,+\infty\right[$, puis $\displaystyle\lim_{A\longrightarrow+\infty}\int_{aA}^{bA}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = 0$

4) ✷ Montrez $\forall\eta>0$ pour ε assez petit, $\displaystyle\left|\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u} - \frac{f(0)}{u}\right| \le \eta$. Conclure.

1) $g : x \longrightarrow \frac{f(bx)-f(ax)}{x}$ est continue sur $\left]0,1\right]$. En écrivant :

$$g(x) = \frac{f(bx)-f(0)+f(0)-f(ax)}{x} = \frac{1}{b}\,\frac{f(bx)-f(0)}{bx-0} + \frac{1}{a}\,\frac{f(0)-f(ax)}{ax-0} \xrightarrow[]{x\to0} \frac{1}{b}f'(0) - \frac{1}{a}f'(0)$$

par dérivabilité de f en 0. On en déduit que g se prolonge par continuité en 0 et donc ***l'intégrabilité*** sur $\left]0,1\right]$.

2) On effectue les changement de variables $u=ax$ et $u=bx$ au bon endroit :

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^A \frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx &= \int_\varepsilon^A \frac{f(bx)}{x}\,dx - \int_\varepsilon^A \frac{f(ax)}{x}\,dx = \int_{b\varepsilon}^{bA}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{b\varepsilon}^{a\varepsilon}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{aA}^{bA}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{a\varepsilon}^{aA}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{aA}^{bA}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

3) L'intégrabilité de $\frac{f(u)}{u}$ sur $\left[1,+\infty\right[$ résulte de sa continuité et du critère de majoration d'une fonction positive par une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$: $0\le\left|\frac{f(u)}{u}\right|\le\left|f(u)\right|$. Comme le ***reste*** d'une intégrale convergente tend vers 0 (cours) :

$$\int_{aA}^{bA}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = \int_{aA}^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{bA}^{+\infty}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[A\longrightarrow+\infty]{} 0-0=0$$

4) Pour u assez proche de 0, par continuité de f en 0, on a $|f(u)-f(0)| < \dfrac{\eta}{\ln(b/a)}$. Comme $u\in[a\varepsilon,b\varepsilon]$, pour ε assez petit :

$$\left|\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u} - \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(0)}{u}\right| = \left|\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)-f(0)}{u}\right| \le \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{|f(u)-f(0)|}{u}\,\mathrm{d}u < \frac{\eta}{\ln(b/a)}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{\eta}{\ln(b/a)}\Big[\ln u\Big]_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} = \eta$$

On vient d'écrire $\forall\eta>0$, pour ε assez petit (cad $\exists\alpha>0$ tq pour $0<\varepsilon<\alpha$), alors :

$$\Big|\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u}-\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(0)}{u}\Big|=\Big|\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u}-f(0)\Big[\ln u\Big]_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\Big|=\Big|\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u}-f(0)\ln\frac{b}{a}\Big|<\eta$$

On reconnaît la définition d'une limite, plus précisément $\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u}=f(0)\ln\frac{b}{a}$. On a donc démontré :

$$\lim_{\varepsilon\to0,\ A\to+\infty}\int_{\varepsilon}^{A}\frac{f(bx)-f(ax)}{x}\,dx=-f(0)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{a}{b}$$

Mines-Telecom PSI 2022 | Mines-Ponts PC 2012 (convergence intégrale) ✷✍

Ex 12 Nature de $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\,dx$?

En posant $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}$,

- f est ***continue*** sur $]0,+\infty[$.
- ***Etude en $t=0$:***
$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}-x+o(x)}\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{1/2}}$ Le critère de Riemann $\alpha=\frac12<1$ associé à la ***positivité locale*** de f nous amène l'intégrabilité en 0.
- ***Etude en $t=+\infty$:***
Comme $\sin x=o_{+\infty}(\sqrt{x})$, $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$. Mais ***Attention!*** , à l'instar de l'intégrale de Dirichlet, cette fonction n'est pas intégrable en $+\infty$. Il faut procéder par ipp je vous rappelle pour conclure à la convergence de $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.
Attention! aussi, montrer la convergence de I ne nous permettra pas d'en déduire la convergence de $\int_1^{+\infty}f$ par ***l'équivalent***, car la fonction f n'est pas localement en $+\infty$ de signe constant. On utilise donc un ***développement*** :
$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\Big(1-\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\Big)^{-1}=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}+\frac{\sin^2 x}{(\sqrt{x})^2}+\underset{+\infty}{O}\Big(\frac{\sin^3 x}{(\sqrt{x})^3}\Big)=\underbrace{\frac{\sin x}{\sqrt{x}}}_{g(x)}+\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x}}_{k(x)}+\underbrace{\underset{+\infty}{O}\Big(\frac{1}{x^{3/2}}\Big)}_{h(x)}$$
  - $\int_1^{+\infty}g$ converge par ipp, comme l'intégrale de Dirichlet, je ne le reproduis pas ici
  - On a $k=\frac{1-\cos 2x}{2x}$ et $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ diverge (Riemann) et $\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x}$ converge par ipp également. Par sommation $\int_1^{+\infty}k$ diverge
  - $\int_1^{+\infty}h$ converge car absolument car la fonction h est ***intégrable*** en $+\infty$ (Critère grand-O et Riemann)

Conclusion : L'intégrale de l'énoncé diverge.

Centrale PSI 2023 (convergence d'intégrale à indéterminée) ✷✍

Ex 13 Soient $a>0$ et $f:[1,+\infty[\to\mathbb{R}$ continue tq $\int_1^{+\infty}f$ converge. Montrez $\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x^a}\,dx$ converge.

Rappelons que si $\int_1^{+\infty}f$ converge, on ne peut dire grand chose du comportement de f en $+\infty$. Tout au plus que, ***si*** elle a une limite, ce ne peut être que 0. Sinon, elle peut très bien n'avoir aucune limite en $+\infty$ et même ne pas être bornée (exemple vu en cours). Par contre, ses primitives sont intéressantes : si on considère $F:x\to\int_1^x f(t)\,dt$, cette fonction est bornée au voisinage de l'infini (car a une limite finie qui est l'intégrale $\int_1^{+\infty}f$ par hypothèse de convergence). Ceci donne l'idée de pratiquer un ipp, idée d'ailleurs déjà exploitée afvec l'intégrale de Dirichlet. Notons que F existe bien par l'hypothèse de continuité de f de l'énoncé. On prend $u'=f(x)\quad v=\frac{1}{x^\alpha}\quad u=F(x)\quad v'=-\alpha\frac{1}{x^{\alpha+1}}$

$$\int_1^A\frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx=\Big[\frac{F(x)}{x^\alpha}\Big]_1^A+\alpha\int_1^A\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}$$

- Comme F est ***bornée*** (par M au voisinage de l'infini) et $\alpha>0$, le 1$^{\text{er}}$ membre a une limite finie en $+\infty$.
- Comme le critère de majoration d'une fonction positive $0\le\Big|\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}\Big|\le\frac{M}{x^{\alpha+1}}$ et le critère de Riemann ***car*** $\alpha+1>1$, il en résulte l'intégrabilité de cette fonction soit la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{F(x)}{x^{\alpha+1}}$, cad l'existence de la limite du

2^{e} membre quand $A \to +\infty$

L'existence de la limite finie de l'intégrale partielle $\int_1^A \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx$ amène la convergence de l'intégrale.

Ex 14 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^3}\,dt$. Prouvez rapidement l'existence de I_n et étudiez $\lim I_n$.

L'existence de I_n résulte de l'intégrabilité de $f_n(t) = \frac{1}{n^2+t^3}$ sur $\left[0,+\infty\right[$ car :

- f ***continue*** sur $\left[0,+\infty\right[$ $(n^2+t^3$ ne s'y annule pas).
- ***Etude en*** $t = +\infty$ **:** $\left|f_n(t)\right| \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^3}$. critère $\sim$ d'une fonction ≥ 0 à une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$.

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $\left[0,+\infty\right[$ **:**

  Attention au rôle du paramètre t dans la limite lorsque $n \to +\infty$.

  Il est immédiat que $f_n(t) \longrightarrow 0$ et ce ***pour tout*** t ***réel***.

- ***Hypothèse de Domination sur*** $\left[0,+\infty\right[$ **:**

$$\forall t \in \left[0,+\infty\right[,\ \forall n n \geq 1,\ \left|f_n(t)\right| = \left|\frac{1}{n^2+t^3}\right| \leq \frac{1}{1^2+t^3} = \xi(t)$$

  ξ est ***intégrable*** sur $\left[0,+\infty\right[$: comparaison à une fonction de Riemann en $+\infty$

On en déduit $\lim I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} 0 = 0$

Mines-Telecom PSI 2022 (limite suite-intégrale)

Ex 15 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,dx$

1) Montrez la convergence de I_n.

2) Déterminez $\lim I_n$.

1) La question est un peu ambiguë : s'agit-il de la convergence de l'intégrale ou celle de la suite (I_n) ?

On pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^{n+2}}$. On a :

- f_n est ***continue*** sur $\left[0,+\infty\right[$.
- ***Etude en*** $x = +\infty$ **:** On a $f_n(x) \underset{x=+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{x^{n+2}} = \dfrac{1}{x^2}$. Le critère d'équivalent s'applique car la fonction est ***positive***. On reconnaît une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$. f_n est donc ***intégrable*** en $+\infty$

f_n est intégrable sur $\left[0,+\infty\right[$ cad l'intégrale I_n converge absolument donc converge.

2) On utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $\left[0,+\infty\right[$ **:**

$$\left\{\begin{array}{ll} x^n \to 0 \text{ si } 0 \leq x < 1 & f_n(x) \longrightarrow 0 \\ x^n \to 1 \text{ si } x = 1 & f_n(1) = \dfrac{1}{2} \longrightarrow \dfrac{1}{2} \\ x^n \to +\infty \text{ si } x > 1 & f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^n}{x^{n+2}} = \dfrac{1}{x^2} \end{array}\right\} = f(x)$$

  f est bien ***continue par morceaux*** sur $\left[0,+\infty\right[$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f sur $\mathbb{R}^+$.

- ***Hypothèse de Domination sur*** $[0,+\infty[$ **:**

$$\forall x\in[0,+\infty[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|f_n(x)\right| = \frac{x^n}{1+x^{n+2}} \leq \left\{\begin{array}{ll}\dfrac{1}{1+0} & \text{si } 0\leq x\leq 1\\ \dfrac{x^n}{0+x^{n+2}} = \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x>1\end{array}\right\} = \xi(x)$$

ξ est ***intégrable*** sur $[0,+\infty[$ car continue par morceaux et $\sim_{+\infty}\frac{1}{x^2}$

Le théorème s'appliquant : $\lim I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$

ENSAM PSI 2013 (limite d'une suite-intégrale) ✌✍

Ex 16 Déterminez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{x^n}\,dx$.

Il faut passer à l'exp du log pour voir plus clair : $f_n(x) = x^{x^n} = \exp\left(x^n\ln x\right)$. On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $]0,1]$ **:**

$x^n \longrightarrow 0$ pour $x\in[0,1[$ et $\longrightarrow 1$ pour $x=1$. Puis croissances comparées, $f_n(x)\longrightarrow \left\{\begin{array}{ll} e^0=1 & \text{si } 0<x<1\\ e^{1\times 0}=1 & \text{si } x=1\end{array}\right. = f(x)$

- ***Hypothèse de Domination sur*** $]0,1]$ **:**

$$\forall x\in]0,1],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|f_n(x)\right| = \exp\left(-x^n\left|\ln x\right|\right)\leq e^{-0} = 1 = \xi(x)$$

On a utilisé $u\longrightarrow e^{-u}$ décroissante et $x^n\left|\ln x\right|\geq 0$. L'usage de la valeur absolue permet de se rendre compte visuellement qu'il y a un - ... ξ est ***intégrable*** sur $]0,1]$: c'est une constante sur un intervalle ***borné***

On en déduit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{x^n}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1$

Ex 17 Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ et continue en 0. Etudiez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)dt$

L'intégrale existe bien car $t\to f(t^n)$ est continue par morceaux sur le ***segment*** $[0,1]$

Astuce simplifiant l'étude de la convergence simple : on écrit $I_n = \displaystyle\int_{[0,1[} f(t^n)\,dt$ (je vous laisse réfléchir pourquoi il est efficace « *d'enlever* » le 1)

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $[0,1[$ **:**

pour tout $0\leq t<1,\ t^n\longrightarrow 0$ puis $f(t^n)\longrightarrow f(0)$ ***car*** f ***continue en*** 0.

La suite de fonction (f_n) converge simplement vars la constante $f(0)$qui est bien continue par morceaux sur $[0,1[$.

- ***Hypothèse de Domination sur*** $[0,1[$ **:**

$$\forall t\in[0,1[,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|f_n(t)\right| = \left|f(t^n)\right|\leq M = \xi(t)$$

Où on a noté M la borne sup de $|f|$ sur $[0,1]$ qui existe bien car f est ***continue par morceaux*** et c'est un ***segment***.

ξ est ***intégrable*** sur $[0,1[$: c'est une constante M sur l'intervalle ***borné*** $[0,1[$.

Le théorème de Convergence Dominée de Lebesgue s'applique : $\lim\displaystyle\int_0^1 f(t^n)\,dt = \int_0^1 f(0) = f(0)\times 1 = f(0)$

Mines-Ponts PSI 2023 👩 *(limite suite-intégrale à indéterminée)* ☜ ✷✍

Ex 18 Soient $\phi\in\mathscr{C}^1([0,1],[0,1])$ et $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. On suppose que, pour tout $x\in[0,1]$, $|\phi'(x)|<1$. Calculez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f\left(\phi^n(x)\right)dx$.

En posant $g(x)=\phi(x)-x$ dérivable, il vient $g'(x)=\phi'(x)-1<0$, soit g strictement décroissante sur $\left[0,1\right]$. On a $g(0)=\phi(0)\geq 0$ et $g(1)=\phi(1)-1\leq 0$. g continue est donc bijective de $\left[0,1\right]$ sur $\left[g(1),g(0)\right]\ni 0$ et par suite, il existe un unique réel $\ell\in\left[0,1\right]$ tel que $g(\ell)=0$, soit $\phi(\ell)=\ell$. Conformément à un résultat usuel, toute suite récurrente $u_{n+1}=\phi(u_n)$ ne peut converger que vers ce point fixe, mais elle « *pourrait* » ne pas converger. C'est donc le cas de $\phi^n(x)$ pour tout x (qui doit être pris dans le sens $(\phi\circ\ldots\circ\phi)(x)$ car sinon le sens $(\phi(x))^n$ est trop « *facile* » à étudier).

Comme f' est ***continue*** sur le ***segment*** $\left[0,1\right]$, l'hypothèse $|\phi'(x)|<1$ s'écrit plus fortement $|\phi'(x)|\leq M<1$ (où d'ailleurs M peut être une borne atteinte). L'inégalité des accroissements finis amène alors $|\phi(x)-\phi(\ell)|=|\phi(x)-\ell|\leq M|x-\ell|$ puis par récurrence immédiate, $|\phi^n(x)-\ell|\leq M|x-\ell|\xrightarrow{n\to+\infty}0$. La convergence vers ℓ estr donc établie.

On termine par le théorème de convergence dominée de Lebesgue avec $f_n(x)=f(\phi^n(x))$:

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $\left[0,1\right]$:***

  $f_n(x)\to f(\ell)=\ell$ par continuité de f.

- ***Hypothèse de Domination sur $\left[0,1\right]$:***

$$\forall x\in\left[0,1\right],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|f_n(x)\right|\leq M_0=\xi(x)$$

  M_0 est la borne sup de $|f|$ continue sur le segment $\left[0,1\right]$. ξ est ***intégrable*** sur $\left[0,1\right]$: constante sur un intervalle borné.

Par application du théorème $\lim\int_0^1 f\big(\phi^n(x)\big)\,dx=\int_0^1\ell=\ell$

Remarque : Toute fonction continue ϕ du segment $\left[0,1\right]$ dans lui-même admet un point fixe (par le tvi). Ici l'hypothèse C^1, jointe à la majoration, rajoute l'unicité du point fixe ℓ (par la bijection).

Ex 20 Intégrales de Wallis [3]

On pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$

1) Etablir $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt$

2) Etablir (I_n) converge.

3) Etablir la récurrence $nI_n=(n-1)I_{n-2}$, pour $n\geq 1$, puis $I_{2n}=\dfrac{\pi\,(2n)!}{2^{2n+1}\,(n!)^2}$

4) Etablir $I_{n+1}\sim I_n$ puis $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. (*considérez la suite* $(n+1)I_nI_{n+1}$)

On vérifie, même sans question posée, que l'intégrale I_n existe, du fait de la ***continuité*** de $t\longrightarrow\cos^n(t)$ sur le ***segment*** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Le changement de variables $u=\frac{\pi}{2}-t$ $du=-dt$ amène : $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n t\,dt=\int_{\pi/2}^0\sin^n\Big(\frac{\pi}{2}-u\Big)\big(-du\big)=\int_0^{\pi/2}\cos^n u\,du$

2) On pose $f_n(t)=\sin^n(t)$ et $I=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et on applique le théorème de convergence dominée de **Lebesgue** [4] :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur I :***

  - Si $0\leq t<\frac{\pi}{2}$, $0\leq|\sin t|<1$ d'où $f_n(t)\longrightarrow 0$.
  - Si $t=\frac{\pi}{2}$, $f_n(t)=1\longrightarrow 1$

3. **John Wallis** : anglais (1616-1703). Expression du nombre π sous forme de produit infini. « *l'Arithmetique de l'infini* ».

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $f : t \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{si } t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ en escalier, donc continue par morceaux.

- ***Hypothèse de Domination sur I :***

$$\forall t \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(t)\right| = \left|\sin^n(t)\right| \leq 1 = \xi(t)$$

ξ est ***intégrable*** sur I : c'est la fonction-constante 1 sur le segment borné $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Il vient $\lim I_n = \int_0^{\pi/2} f = \int_0^{\pi/2} 0 = 0$.

3) On effectue un ipp pour $n \geq 2$ dans I_n : $u = \sin^{n-1} t \quad v' = \sin t \quad u' = (n-1)\sin^{n-2} t \cos t \quad v = -\cos t$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t \sin t \, dt = \left[-\sin^{n-1} t \cos t\right]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t \, dt \\ &\overset{(1)}{=} 0 + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t\,(1-\sin^2 t)\, dt = (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \, dt - (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

- **(1)** ***Attention!*** $\sin^{n-1}(0) = 0$ ***car*** on a pris $n \geq 2$.

$2n\, I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2}$. ***Après*** avoir remarqué que la ***dernière*** formulation de cette récurrence est $2\, I_2 = 1\, I_0$ (ce qui ***donne*** les derniers chiffres après les ... sans les « *tricher* »), par une récurrence facile, on obtiendrait :

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{n-2} = \frac{2n-1}{2n}\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times \mathbf{1}}{2n(2n-2)\times\cdots\times \mathbf{2}} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} I_0 \\ &\overset{(1)}{=} \frac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 1}{2\times n\times 2\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1} I_0 = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 1}{2^n\ n!} I_0 \\ &\overset{(2)}{=} \frac{(2n)!}{\big(2n(2n-2)\times\cdots\times 2\big)\, 2^n n!} I_0 = \frac{(2n)!}{\left(2^n\ n!\right)^2} I_0 \overset{(3)}{=} \boxed{\frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}\ n!^2}} \end{aligned}$$

- **(1)** Quand on a une multiplication de nombres ***pairs successifs***, il suffit de mettre en facteur 2, pour obtenir une expression sous forme de factorielle. On obtient $(2n)!! = 2^n\ n!$
- **(2)** Quand on a une multiplication de nombres ***impairs successifs***, pour ***obtenir une factorielle***, on multiplie et on divise par les pairs manquant, ici tous les pairs de $2n$ à 2. On obtient $(2n-1)!! = \dfrac{(2n)!}{2^n\ n!}$
- **(3)** On calcule immédiatement $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$

4) Il faut utiliser $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et la décroissance de (I_n) :

$$I_n \sim \frac{n}{n-1} I_n = I_{n-2} \leq I_{n-1} \leq I_n$$

Du théorème d'encadrement pour les équivalents, il en résulte $I_n \sim I_{n-1}$

En reprenant la formule $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ et en la multipliant par I_{n-1}, on obtient $nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$. Après une considération attentive, ceci donne finalement que la suite (nI_nI_{n-1}) est une suite constante, donc égale à $1I_1I_0$. On calcule rapidement $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1$, puis :

$$nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2} \sim nI_n^2 \quad\Longrightarrow\quad I_n^2 \sim \frac{\pi}{2n} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$$

Rappel : on peut multiplier, diviser et prendre les puissances d'équivalents.

Remarque : On pouvait obtenir un équivalent par une autre méthode : la formule de **Stirling**[5] que les élèves « *ambitieux* » peuvent retenir $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Ainsi, en reprenant la valeur de I_{2n} de Q3 :

$$I_{2n} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}\,n!^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}\,e^{2n}\,\pi}{2^{2n+1}\,e^{2n}\,2\pi n\,n^{2n}} = \sqrt{\pi}\,\frac{2^{2n+1}\,n^{2n+1/2}}{2^{2n+2}\,n^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

Mines-Ponts PSI 2023 (limite suite-intégrale à indéterminée)

Ex 21 Soient $\phi \in \mathscr{C}^1\left(\left[0,1\right],\left[0,1\right]\right)$ et $f \in \mathscr{C}^0\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$. On suppose que, pour tout $x \in \left[0,1\right]$, $|\phi'(x)| < 1$. Calculez $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f\left(\phi^n(x)\right)dx$.

En posant $g(x) = \phi(x) - x$ dérivable, il vient $g'(x) = \phi'(x) - 1 < 0$, soit g strictement décroissante sur $\left[0,1\right]$. On a $g(0) = \phi(0) \geq 0$ et $g(1) = \phi(1) - 1 \leq 0$. g continue est donc bijective de $\left[0,1\right]$ sur $\left[g(1),g(0)\right] \ni 0$ et par suite, il existe un unique réel $\ell \in \left[0,1\right]$ tel que $g(\ell) = 0$, soit $\phi(\ell) = \ell$. Conformément à un résultat usuel, toute suite récurrente $u_{n+1} = \phi(u_n)$ ne peut converger que vers ce point fixe, mais elle « *pourrait* » ne pas converger. C'est donc le cas de $\phi^n(x)$ pour tout x (qui doit être pris dans le sens $(\phi\circ\ldots\circ\phi)(x)$ car sinon le sens $(\phi(x))^n$ est trop « *facile* » à étudier).

Comme f' est ***continue*** sur le ***segment*** $\left[0,1\right]$, l'hypothèse $|\phi'(x)| < 1$ s'écrit plus fortement $|\phi'(x)| \leq M < 1$ (où d'ailleurs M peut être une borne atteinte). L'inégalité des accroissements finis amène alors $|\phi(x) - \phi(\ell)| = |\phi(x) - \ell| \leq M|x - \ell|$ puis par récurrence immédiate, $|\phi^n(x) - \ell| \leq M|x-\ell| \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. La convergence vers ℓ estr donc établie.

On termine par le théorème de convergence dominée de Lebesgue avec $f_n(x) = f(\phi^n(x))$:

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $\left[0,1\right]$ ***:***

  $f_n(x) \to f(\ell) = \ell$ par continuité de f.

- ***Hypothèse de Domination sur*** $\left[0,1\right]$ ***:***

  $$\forall x \in \left[0,1\right],\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(x)\right| \leq M_0 = \xi(x)$$

  M_0 est la borne sup de $|f|$ continue sur le segment $\left[0,1\right]$. ξ est ***intégrable*** sur $\left[0,1\right]$: constante sur un intervalle borné.

Par application du théorème $\lim\int_0^1 f\left(\phi^n(x)\right)dx = \int_0^1 \ell = \ell$

Remarque : Toute fonction continue ϕ du segment $\left[0,1\right]$ dans lui-même admet un point fixe (par le tvi). Ici l'hypothèse C^1, jointe à la majoration, rajoute l'unicité du point fixe ℓ (par la bijection).

CCP MPBQ 2023->2021 (limite suite-intégrale)

Ex 22

1) Démontrez que pour tout entier n $t \to \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $\left[0,+\infty\right[$.

2) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculez $\lim u_n$.

Cet exercice fait partie de la banque d'exos CCINP MP, n°25.

Vous pouvez regarder la correction fournie par le concours : Banque CCINP MP 2023 avec corrigés

5. **James Stirling** : mathématicien écossais (1692-1770). Connu pour la formule donnant l'équivalent de la factorielle.

Ex 23 On pose $J_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt$.

1) Donnez $\lim J_n$ à l'aide de l'exercice sur les intégrales de Wallis. *On pourra faire un changement de variables.*

2) Calculez $\lim J_n$ à l'aide de la fonction caractéristique $\mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}$ et Lebesgue. En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.

1)

On utilise le changement de variables $t = \sqrt{n}\sin u \quad dt = \sqrt{n}\cos u \,\mathrm{d}u$ avec $0 \le u \le \frac{\pi}{2}$ qui ramène à une intégrale de **Wallis**[3] puis on utilise l'équivalent donné :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 u)^n \sqrt{n}\cos u \,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} u \,\mathrm{d}u = \sqrt{n}\, I_{2n+1} \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \longrightarrow \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

2) Je rappelle que la fonction caractéristique de A notée $\mathbf{1}_A$ est la fonction qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 sinon. Par conséquent :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} \underbrace{\mathbf{1}_{[0,\sqrt{n}]}(t)\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n}_{f_n(t)} dt \quad \text{avec } f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \le t \le \sqrt{n} \\ 0 & \text{si } t > \sqrt{n} \end{cases}$$

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $[0,+\infty[$ **:**

  Pour ne pas faire n'importe quoi, on commence par remarquer qu'à partir d'un certain rang, ***pour t fixé***, on a $t \le \sqrt{n}$, ***donc à partir d'un certain rang (apcr)*** $f_n(t) = \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n$, puis :

  $$\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\underbrace{\frac{t^2}{n}}_{\to 0}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{t^2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(-t^2+o(1)\right) \xrightarrow{n\to+\infty} \exp\left(-t^2\right)$$

- ***Hypothèse de Domination sur*** $[0,+\infty[$ **:**

  $$\forall t \in [0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(t)\right| = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{t^2}{n}\right)\right) \le \exp\left(n\times\frac{-t^2}{n}\right) = \exp\left(-t^2\right) = \xi(t)$$

  On a utilisé l'inégalité de convexité usuelle (à savoir par cœur) $\ln(x) \le x-1$ (ou de manière équivalente $\ln(1+x) \le x$) pour tout $x > 0$ et la croissance de l'exponentielle. ξ est ***intégrable*** sur $[0,+\infty[$: continuité et critère $t^a f(t)$: $\lim_{+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$

Le théorème de Lebesgue amène $\lim J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$. L'unicité de la limite et Q1 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et, par parité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = 2\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

Remarque : On aura reconnu l'intégrale de **Gauss**[6].

Centrale PSI (suite-intégrale à indéterminée)

Ex 24 Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $f(1) \neq 0$. Trouvez un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\, dt$

On effectue le changement de variables $u = t^n$ sur $[0,1]$, soit $t = \sqrt[n]{u}$ puis $dt = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u$:

$$u_n = \int_0^1 t^n f(t)\, dt = \int_0^1 u f(u^{1/n})\frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}u = \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^1 f(u^{1/n})u^{1/n}\mathrm{d}u}_{I_n} \sim \frac{1}{n}f(1)$$

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour prouver l'équivalent de l'intégrale I_n :

3. **John Wallis** : anglais (1616-1703). Expression du nombre π sous forme de produit infini. « *l'Arithmetique de l'infini* ».
6. **Carl Friedrich Gauss** : allemand (1777-1855). Contribution fondamentales en ***Théorie des Nombres*** et ***Géométrie***.

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $[0,1]$ **:**

  $f_n(u) = f(u^{1/n})u^{1/n} \longrightarrow f(1)$ car $u^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln u} \to e^0 = 1$ et par ***continuité*** de f en 1, et ce pour tout $t \in I = [0,1]$

- ***Hypothèse de Domination sur*** $[0,1]$ **:**

  $$\forall u \in [0,1], \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left|f_n(u)\right| \leq M\, u^{\frac{1}{n}\times 0} = M = \xi(u)$$

  où $M = \sup_{0,1}|f|$, noté en général $\|f\|_\infty$, sup qui existe par continuité de f sur un segment. ***Attention!*** $\ln u \leq 0$ sur $[0,1]$ donc se majore par la valeur en 0, par la décroissance de $x \to e^{-x}$. ξ est ***intégrable*** sur $[0,1]$: constante sur un intervalle borné.

On termine donc par $\lim I_n = \displaystyle\int_0^1 f(1)\,dt = f(1)$

(limite suite-intégrale) ✍

Ex 25 Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue. Etudiez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_1^{1+1/n} f(x^n)\,dx$

On remarque rapidement que cette intégrale existe par ***continuité*** sur l'intervalle ***fermé*** $\left[1, 1+\frac{1}{n}\right]$. Le théorème de Lebesgue ne peut s'appliquer car il y a une borne variable. On effectue le changement de variables $u = x^n$, soit, comme $x \geq 0$, $x = u^{1/n}$, d'où $dx = \frac{1}{n}u^{1/n-1}\,\mathrm{d}u$. On utilise l'astuce de la ***fonction caractéristique*** d'un ensemble (par exemple A) notée par $\chi_A(x)$ ou $1_A(x)$ et qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$, ce qui permet d'avoir ***une borne fixe*** :

$$I_n = \int_0^{(1+1/n)^n} f(u)u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u = \int_1^e \underbrace{\chi_{\left[1,1+\frac{1}{n}\right]}(u)f(u)u^{\frac{1}{n}-1}}_{f_n(u)}\,\mathrm{d}u$$

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue sur l'intervalle $[1, e[$:

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $[1,e[$ **:**

  Par définition, $f_n(u) = \begin{cases} f(u)u^{\frac{1}{n}-1} & \text{si } 1 \leq u \leq 1+\frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } 1+\frac{1}{n} < u \leq e \end{cases}$

  Soit u ***fixé*** tel que $1 \leq u < e$. Comme on a $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim e^{1+o(1)} = e^1 = e$, alors ***à partir d'un certain rang***, on a nécessairement (à cause du $< e$), $1 \leq u \leq 1+\frac{1}{n}$, il ***suit à partir d'un certain rang*** que la valeur de $f_n(u)$ ***n'est pas*** 0 puis :

  $$f_n(u) = f(u)u^{\frac{1}{n}-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(u)u^{-1} = \frac{f(u)}{u}$$

  On a donc ***convergence simple*** de la suite de fonctions (f_n) ***sur l'intervalle*** $[1,e[$ vers la fonction g définie par $g(u) = \frac{f(u)}{u}$ qui est bien ***continue*** sur ce même intervalle (parce qu'il n'y a pas 0).

- ***Hypothèse de Domination sur*** $[1,e[$ **:**

  $$\forall u \in [1,e[, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \left|f_n(u)\right| = \left|f(u)u^{\frac{1}{n}-1}\right| = \left|\frac{f(u)}{u}\right| e^{\frac{1}{n}\ln u} \leq \frac{M}{1}e^{1\times\ln e} = M\,e = \xi(u)$$

  La fonction f est continue par morceaux sur le ***segment*** $[1,e]$, donc y est bornée par $M = \|f\|_\infty$. D'autre part $0 \leq \ln u \leq \ln e$, par croissance de la fonction logarithme. ξ est ***intégrable*** sur $[1,e[$: c'est la fonction-constante $M\,e$ est ***intégrable*** sur l'intervalle ***borné*** $[1,e[$

Il suit $\lim I_n = \lim \displaystyle\int_{[1,e[} f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{[1,e[} \lim f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{[1,e[} g(u)\,\mathrm{d}u = \boxed{\int_1^e \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$

CCP PSI (limites suites-intégrales) ✍

Ex 26 Montrez que $f_n(x) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis étudiez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} f_n$

1) L'***intégrabilité*** sur $]0,+\infty[$ de $f_n(x) = \dfrac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$ résulte de :

- f_n ***continue*** sur $\left]0,+\infty\right[$ pour tout $n \geq 1$.
- ***Etude en*** $x = 0$ **:**
  $\left|f_n(x)\right| \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x/n}{x} = \dfrac{1}{n}$ La fonction f_n se prolonge en une fonction continue en 0 d'où l'***intégrabilité*** en 0.
- ***Etude en*** $x = +\infty$ **:**
  $$\left|f_n(x)\right| \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{x^3} \text{ car } \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \ln\left(\frac{x}{n}\left(1+\frac{n}{x}\right)\right) = \ln\left(\frac{x}{n}\right) + \ln\left(1+\underbrace{\frac{n}{x}}_{\to 0}\right) = \ln(x) - \ln(n) + \frac{n}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \sim_{+\infty} \ln x$$
  On termine par l'utilisation du critère : $\lim\limits_{+\infty} x^2 \dfrac{\ln x}{x^3} = 0$ qui amène l'intégrabilité en $+\infty$.

2) Pour cette première limite, il est inutile d'appliquer le théorème de Lebesgue, la majoration usuelle de convexité du ln, cad $\ln(1+x) \leq x$, nous permettra de conclure :
$$0 \leq \left|\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\right| dx \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\right| dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{n}\,\frac{1}{x\,(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

3) On utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (g_n) ***sur*** $\left]0,+\infty\right[$ **:**
  On donne un équivalent mais ***Attention!*** à ne pas se tromper de variable et au rôle éventuel du paramètre x :
  $$g_n(x) = n\frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\times\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pour tout } x \text{ car } \frac{x}{n} \longrightarrow 0$$
  Par suite, la suite de fonctions (g_n) converge simplement vers $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\left[0,+\infty\right[$ qui est bien ***continue par morceaux*** sur $\left]0,+\infty\right[$.

- ***Hypothèse de Domination sur*** $\left]0,+\infty\right[$ **:**
  $$\forall x \in \left]0,+\infty\right[,\ \forall n \geq 1,\ \left|g_n(x)\right| = \left|n\frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\right| \leq n\,\frac{\frac{x}{n}}{x(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2} = \xi(x)$$
  On a appliqué l'inégalité (de convexité) usuelle $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$ ξ est ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$: immédiat.

Il vient alors $\lim n \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left[\arctan(x)\right]_0^{x\to+\infty} = \frac{\pi}{2}$

Ex 27 Montrez l'existence de $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,dt$ puis $\lim I_n = 0$. Etablir $I_n \sim_{+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}\,dy$

L'existence de I_n résulte de l'***intégrabilité*** de $f_n(t) = e^{-t^n}$ sur $I = \left[1,+\infty\right[$ car :

- f_n est ***continue*** sur I
- ***Etude en*** $t = +\infty$ Critère $t^\alpha f(t)$: $\lim_{+\infty} t^2 e^{-t^n} = 0$ par croissances comparées, pour $n \geq 1$.

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** I **:**
  Pour $t > 1$, $t^n \to +\infty$ et par suite $f_n(t) \xrightarrow{n\to+\infty} e^{-\infty} = 0$. Néanmoins ***Attention au cas*** $t = 1$ car $f_n(1) = e^{-1} \to e^{-1}$.
  La suite de fonctions (f_n) converge simplement,t sur I vers $f : \begin{cases} 0 & \text{si } t > 1 \\ e^{-1} & \text{si } t = 1 \end{cases}$, fonction en escalier, donc continue par morceaux sur I.

- ***Hypothèse de Domination sur*** I **:**

$$\forall t \in I,\ \forall n \geq 1,\ \left|f_n(t)\right| = \left|e^{-t^n}\right| = e^{-t^n} \leq e^{-t} = \xi(t)$$

pour $t \geq 1, t \leq t^n$ et on a appliqué la décroissance de $u \to e^{-u}$. ξ est ***intégrable*** sur I : critère $t^2 f(t)$ en $+\infty$

Le théorème permet alors d'écrire $\lim I_n = \int_1^{+\infty} 0 = 0$.

On effectue le changement de variables $u = t^n$, C^1 et bijectif de I vers I et $t = u^{1/n}$ $dt = \dfrac{1}{n} u^{1/n-1}\,\mathrm{d}u$

$$I_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \underbrace{e^{-u} u^{\frac{1}{n}-1}}_{g_n(u)}\,\mathrm{d}u$$

On applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue à cette intégrale (notée J_n) :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (g_n) ***sur*** $\left[1,+\infty\right[$ **:**

  pour tout $u \geq 1$, $e^{-u} u^{\frac{1}{n}-1} = \exp\Big(-u + (\dfrac{1}{n} - 1)\ln u\Big) \longrightarrow \exp\Big(-u - \ln u\Big) = \dfrac{e^{-u}}{u}$

- ***Hypothèse de Domination sur*** $\left[1,+\infty\right[$ **:**

$$\forall u \in \left[1,+\infty\right[,\ \forall n \geq 1,\ \left|g_n(u)\right| = \left|e^{-u} u^{\frac{1}{n}-1}\right| = e^{-u}\ \exp\Big((\frac{1}{n} - 1)\ln u\Big) \leq e^{-u} \times \exp\big(0\big) = \xi(u)$$

  La majoration est justifiée par la croissance de l'exponentielle. ξ est ***intégrable*** sur $\left[1,+\infty\right[$: immédiat

Par suite $J_n \longrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u = K$, donc $I_n \sim \dfrac{1}{n} K$.

Remarque : Il y a une petite erreur de raisonnement, la voyez-vous ?

CCP PSI 2018-2015-2014-2013 (équivalent d'une suite-intégrale) ✍

Ex 28

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}\,dt$. Justifiez l'existence de I_n. Déterminez $\lim I_n$ puis un équivalent de I_n.

1) La convergence de l'intégrale I_n résulte de ***l'intégrabilité*** de $f_n(t) = \dfrac{\sin(t/n)}{t(1+t^2)}$ sur $\left]0,+\infty\right[$ car : :

- f_n est ***continue*** sur $\left]0,+\infty\right[$.
- $|f_n(t)| \sim_0 \dfrac{t/n}{t \times 1} = \dfrac{1}{n}$. f_n se prolonge en une fonction continue en 0 et donc ***intégrable*** en 0.
- $|f_n(t)| \leq \dfrac{1}{t(1+t^2)} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{t^3}$ Le critère de majoration d'une fonction ***positive*** et le critère de **Riemann**[1] $(a = 3 > 1)$ permet de conclure à l'***intégrabilité*** de f_n en $+\infty$.

2) Pour déterminer $\lim I_n$, on utilise le théorème de convergence dominée de **Lebesgue**[4] :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (f_n) ***sur*** $\left]0,+\infty\right[$ **:**

  Pour tout $t \in \left]0,+\infty\right[$, $\frac{t}{n} \longrightarrow 0$, donc $f_n(t) \longrightarrow 0$. On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge ***simplement*** vers la fonction nulle sur $\left]0,+\infty\right[$.

- ***Hypothèse de Domination sur*** $\left]0,+\infty\right[$ **:**

$$\forall t \in \left]0,+\infty\right[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(t)\right| \leq \frac{|t/n|}{t(1+t^2)} = \frac{1}{n(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2} = \xi(t)$$

  ξ est ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$: immédiat

1. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

4. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941). Reconnu pour sa théorie de l'intégration initiée dans sa thèse de 1902 « *Intégrale, longueur, aire* ».

On conclut $\lim I_n = \int_0^{+\infty} 0 = 0$

3) Il fallait conjecturer que l'ordre de grandeur de l'équivalent était $\frac{1}{n}$ d'où l'idée de considérer nI_n.

On écrit $nI_n = \int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin(t/n)}{(t/n)(1+t^2)}}_{g_n(t)} dt$. Appliquons à nouveau le théorème de convergence dominée :

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** (g_n) ***sur*** $\left]0,+\infty\right[$ ***:***

  pour tout $t \in \left]0,+\infty\right[$, comme $\frac{t}{n} \longrightarrow 0$ et en rappelant $\lim_0 \frac{\sin u}{u} = 1$, on en déduit que $g_n(t) \longrightarrow \frac{1}{1+t^2} = h(t)$. la suite de fonctions (g_n) converge donc simplement vers h sur $\left]0,+\infty\right[$.

- ***Hypothèse de Domination sur*** $\left]0,+\infty\right[$ ***:***

$$\forall t \in \left]0,+\infty\right[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|g_n(t)\right| = \left|\frac{\sin(t/n)}{(t/n)(1+t^2)}\right| \leq \frac{|t/n|}{t/n(1+t^2)} = \frac{1}{1+t^2} = \xi(t)$$

  On a utilisé l'inégalité de convexité usuelle $\left|\sin u\right| \leq |u|$. ξ est ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$: immédiat

On conclut $\lim nI_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)\,dt = \left[\arctan t\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$, puis $\boxed{I_n \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{n}}$.

Centrale PSI 2022 (suite-intégrale à indéterminées)

Ex 29 Soient $u, v \in \mathscr{C}^0\left(\left[0,1\right], \mathbb{R}^{+*}\right)$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 u(t)^n v(t)\,dt$.

1) Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1}^2 \leq I_n I_{n+2}$.

2) En déduire que la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ converge et que sa limite ℓ vérifie $0 < \ell \leq \|u\|_\infty$.

3) Soit (x_n) une suite de limite y. Montrez $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \longrightarrow y$. En déduire $I_n^{1/n} \longrightarrow \ell$.

4) Minorez (I_n) puis montrez $I_n^{1/n} \longrightarrow \|u\|_\infty$.

1) Question assez délicate. On va utiliser les sommes de Riemann. Pour alléger l'écriture, on note $u_k = u(\frac{k}{p})$, $v_k = v(\frac{k}{p})$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} u_k^{n+1} v_k\right)^2 &= \frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{p} u_k^{2n+2} v_k^2 + \frac{2}{p^2}\sum_{i<k} u_k^{n+1} v_k u_i^{n+1} v_i = \frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{p} u_k^{n+2} u_k^n v_k^2 + \frac{2}{p^2}\sum_{i<k} u_k^n v_k u_i^n v_i u_k u_i \\
&\overset{(1)}{\leq} \frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{p} u_k^{n+2} u_k^n v_k^2 + \frac{1}{p^2}\sum_{i<k} u_k^n u_i^n (u_k^2 + u_i^2) v_k v_i = \frac{1}{p^2}\Big(\sum_{k=1}^{p} u_k^{n+2} u_k^n v_k^2 + \sum_{i<k} u_k^{n+2} u_i^n v_k v_i + \sum_{i<k} u_k^n u_i^{n+2} v_k v_i\Big) \\
&= \frac{1}{p^2}\Big(\sum_{k=1}^{p} u_k^{n+2} u_k^n v_k v_k + 2\sum_{i<k} u_k^{n+2} u_i^n v_k v_i\Big) = \frac{1}{p^2}\sum_{1\leq i,k\leq p} u_k^{n+2} u_i^n v_k v_i \overset{(2)}{=} \frac{1}{p^2}\Big(\sum_{k=1}^{p} u_k^{n+2} v_k\Big)\Big(\sum_{i=1}^{p} u_i^n v_i\Big)
\end{aligned}$$

- **(1)** on utilise l'égalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$, provenant du développement de $(a-b)^2 \geq 0$.
- **(2)** $\sum_{i\in I} a_i \times \sum_{k\in J} b_k = \sum_{(i,k)\in I\times J} a_i b_k$

En passant à la limite lorsque $p \to +\infty$ dans les 2 membres « *extrêmes* » de l'inégalité, on obtient l'inégalité intégrale demandée, par les sommes de Riemann, car u, v continues sur $[0,1]$ par hypothèse.

2) $I_n > 0$ par croissance de l'intégrale et l'hypothèse de ***continuité*** et $u, v > 0$. Puis, de $I_{n+1}I_{n+1} \leq I_n I_{n+2}$, il suit $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \frac{I_{n+2}}{I_{n+1}}$, soit la croissance de la suite $\left(\frac{I_{n+1}}{I_n}\right)$.

$$I_{n+1} = \left|I_{n+1}\right| \leq \int_0^1 \left|u^{n+1}(t)v(t)\right|\,dt = \int_0^1 u(t)^n v(t) u(t)\,dt \leq \int_0^1 u(t)^n v(t)\|u\|_\infty\ dt = \|u\|_\infty I_n$$

On a donc la majoration par $\|u\|_\infty$, il suit la convergence vers $\ell \leq \|u\|_\infty$. $\ell > 0$ est immédiat, puisque $\frac{I_{n+1}}{I_n} \geq \frac{I_1}{I_0} > 0$. On rappelle que $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$, le $[a,b]$ dépendant de l'exercice. C'est une norme, la norme de la convergence uniforme. On en parlera lors du cours sur les evn en mars.

3) On reconnaît la moyenne de Césaro que je redémontre très vite. On peut commencer par remarquer, pour alléger la démo, que ceci équivaut à si $x_n - y \to 0$, alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(x_k - y) \to 0$, on ne le démontre donc que pour $y = 0$:

Soit $\varepsilon > 0$ fixé.

• $x_n \to 0$, donc il existe une rang N_1 tq pour $n \geq N_1$, $|x_n| < \varepsilon$.

• Ce N_1 étant fixé, $\dfrac{\sum_{k=0}^{N_1} x_k}{n} \longrightarrow 0$ donc il existe un entier N_2 tq pour $n \geq N_2$, $\dfrac{\sum_{k=0}^{N_1} x_k}{n} < \varepsilon$.

Prenons $N_0 = \max(N_1, N_2)$

$$\forall n \geq N_0,\ \left|\frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}{n}\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N_1} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-1} x_k\right| \leq \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{N_1} x_k\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-1} |x_k| \leq \varepsilon + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n-1} \varepsilon \leq \varepsilon + \frac{n-N_1-1}{n}\varepsilon \leq 2\varepsilon$$

On a $\frac{I_{n+1}}{I_n} \longrightarrow \ell$ donc, par continuité du ln en $\ell > 0$, $\ln I_{n+1} - \ln I_n \longrightarrow \ln \ell$ et en appliquant la théorème de Césaro, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\ln I_{k+1} - \ln I_k) = \frac{1}{n}\ln I_{n+1} - \frac{1}{n}\ln I_0 \longrightarrow \ln \ell$. Ceci amène d'abord $\frac{1}{n}\ln I_{n+1} \longrightarrow \ell$ puis $\frac{1}{n+1}\ln I_{n+1} \longrightarrow \ell$, soit aussi $\frac{1}{n}\ln I_n$ et en composant la limite avec exp, par continuité de l'exponentielle, $I_n^{1/n} \longrightarrow e^{\ln \ell} = \ell$.

4) Comme $[0,1]$ est un segment, $\|u\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|$ est « *atteint* » en x_0. Prenons $0 < \alpha < 1$, par continuité, il existe un segment $[a,b]$, voisinage de x_0 dépendant de α, sur lequel $u(t) \geq \alpha|f(x_0)| = \alpha\|u\|_\infty$. Par ***positivité*** de la fonction-intégrande :

$$I_n = \int_0^1 u^n(t)v(t)\,dt \geq \int_a^b u^n(t)v(t)\,dt \geq \int_a^b \alpha^n \|u\|_\infty{}^n v(t)\,dt$$

Par croissance de $x \to x^{1/n}$, qui conserve donc l'inégalité, $I_n^{1/n} \geq \alpha\|u\|_\infty \left(\int_a^b v(t)\,dt\right)^{1/n}$. En passant à la limite lorsque $n \longrightarrow +\infty$, il vient $\ell \geq \alpha\|u\|_\infty \times 1$. Comme ceci est vrai pour tout $0 < \alpha < 1$, il suit $\ell \geq \|u\|_\infty$. De l'inégalité de la question précédente, on en déduit $\ell = \|u\|_\infty$.

Mines-Ponts PSI 2022 (Calcul de zeta(2))

Ex 30 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

1) Montrez que $\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$.

On admet que le résultat est encore vrai si f est seulement continue par morceaux.

2) Calculez $\int_0^\pi \left(-x + \frac{x^2}{2\pi}\right)\cos(nx)\,dx$

3) En déduire la somme de la série de terme général $\frac{1}{n^2}$

1) On effectue une ipp, pour « *sortir* » le $\frac{1}{n}$: $u = f(t)$ $\quad v' = \cos(nt)$ $\quad u' = f'(t)$ $\quad v = \frac{1}{n}\sin(nt)$:

$$\int_a^b f(t)\cos(nt)\,dt = \left[f(t)\frac{1}{n}\sin(nt)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt$$

Par continuité sur un segment, f (rp. f') sont bornées par M_0 (M_1). Pour conclure, on majore ensuite proprement (***Attention!*** à ne pas « *tricher* » dans la gestion des valeurs absolues)

$$\left|f(b)\frac{1}{n}\sin(nb) - f(a)\frac{1}{n}\sin(na)\right| \leq \frac{2M_0}{n} \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin(nt)\,dt\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b \left|f'(t)\sin(nt)\right|dt \leq \frac{M_1(b-a)}{n}$$

La conclusion suit.

Remarque : Ce résultat, appelé lemme (ou théorème) de Riemann-Lebesgue s'étend aux fonctions ***intégrables*** sur $]a,b[$ (par ***densité*** des fonctions C^1), C^1 n'est pas vraiment nécessaire mais facilite la démonstration. A noter aussi que, ce résultat, vrai pour $\sin(nt), \cos(nt)$ l'est aussi pour e^{int}

2) On cherche une primitive de $\left(-x + \frac{1}{2\pi}x^2\right)e^{inx}$ sous la forme $(ax^2+bx+c)e^{inx}$

$$\left((ax^2+bx+c)e^{inx}\right)' = e^{inx}\left(ianx^2 + (inb+2a)x + (inc+b)\right) \quad \left\{\begin{array}{rcl} \frac{1}{2\pi} &=& ian \\ -1 &=& inb+2a \\ 0 &=& inc+b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& \frac{-1}{2n\pi}\,i \\ b &=& \frac{1}{n^2\pi} + \frac{1}{n}\,i \\ c &=& -\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3\pi}\,i \end{array}\right.$$

$$\int_0^\pi \Big(-x+\frac{x^2}{2\pi}\Big)\cos(nx)\,dx = \Re\left(\Big[\Big(\frac{-1}{2n\pi}\,ix^2+\Big(\frac{1}{n^2\pi}+\frac{1}{n}\,i\Big)x+\Big(-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3\pi}\,i\Big)\Big)\,e^{inx}\Big]_0^\pi\right)$$
$$=\frac{1}{n^2\pi}\big(\pi(-1)^n-0\big)+-\frac{1}{n^2}\big(((-1)^n-1\big)=\frac{1}{n^2}$$

3) On calcule d'abord, pour $e^{ix}\neq 1$, en appliquant la formule $\cos a\sin b=\frac{1}{2}\big(\sin(a+b)-\sin(a-b)\big)$

$$\sum_{n=0}^{N}\cos(nx)=\sum_{n=0}^{N}\Re\big(e^{inx}\big)=\Re\Big(\sum_{n=0}^{N}\big(e^{ix}\big)^n\Big)=\Re\Big(\frac{1-\big(e^{ix}\big)^{N+1}}{1-e^{ix}}\Big)=\Re\Big(e^{i\frac{x}{2}(N+1)-i\frac{x}{2}}\,\frac{-2i\sin\big((N+1)\frac{x}{2}\big)}{-2i\sin\big(\frac{x}{2}\big)}\Big)$$
$$=\cos\big(N\frac{x}{2}\big)\frac{\sin\big((N+1)\frac{x}{2}\big)}{\sin\big(\frac{x}{2}\big)}=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\big((2N+1)\frac{x}{2}\big)-\sin\frac{x}{2}}{\sin\big(\frac{x}{2}\big)}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{\sin\big((2N+1)\frac{x}{2}\big)}{\sin\big(\frac{x}{2}\big)}$$

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{N}\int_0^\pi\Big(-x+\frac{x^2}{2\pi}\Big)\cos(nx)\,dx \overset{(1)}{=} \int_0^\pi\sum_{n=0}^{N}\Big(-x+\frac{x^2}{2\pi}\Big)\cos(nx)\,dx \overset{(2)}{=} \int_{]0,\pi]}\Big(-x+\frac{x^2}{2\pi}\Big)\sum_{n=0}^{N}\cos(nx)\,dx$$
$$\overset{(3)}{=}\int_{]0,\pi]}\Big(-x+\frac{x^2}{2\pi}\Big)\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{\sin\big((2N+1)\frac{x}{2}\big)}{\sin\big(\frac{x}{2}\big)}\Big)\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^\pi\Big(-x+\frac{x^2}{2\pi}\Big)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{-x+\frac{x^2}{2\pi}}{\sin\frac{x}{2}}\,\sin\big((2N+1)\frac{x}{2}\big)\,dx$$
$$\xrightarrow[N\to+\infty]{(4)}\ -\frac{1}{2}\int_0^\pi\Big(-x+\frac{x^2}{2\pi}\Big)\,dx\ =\ \frac{\pi^2}{6}$$

- **(1)** Parce que la somme est ***finie***, c'est la linéarité de l'intégration.
- **(2)** On « *enlève* » 0 pour la complication de l'égal d'après. Je rappelle, si f intégrable sur $]a,b]$, $\int_a^b f=\int_{]a,b]}f=\int_{]a,b[}f$
- **(3)** On applique la formule établie plus haut car $e^{ix}\neq 1$ sur $]0,\pi]$
- **(4)** On utilise le lemme de Riemann-Lebesgue. En accord avec Q1, il faut vérifier que la fonction utilisée $\frac{-x+\frac{x^2}{2\pi}}{\sin\frac{x}{2}}$ est bien continue par morceaux sur $[0,\pi]$ ou même sur $]0,\pi]$. L'équivalent $\sim_0 -2$ établit le fait qu'il y a bien une limite finie (***Attention!*** une fonction continue par morceaux ne doit pas avoir de limite infinie aux « *bornes des morceaux* »)

IMT PSI 2017 (intégrale à paramètre) ✍

Ex 33 On pose pour x réel $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cosh(xt)\,dt$.

1) Montrez que F est de classe C^1.

2) Donnez une équation différentielle vérifiée par F.

3) Calculez F. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On pose $I=[0,+\infty[$, $J=\mathbb{R}$, $f(x,t)=e^{-t^2}\cosh(xt)$. On peut remarquer F paire.

1) On commence par démontrer F définie sur $\mathbb{R}$ par l'***intégrabilité*** de $t\to f(x,t)$ sur I puisque de toute façon, c'est une hypothèse du théorème C^1, et bien ***pour tout*** x réel. :

- $t\to f(x,t)$ ***continue*** sur $[0,+\infty[$, $\boxed{\textbf{\textit{pour tout }} x \text{ réel}}$
- ***Etude en*** $t=+\infty$

  $\left|e^{-t^2}\cosh(xt)\right|\sim_{t=+\infty} e^{-t^2}\frac{1}{2}e^{|x|t}$

  On termine par le critère $x^\alpha g(x)$: $\lim_{t\to+\infty} t^2e^{-t^2}\frac{1}{2}e^{|x|t}=0$ (dire par croissances comparées c'est « *tricher* ») :

  $t^2e^{-t^2}\dfrac{1}{2}e^{xt}=\dfrac{1}{2}\exp\big(2\ln t-t^2+xt\big)$ et $2\ln t-t^2+xt\underset{t\to+\infty}{\sim}-t^2\xrightarrow{t\to+\infty}-\infty\implies\lim\limits_{+\infty}t^2e^{-t^2}\dfrac{1}{2}e^{xt}=e^{-\infty}=0$ ***pour tout*** x réel

On applique le théorème C^1 d'une intégrale à paramètre seulement sur $J=\mathbb{R}^+$ ***par parité*** :

- $\forall x\in J$, $t\longrightarrow f(x,t)$ est ***intégrable*** sur $[0,+\infty[$ (fait plus haut)
- $\forall x\in J$, $t\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=t\,e^{-t^2}\sinh(xt)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.

- $\forall t \in [0,+\infty[$, $x \longrightarrow f(x,t)$ est C^1 sur J.
- **Hypothèse de Domination sur tout segment** $[a,b] \subset J$ **:**

$$\forall x \in [a,b] \subset J,\ \forall t \in [0,+\infty[,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|t\, e^{-t^2} \sinh(xt)\right| = t\, e^{-t^2} \sinh(2xt) \leq t\, e^{-t^2} \sinh(2bt) = \xi(t)$$

car la fonction sinh est ***croissante*** et positive sur $\mathbb{R}^+$. ξ est ***intégrable*** sur $[0,+\infty[$ (critère $t^2 g(t)$ comme plus haut)

Alors F est de classe C^1, continue et définie sur J.

Note : Si on avait pas vu la parité, sur $\mathbb{R}$, il aurait fallu prendre $\max(|a|,|b|)$ ***car*** $t \geq 0$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F'(x) = \int_0^{+\infty} t\, e^{-t^2} \sinh(xt)\, dt}$

2) Il faut trouver un lien entre $\int_0^{+\infty} t\, e^{-t^2} \sinh(xt)\, dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cosh(xt)\, dt$ Il faut penser à une ipp...
Ne pas oublier que le e^{-t^2} ne se primitive pas (par des fonctions connues) ***mais par contre*** $t e^{-t^2}$ se primitive très bien ...
On pose : $u' = t e^{-t2}$ $v = \sinh(xt)$ $u = -\frac{1}{2}e^{-t^2}$ $v' = x\cosh(xt)$

Attention! à ne pas écrire une ipp en $+\infty$ ***directement***. Il faut bien gèrer (relire le cours). Ici, le plus rapide est de procéder comme cela :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} t\, e^{-t^2} \sinh(xt)\, dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \sinh(xt)\right]_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2} x\cosh(xt)\, dt = \frac{1}{2}xF(x)$$

Cette ipp est licite car la deuxième intégrale converge puisque l'on reconnaît $xF(x)$. On obtient l'égalité demandée. Ensuite c'est du cours de Sup F est solution ***sur*** $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre : $y' - \frac{1}{2}xy$ qui s'intègre en :

$$F(x) = C\, \exp\left(\int \frac{1}{2}x\, dx\right) = C\, e^{x^2/4}$$

Reste à trouver la constante donnée par l'énoncé et la valeur en 0, $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ex 35 Soient $\alpha > 1$ et $F : x \to \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x^2)^\alpha}$.

1) Déterminez le domaine de définition de F.

2) Montrez que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

3) Etudiez l'intégrabilité de F sur son domaine de définition.

(*Indication rajoutée* : on pourra chercher β tel que $\lim_{+\infty} x^\beta F(x) = 0$)

---

1) On commence par remarquer que la fonction (de x) est paire, ce qui permet, si besoin est, de ne l'étudier que sur $\mathbb{R}^+$.
Après avoir posé $f(x,t) = \frac{1}{(t^2+x^2)^\alpha}$, on écrit :

- $t \longrightarrow f(x,t)$ est ***continue*** par sur $[1,+\infty[$ et ceci ***pour tout*** x réel.
- $|f(x,t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2\alpha}}$ et ceci pour tout x réel. Du critère d'équivalence d'une fonction ***positive*** et du critère de Riemann, il vient que $t \to f(x,t)$ est ***intégrable*** en $+\infty$, car $2\alpha > 2 > 1$. ***pour tout*** x réel.

On en déduit que $t \to f(x,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et ce, ***pour tout*** x réel, ce qui s'écrit $\mathrm{Def}F = \mathbb{R}$ (***Attention!*** à ne pas confondre le rôle de x et celui de t.

2) On utilise le théorème C^1 d'une intégrale à paramètre avec $J = \mathbb{R}$, $I = [1,+\infty[$:

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longrightarrow f(x,t)$ est ***intégrable*** sur $[1,+\infty[$ (question précédente)
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $t \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-2\alpha x}{(t^2+x^2)^{\alpha+1}}$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$.
- $\forall t \in [1,+\infty[$, $x \longrightarrow f(x,t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
- **Hypothèse de Domination sur tout segment** $[a,b] \subset \mathbb{R}$ **:**

$$\forall x \in [a,b] \subset \mathbb{R},\ \forall t \in [1,+\infty[\ ,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{-2\alpha x}{(t^2+x^2)^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{2\alpha \max(|a|,|b|)}{(t^2+0)^{\alpha+1}} = \xi(t)$$

ξ est ***intégrable*** sur $[1,+\infty[$: continuité et $\xi(t) \sim_{+\infty} \dfrac{2\max(|a|,|b|)\alpha}{t^{2\alpha+2}}$ avec $2\alpha+2>4>1$.

Alors F est de classe C^1, continue et définie sur $\mathbb{R}$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2\alpha x}{(t^2+x^2)^{\alpha+1}}\, dt}$

3) Je vous démontre ici l'intégrabilité de $F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x^2)^{\alpha}}\, dt$ sur $\mathbb{R}$

(***Attention!*** à ne pas confondre avec l'intégrabilité de la fonction-intégrande, cad le $f(x,t)$ de l'intérieur).

Premièrement, la ***continuité*** sur $\mathbb{R}$ a été établie à la question précédente et de la parité, il reste à démontrer l'intégrabilité dans un ***voisinage*** de $+\infty$. L'énoncé nous suggère d'utiliser le « *critère* $x^a f(x)$ ». Nous allons donc démontrer $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x^{\beta}F(x) = 0$ avec $\beta > 1$ qu'il ***faudra choisir explicitement***.

On applique le théorème de limite d'une intégrale à paramètre avec $x^{\beta}F(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{x^{\beta}}{(t^2+x^2)^{\alpha}}}_{g(x,t)}\, dt$ et $J = [1,+\infty[$:

- $\forall t \in [1,+\infty[$, $t \longrightarrow g(x,t)$ admet une limite lorsque $x \to +\infty$ qui est $\ell(t) = 0$ ***si*** $\boxed{\beta - 2\alpha > 0}$ car $g(x,t) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^{\beta}}{x^{2\alpha}}$

  Attention! à ne pas confondre le rôle de x et t dans l'équivalent.
- $\forall x \in J$, $t \longrightarrow g(x,t)$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$
- $\forall x \in J$, $t \longrightarrow \ell(t)$ est continue par morceaux sur $[1,+\infty[$
- **Hypothèse de domination sur** J

$$\forall x \in J,\ \forall t \in [1,+\infty[\ ,\quad |g(x,t)| = \frac{x^{\beta}}{(t^2+x^2)^{\alpha}} \leq \frac{(x^2)^{\beta/2}}{(t^2+x^2)^{\alpha}} \leq \frac{(t^2+x^2)^{\beta/2}}{(t^2+x^2)^{\alpha}} = \frac{1}{(t^2+x^2)^{\alpha-\beta/2}} \leq \frac{1}{(t^2)^{\alpha-\beta/2}} = \xi(t)$$

ξ est ***intégrable*** sur $[1,+\infty[$ ***si*** $\boxed{2(\alpha - \frac{1}{2}\beta) > 1}$

$$x^{\beta}F(x) = \int_1^{+\infty} \ell(t)\, dt = \int_1^{+\infty} 0 = 0$$

Le théorème ***s'appliquera si*** on peut trouver un réel β vérifiant à la fois $\beta < 2\alpha$, $2\alpha - \beta > 1$. Le ***critère d'intégrabilité*** s'appliquera si on a en plus $\beta > 1$. La première condition équivaut à $\beta < 2\alpha - 1$. La deuxième condition est possible si $1 < 2\alpha - 1 \iff \alpha > 1$. On prendra alors le milieu soit $\beta = \frac{1}{2}(1 + 2\alpha - 1) = \alpha$

Ex 36 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Etudiez $\lim\limits_{x\to 0} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)dt}{t+ix}$

On pose $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{tf(t)}{t+ix}}_{g_x(t)}\, dt$ avec f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme l'énoncé demande d'étudier la limite de F en $x = 0$, il faut au moins vérifier l'existence de F dans un voisiange de 0. Elle résulte de :

- $t \to g_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$=$[0,+\infty[$, car f l'est par hypothèse et $t + ix$ ne s'annule pas au voisinage (pointé) de 0 (il s'annule pour $t = x = 0$), donc ***pour tout*** $x \neq 0$
- $|g_x(t)| = \dfrac{|t|\,|f(t)|}{\sqrt{t^2+x^2}} \leq \dfrac{|t|\,|f(t)|}{|t|} \leq |f(t)|$.

  L'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$ amène donc, par critère de majoration, l'intégrabilité de $g_x(t)$ sur $\mathbb{R}$, ***pour tout*** x ***réel***.

On vient de ***démontrer*** que $F(x)$ est ***définie*** sur (au moins) $\mathbb{R}^*$.

Pour étudier la limite de F en $x=0$, nous allons utiliser le théorème dédié.

- $\forall t \in \left]-\infty, +\infty\right[$, $t \longrightarrow g(x,t)$ admet une limite lorsque $x \to 0$ qui est $\ell(t) = f(t)$ immédiatement
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $t \longrightarrow g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]-\infty, +\infty\right[$
- $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $t \longrightarrow \ell(t)$ est continue par morceaux sur $\left]-\infty, +\infty\right[$
- ***Hypothèse de domination sur*** $\mathbb{R}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \forall t \in \left]-\infty, +\infty\right[,\qquad \left|g(x,t)\right| = \left|\frac{tf(t)}{t+ix}\right| = \frac{|t|\,|f(t)|}{\sqrt{t^2+x^2}} \le \frac{|t|\,|f(t)|}{|t|} = \left|f(t)\right| = \xi(t)$$

La majoration vient de $t^2+x^2 \ge t^2$ et la croissance de $u \to \sqrt{u}$. ξ est ***intégrable*** sur $\left]-\infty, +\infty\right[$ c'est l'hypothèse

Le théorème ***s'applique*** et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)dt}{t+ix} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.

CCP PSI (équivalents intégrale à paramètre)

Ex 38 On se donne $\displaystyle f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt$.

1) Etudiez son domaine de définition

2) Etudiez la continuité et la monotonie de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3) Montrez $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) + f(1+x) = \frac{1}{x}$

4) Donnez un équivalent de $f(x)$ en 0_+ et en $+\infty$.

---

1)

- $\displaystyle h : t \longrightarrow \frac{t^{-x}}{1+t} = \frac{e^{-x\ln t}}{1+t}$ est continue sur $\left[1, +\infty\right[$ et ce $\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel}}$.
- ***Etude en*** $t = +\infty$ **:**

  $\displaystyle \left|h(t)\right| \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t^{-x}}{t} = \frac{1}{t^{x+1}}$. Du critère d'équivalent des fonctions ***positives*** et du critère de Riemann, h est ***intégrable*** en $+\infty$ ssi $x+1>1$ ssi $\boxed{x>0}$.

Conclusion : h est ***intégrable*** sur $\left[1, +\infty\right[$ ssi $\boxed{x>0}$, c'est à dire $\boxed{\mathrm{Def} f = \left]0, +\infty\right[}$

2) On pose $J = \mathbb{R}^{+*}$ $I = \left[1, +\infty\right[$ $\displaystyle g(x,t) = \frac{t^{-x}}{1+t}$ et on applique le théorème de continuité :

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $t \longrightarrow g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left[1, +\infty\right[$
- $\forall t \in \left[1, +\infty\right[$, $x \longrightarrow g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
- ***Hypothèse de Domination sur tout segment*** $\left[a,b\right] \subset \mathbb{R}^{+*}$ **:**

$$\forall x \in \left[a,b\right] \subset \mathbb{R}^{+*},\ \forall t \in \left[1, +\infty\right[,\ \left|g(x,t)\right| = \left|\frac{t^{-x}}{1+t}\right| \le \frac{t^{-a}}{1+t} = \xi(t)$$

car $x \longrightarrow t^{-x} = e^{-x\ln t}$ est décroissante ***car*** $\ln t \ge 0$ car $t \ge 1$. ξ est ***intégrable*** sur $\left[1, +\infty\right[$: continue par morceaux et $\displaystyle\left|\xi(t)\right| \sim_{+\infty} \frac{t^{-a}}{t} = \frac{1}{t^{1+a}}$. ***On a bien*** $1+a>1$ car $a>0$. On voit ***l'importance*** de $\mathbb{R}^{+*}$.

Alors f est continue et définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3)

$$f(x)+f(1+x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^{-1-x}}{1+t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}+t^{-1-x}}{1+t}\,dt = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-1-x}(t+1)}{1+t}\,dt$$

$$= \int_1^{+\infty} t^{-1-x}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \left[\frac{-1}{x}\,t^{-x}\right]_1^A = \frac{1}{x} \quad \textbf{car}\ -x<0$$

On revoit ***l'importance*** de $\mathbb{R}^{+*}$.

4) On utilise le résultat précédent $\forall x>0,\quad f(x)+f(1+x) = \dfrac{1}{x}$.

Equivalent en 0

On rappelle que ***pour*** $\ell \neq 0$, $f(x) \sim_a \ell \iff \lim_a f(x) = \ell$. Par conséquent, comme $\lim_0 f(x+1) = f(1) \neq 0$ ***parce que*** f est ***continue en*** 1, il vient $f(x+1) \sim_0 f(1)$. (En toute rigueur, il faudrait démontrer le résultat assez évident qui est $f(1) > 0$ donc non nul, qui provient de la croissance de l'intégrale).

On rappelle aussi que l'on ne peut sommer les équivalents, ***mais que l'on peut*** « *sommer* » avec un négligeable en le négligeant... Plus précisément, si on a $f = g + h$, et que $h \sim_a k$ avec $k = o_a(g)$, alors $f = g + h \sim_a g$. On l'applique ici :

$$f(x) = \frac{1}{x} - f(1+x) \text{ avec } f(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} f(1),\ f(1) = cste = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{puis} \quad \boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}}$$

Equivalent en $+\infty$

Méthode 1 :

On a démontré que f est décroissante, il vient alors que $f(1+x) \leq f(x)$ puis $\dfrac{1}{x} = f(x) + f(1+x) \leq 2f(x)$. Puis, pour $x > 1$:

$$f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\,dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+1}\,dt = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{t^{-x+1}}{-x+1}\right]_{t=0}^{t=A} = \frac{1}{2(x-1)} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}$$

On en déduit par le théorème d'encadrement de l'équivalent : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}}$

Méthode 2 :

Cette méthode est assez usuelle, et est celle que j'ai utilisée en cours : le changement de variables. On pose $u = x\ln t$ qui est bien C^1 bijectif de $\left]1, +\infty\right[$ vers $\left]0, +\infty\right[$ (***car*** $x > 0$). La réciproque est $t = e^{u/x}$, et $dt = \frac{1}{x}e^{u/x}\,dx$:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+e^{u/x}} e^{u/x}\,du = \frac{1}{x}\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\ e^{u/x}}{1+e^{u/x}}\,du}_{G(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\times 1}{1+1}\,du}_{\lim_{x\to+\infty} G(x)} = \frac{1}{2x}\Big[-e^{-u}\Big]_{u=0}^{u=+\infty} = \boxed{\frac{1}{2x}}$$

L'équivalent vient du fait que $G(x) \sim_{+\infty} \ell$ ssi $\lim_{+\infty} G = \ell \neq 0, \infty$ et de l'utilisation du théorème limite d'intégrale à paramètre (ou de convergence dominée à paramètre continu). J'ai changé le paramètre u en t pour se « *rapprocher* » des hypothèses du théorème : ***Vérifions les hypothèses*** de ce théorème. On pose $J = \left[1, +\infty\right[$ et $g(x,t) = \dfrac{e^{-t}\ e^{t/x}}{1+e^{t/x}}$

- $\forall t \in \left]0, +\infty\right[$, $t \longrightarrow g(x,t)$ admet une limite lorsque $x \to +\infty$ qui est $\ell(t) = \frac{e^{-t}}{2}$ car $\frac{t}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$ et $e^0 = 1$
- $\forall x \in J$, $t \longrightarrow g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]0, +\infty\right[$
- $\forall x \in J$, $t \longrightarrow \ell(t)$ est continue par morceaux sur $\left]0, +\infty\right[$
- **Hypothèse de domination sur** J

$$\forall x \in J,\ \forall t \in \left]0, +\infty\right[, \qquad \big|g(x,t)\big| = \left|\frac{e^{-t}\ e^{t/x}}{1+e^{t/x}}\right| \leq \frac{e^{-t}(1+e^{t/x})}{1+e^{t/x}} = e^{-t} = \xi(t)$$

Notez la majoration astucieuse. ξ est ***intégrable*** sur $\left]0, +\infty\right[$: immédiat

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\ e^{t/x}}{1+e^{t/x}}\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-t}\ e^{t/x}}{1+e^{t/x}}\,dt = \int_0^{+\infty} \ell(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\times 1}{1+1}\,dt$$

CCP PSI 2022-2021-2019-2017- 2015-2014 (transformée de Laplace)

Ex 40 On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-tx}}{e^t - 1}\,dt$.

1) Donnez l'ensemble de définition de f.

2) Calculez $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Calculez $f(x-1) - f(x)$ pour $x > 0$ et en déduire une expression de $f(x)$ sous la forme d'une somme de série.

4) Proposer une autre méthode pour obtenir ce résultat. [**2015 :** Question absente]

1) On pose $f(x,t) = \dfrac{t\,e^{-tx}}{e^t - 1}$.

- L'application $t \longrightarrow f(x,t)$ est ***continue*** sur $\left]0, +\infty\right[$, et ce, indépendamment, $\boxed{\textbf{\textit{pour tout}}\ x \text{ réel}}$.
- ***Etude en*** $t = 0$ ***:*** On a $\big|f(x,t)\big| \underset{t=0}{\sim} \left|\dfrac{t\times 1}{t}\right| = 1$. La fonction de t peut donc se prolonger en une fonction continue en 0 et ce, $\boxed{\textbf{\textit{pour tout}}\ x \text{ réel}}$. $t \longrightarrow f(x,t)$ est donc ***intégrable*** en 0 ***pour tout*** x réel.

- ***Etude en*** $t=+\infty$ **:** $|f(x,t)| \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{t\,e^{-tx}}{e^t} = t\,e^{-(x+1)t}$.

  On comprend alors f ***intégrable*** en $+\infty$ ssi $x+1>0$ (un « *vrai* » -) ssi $\boxed{x>-1}$.

  On le démontre proprement avec le critère $t^a g(t)$ dans les 2 cas :

  - $x>-1$ on prend $a=2>1$, $\lim_{+\infty} t^3 e^{-(x+1)t}=0$ par croissances comparées, intégrabilité en $+\infty$

  - $x\le -1$ on prend $a=1\le 1$, $\lim_{+\infty} t^2 e^{-(x+1)t}=+\infty$, non intégrabilité en $+\infty$.

Conclusion : Intersection des ***trois*** conditions sur x, il suit $t\to f(x,t)$ ***intégrable*** sur $]0,+\infty[$ ssi $\boxed{x>-1}$, soit $\boxed{\mathrm{Def}\,F =]-1,+\infty]}$

Remarque : Cette fonction F est la transformée de Laplace de $t\longrightarrow \dfrac{t}{e^t-1}$

2) *Méthode 1 par encadrement :* Cette méthode s'applique bien si la limite est 0 ou ∞ et surtout, si on peut encadrer par des fonctions dont l'intégrale se calcule. Elle a l'avantage d'être rapide, mais il faut savoir majorer ! :

$$\forall x>0,\ 0\le |F(x)| = \left|\int_0^{+\infty}\frac{t\,e^{-tx}}{e^t-1}\,dt\right| \le \int_0^{+\infty}\left|\frac{t\,e^{-tx}}{e^t-1}\right|\,dt \overset{(1)}{\lesssim} \int_0^{+\infty}\left|\frac{t}{t}\right| e^{-tx}\,dt = \left[\frac{e^{-tx}}{-x}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

- **(1)** On a appliqué l'inégalité de convexité usuelle $\forall t\in\mathbb{R},\ e^t\ge 1+t$

Cet encadrement amène l'***existence*** de la limite et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0$.

Méthode 2 Théorème de Lebesgue[4] à paramètre continu

Il faut, pour ce théorème, choisir un voisinage de la limite $x=+\infty$. Par prudence, on évite le $]0,+\infty[$ ou $[0,+\infty[$ et on va prendre $]1,+\infty]$

- $\forall t\in]0,+\infty[$, $t\longrightarrow f(x,t)$ admet une limite lorsque $x\to+\infty$ qui est $\ell(t)=0$ ***car*** on a bien $t\ge 0$
- $\forall x\in [1,+\infty[$, $t\longrightarrow f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$
- $\forall x\in [1,+\infty[$, $t\longrightarrow \ell(t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$
- ***Hypothèse de domination sur*** $[1,+\infty[$

$$\forall x\in[1,+\infty[,\ \forall t\in]0,+\infty[,\quad |f(x,t)| = \left|\frac{t\,e^{-tx}}{e^t-1}\right| \le \left|\frac{t}{t}e^{-tx}\right| \le e^{-t\times 1} = \xi(t)$$

  Même explication pour la majoration que la méthode 1, comme quoi... On utilise aussi $x\ge 1$

  ξ est ***intégrable*** sur $]0,+\infty[$: immédiat continuité et $o_{+\infty}(\frac{1}{t^2})$

On peut donc passer à la limite sous le signe somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f(x,t)\,dt = \int_0^{+\infty} 0 = 0$

3)

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ F(x-1)-F(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-t(x-1)}}{e^t-1} - \frac{t\,e^{-tx}}{e^t-1} = \int_0^{+\infty}\frac{t\,e^{-tx}(e^t-1)}{e^t-1}\,dt = \int_0^{+\infty} t\,e^{-tx}\,dt\\ &= \left[\frac{-t\,e^{-tx}}{x}\right]_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}e^{-tx}\,dt = 0 + \left[\frac{1}{x}\,\frac{e^{-tx}}{-x}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{x^2}\ \text{car } x>0\end{aligned}$$

On a effectué l'ipp $u=t \quad v'=e^{-tx} \quad u'=1 \quad v=-\dfrac{e^{-tx}}{x}$. L'ipp directement en $t=+\infty$ car la 2^e intégrale converge.

$$\begin{aligned}\forall x>0,\ F(x-1) &= \Big(F(x-1)-F(x)\Big) + \Big(F(x)-F(x+1)\Big) + \cdots + \Big(F(x+n-1)-F(x+n)\Big) + F(x+n)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\Big(F(x+k-1)-F(x+k)\Big) + F(x+n) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+k)^2} + F(x+n)\end{aligned}$$

4. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941). Reconnu pour sa théorie de l'intégration initiée dans sa thèse de 1902 « *Intégrale, longueur, aire* ».

lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} + F(x+n) \longrightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$ puisque cette série converge et que, démontré à la question précédente, $\lim_{n\to+\infty} F(x+n) = 0$. Par suite, en faisant tendre $n \to +\infty$, comme $F(x-1)$ est une « *constante* » par rapport à n, il vient : $F(x-1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$. En adaptant un peu les indices, $\boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}}$

4) On peut aussi obtenir ce résultat par un ***développement en série*** suivi d'une ***intégration terme à terme*** :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-tx}}{e^t - 1}\,dt \overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{t e^{-t} e^{-tx}}{1-e^{-t}}\,dt \overset{(2)}{=} \int_{]0,+\infty[} t e^{-t(x+1)} \frac{1}{1-e^{-t}}\,dt \overset{(3)}{=} \int_{]0,+\infty[} t e^{-t(x+1)} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}\,dt$$
$$= \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{t e^{-t(n+x+1)}}_{f_n(t)}\,dt \overset{(4)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} t e^{-t(n+x+1)}\,dt \overset{(5)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+x+1)^2}$$

- **(1)** On va utiliser un DSE usuel de $\frac{1}{1-u}$ ***mais*** il faut $|u| < 1$ d'où cette astuce : $e^t \geq 1$ ***mais*** $e{-}t \leq 1$.
- **(2)** Même problème : il faut $|e^{-t}| < 1$ d'où l'astuce pour « *enlever* » $t = 0$
- **(3)** Vient du DSE $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ possible puisque $|u| = e^{-t} < 1$ pour $t \in \left]0,+\infty\right[$.
- **(4)** Intégration terme à terme possible sur $\left[0,+\infty\right[$ puisque :
  - Les f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $\left[0,+\infty\right[$ critère $t^2 g(t)$) car $n+x+1>0$.
  - La série de fonctions $\sum_n f_n$ converge simplement sur $\left[0,+\infty\right[$: c'est le développement en série de $\frac{t e^{-tx}}{e^t-1}$! et sa somme est ***continue par morceaux*** sur $\left[0,+\infty\right[$.
  - La série numérique $\sum_n \int_{[0,+\infty[} |f_n|$ converge car c'est la série de terme $\frac{1}{(n+x+1)^2} \underset{n=+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$

TPE PSI 2017 (intégrale à paramètre) ✍

Ex 43 On pose $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}$.

1) Donnez l'ensemble de définition de F.

2) Montrez que f est de classe C^2 sur $]1,+\infty[$. Exprimez f' et f'' sous forme d'intégrales.

3) ✷Dressez le tableau de variations de f

On pose $I = \left]0,1\right[$, $g(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}$

1)

- $t \to f(x,t)$ est ***continue*** sur I. Il faut absolument vérifier / regarder si $t(1-t)(x-t) \geq 0$ sur $\left]0,1\right[$. Comme $t(1-t) \geq 0$, ceci équivaut à $x - t > 0$ qui amène $\boxed{x \geq 1}$.

  On prend donc désormais cette condition nécessaire $x \geq 1$
- ***Etude en*** $t = 0$ **:** $\left|\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}\ t^{1/2}}$
  Critère d'équivalence d'une fonction ***positive*** à une fonction de Riemann intégrable en 0, $t \to f(x,t)$ est intégrable en 0, et ce $\boxed{\text{pour tout } x \geq 1}$.
- ***Etude en*** $t = 1$ **:** $\left|\frac{1}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}\right| \underset{t\to 1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x-1}(1-t)^{1/2}}$ pour $x > 1$
  - $x > 1$: Critère d'équivalence d'une fonction positive à une fonction de Riemann intégrable en 1 ($\alpha = \frac{1}{2} < 1$), $t \to f(x,t)$ est intégrable en 1.
  - $x = 1$: $f(x,t) \sim_{t=1} \frac{1}{1-t}$ Ici $t \to f(x,t)$ n'est ***pas intégrable*** en 1

$f(x)$ est donc définie ssi $x > 1$, soit $\boxed{\text{Def} f = J = \left]1,+\infty\right[}$

2) Je démontre juste f de classe C^1 par le théorème adéquat. Le lecteur est invité à regarder et utiliser de lui-même le théorème C^n pour $n = 2$.

- $\forall x \in J$, $t \longrightarrow g(x,t)$ est ***intégrable*** sur $\left]0,1\right[$ (question avant)

- $\forall x \in J,\ t \longrightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ \frac{\partial}{\partial x}\Big((x-t)^{-1/2}\Big) = \frac{-1}{2\sqrt{t(1-t)}\ (x-t)^{3/2}}$ est continue par morceaux sur $\left]0,1\right[$.
- $\forall t \in \left]0,1\right[\ ,\ x \longrightarrow g(x,t)$ est C^1 sur J.
- ***Hypothèse de Domination sur tout segment*** $\left[a,b\right] \subset J$ **:**

  $\forall x \in \left[a,b\right] \subset J, \forall t \in \left]0,1\right[\ ,\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\ \frac{\partial}{\partial x}\Big((x-t)^{-1/2}\Big) = \frac{-1}{2\sqrt{t(1-t)}\ (x-t)^{3/2}}\right| \le \frac{1}{2\sqrt{t(1-t)}\ (a-t)^{3/2}} = \xi(t)$

  majoration justifiée par $x \to (x-t)^{-3/2}$ est décroissante sur $\left[a,b\right]$ ξ est ***intégrable*** sur $\left]0,1\right[$ par les équivalents $\sim_0 \dfrac{1}{a^{3/2}\ t^{1/2}}$ et $\sim_1 \dfrac{1}{(a-1)^{3/2}\ (1-t)^{1/2}}$. ***Comme*** $a > 1$, $a - t > 0$ sur $\left[0,1\right]$

Alors f est de classe C^1, continue et définie sur J. $\forall x > 1$, $\boxed{f'(x) = \int_0^1 \frac{-1}{2\sqrt{t(1-t)}\ (x-t)^{3/2}}\, dt}$

3) On a immédiatement $f'(x) \le 0$ sur J

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$\searrow$

Par théorème de ***la limite monotone***, f admet une limite finie ou $-\infty$ en $x = +\infty$, finie ssi f est minorée (dans un voisinage de $+\infty$) et f admet une limite finie ou $+\infty$ en $x = 1$, finie ssi f est majorée (dans un voisinage de 1)

Comme $f \ge 0$, f est minorée et $\lim_{x\to+\infty} f$ finie. Probablement 0 (A faire...)

On a vu que l'intégrale $f(1)$ diverge, comme la fonction-intégrande est positive, on peut convenir que cette intégrale est « *infinie* » ce qui permet de conjecturer que la limite est $+\infty$. Mais il faut le **prouver** proprement ... On utilise les « *epsilon* »

$$\lim_1 f = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0,\ \forall |x-1| < \eta \text{ et } x > 1, \quad f(x) > A$$

Soit $A > 0$

• Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1_+} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-t)}} = +\infty$ (l'intégrale ***positive*** en $x = 1$ diverge),
il existe η_0 tel que si $1 - \eta_0 < x < 1$, $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-t)}} > 2A$.

• ***On fixe*** $y = 1 - \frac{1}{2}\eta_0$. Par ***positivité de l'intégrande***,
$F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}} \ge \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}} = G(x)$

• La fonction $G : x \to \displaystyle\int_0^y \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}$ est continue en $x = 1$. On démontre juste la domination :

$$\forall x \in \left[1,2\right], \forall t \in \left]0,y\right],\ \left|\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}\right| \le \frac{dt}{\sqrt{t}\,(1-t)}$$

Comme $y < 1$, cette fonction est bien intégrable sur $\left]0,y\right]$.

Par suite, ***par continuité*** de G en 1_+, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour $1 < x < 1 + \eta_1$, $G(x) > G(1) - A$

Prenons $\eta = \eta_1$.

Pour $1 < x < 1 + \eta$, $F(x) > G(x) > G(1) - A = 2A - A = A$

CCINP PSI 2022 | Mines-Ponts PSI 2019 | CCP MP 2017 | Ensea PSI 2014 | Mines-Ponts PC 2013 (intégrale à paramètre) ✍

Ex 44 On pose $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$.

1) Donnez l'ensemble de définition de F et montrez F impaire.

2) Montrez F C^1

3) Calculez $F(x)$.

1) Il est bien de remarquer que F est impaire qui permet de restreindre l'étude à $\mathbb{R}^+$.

On pose $J=\mathbb{R}^+$ $I=\left]0,+\infty\right[$ $f(x,t)=\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$. Je rappelle que le théorème C^1 nécessite de vérifier intégrable dans sa première hypothèse. On s'en occupe tout de suite :

- $t\to f(x,t)$ ***continue*** sur $\left]0,+\infty\right[$ et ce $\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel}}$.
- ***Etude en*** $t=0$ **:**
  $\left|\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\right|\underset{t\to0}{\sim}\dfrac{xt}{t}=x$ et ce ***pour tout*** x réel. On en déduit le prolongement en une fonction continue en $t=0$ d'où l'intégrabilité en 0 $\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel}}$.
- ***Etude en*** $t=+\infty$ **:**
  $\left|\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\right|\underset{t\to+\infty}{\sim}\dfrac{\pi/2}{t^3}$ car $xt\to+\infty$ ***mais si*** $x\geq0$ (l'équivalent est faux si $x<0$).
  Le critère de Riemann joint à la positivité donne l'intégrabilité sur $\left[1,+\infty\right[$ pour tout $x\geq0$ et par imparité, $\boxed{\text{pour tout } x}$.

On en déduit $t\to f(x,t)$ ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$ $\boxed{\text{pour tout } x \text{ réel}}$

Conclusion : $\boxed{\operatorname{Def} F=\mathbb{R}}$.

On applique le théorème de dérivation sous le signe somme d'une intégrale à paramètre sur $J=\mathbb{R}^+$.

- $\forall x\in\mathbb{R},\ t\longrightarrow f(x,t)$ est ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$ (au dessus)
- $\forall x\in\mathbb{R},\ t\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\dfrac{t}{t(1+t^2)}\,\dfrac{1}{1+(xt)^2}$ est continue par morceaux sur $\left]0,+\infty\right[$.
- $\forall t\in\left]0,+\infty\right[,\ x\longrightarrow f(x,t)$ est C^1 sur $\mathbb{R}$.
- ***Hypothèse de Domination sur tout segment*** $[a,b]\subset\mathbb{R}$ **:**

$$\forall x\in[a,b]\subset\mathbb{R},\ \forall t\in\left]0,+\infty\right[,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|=\left|\frac{t}{t(1+t^2)}\,\frac{1}{1+(xt)^2}\right|=\left|\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\right|\leq\frac{1}{1+t^2}=\xi(t)$$

Majoration résultant de $1+x^2t^2\geq1$. ξ est ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$: immédiat

Alors F est de classe C^1, continue et définie sur $\mathbb{R}$. $\forall x\geq0$, $\boxed{F'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}\,dt}$

2) C'est une fraction rationnelle, on sait primitiver par décomposition en éléments simples. Attention! il y a ici 2 éléments simples (de seconde espèce) avec des polynômes de 2^{e} degré au dénominateur, il faut donc mettre (à priori) un polynôme du 1er degré au numérateur. :

$$\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)}=\frac{at+b}{1+t^2}+\frac{ct+d}{1+x^2t^2}\qquad=\frac{at+b}{1+t^2}+\frac{(-a)t+(1-b)}{1+x^2t^2}\quad\text{après 1)2)}$$

- On $\times t$ puis limite en $+\infty$: $0=a+c$
- valeur en $t=0$ amène $1=b+d$
- on $\times(1+t^2)$ puis la valeur $t=i$: $\dfrac{1}{1+x^2i^2}=\dfrac{1}{1-x^2}=ai+b\Longrightarrow b=\dfrac{1}{1-x^2}$ et $a=0$

3)
$$F'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1-x^2}\left(\frac{1}{1+t^2}+\frac{-x^2}{1+x^2t^2}\right)dt=\lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{1-x^2}\left(\arctan t+(-x^2)\frac{1}{x}\arctan(tx)\right)\right]_{t=0}^{t=A}=\frac{1}{1-x^2}\,\frac{\pi}{2}\,(1-x)=\boxed{\frac{\pi}{2(x+1)}}$$

Comme $\mathbb{R}^+$ est un ***intervalle***, on en déduit $F(x) = \frac{\pi}{2}\ln|x+1| + cste$ (plusieurs intervalles : plusieurs constantes possibles ! et ne pas oublier la valeur absolue dans le log), puis par valeur en 0 et positivité $\boxed{F(x) = \dfrac{\pi}{2}\ln(x+1)}$

Ex 45 Etablir $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t\, dt}{t^{5/2}} \sim_{+\infty} \frac{1}{3x\sqrt{x}}$

On commence par remarquer que :

$$\frac{1}{3x\sqrt{x}} = \lim_{A\to+\infty} \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{3}x^{-3/2}\right]_x^A = \frac{1}{2}\int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{5/2}}$$

Puis, en se rappelant que $f \sim_a g \iff f - g = o_a(g)$, il suit en appliquant la formule $\sin^2 t = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2t)\big)$:

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t\, dt}{t^{5/2}} - \frac{1}{3x\sqrt{x}} = \int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t - \frac{1}{2}\, dt}{t^{5/2}} = \int_x^{+\infty} \frac{-\cos(2t)\, dt}{2\, t^{5/2}}$$

Il faut et il suffit donc de démontrer que cette intégrale est un $o_{+\infty}\big(\frac{1}{t^{3/2}}\big)$. On effectue une ipp :

$$u' = \cos(2t) \quad v = \frac{1}{t^{5/2}} \quad u = \frac{1}{2}\sin(2t) \quad v' = -\frac{5}{2}\frac{1}{t^{7/2}}$$

On ***peut*** effectuer ***directement*** cette intégrale en l'infini, car le dernier membre est visiblement une intégrale convergente, ***car*** se majorant par une intégrale de **Riemann**[1] convergente. Cette remarque, bien au programme évite de faire d'abord, commme il est souvent indiqué, une intégrale de x à A puis de faire tendre A vers l'infini :

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos(2t)\, dt}{t^{5/2}} = \left[\frac{\sin(2t)}{2t^{5/2}}\right]_x^{+\infty} + \frac{5}{4}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(2t)\, dt}{t^{7/2}} = \underbrace{-\frac{\sin(2x)}{2x^{5/2}}}_{f(x)} + \underbrace{\frac{5}{4}\int_x^{+\infty}\frac{\sin(2t)\, dt}{t^{7/2}}}_{g(x)}$$

- On a $|f(x)| \leq \dfrac{1}{2x^{5/2}} = \underbrace{\dfrac{1}{2x^2}}_{\longrightarrow 0}\dfrac{1}{x^{3/2}} = o_{+\infty}\Big(\dfrac{1}{x^{3/2}}\Big)$
- On a $|g(x)| \leq \displaystyle\int_x^{+\infty}\left|\frac{\sin(2t)\, dt}{t^{7/2}}\right| \leq \int_x^{+\infty}\left|\frac{dt}{t^{7/2}}\right| = \left[-\frac{2}{5}\frac{1}{t^{5/2}}\right]_x^{+\infty} = \frac{2}{5}\frac{1}{x^{5/2}} = o_{+\infty}\Big(\frac{1}{x^{3/2}}\Big)$

Ex 46

1) Montrez que $F(x) = \displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\, dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Montrez F C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et explicitez $F'(x)$.

3) Etablir $\displaystyle\lim_{x\to0}\int_x^{3x}\frac{\cos t - 1}{t}\, dt = 0$, puis cherchez $\displaystyle\lim_{x\to0} F(x)$.

4) Calculez $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

Je rappelle le théorème fondamental de l'analyse : si f ***continue*** sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$ est la primitive de f qui s'annule en a. Elle est ***définie, continue et*** C^1 sur I et $F'(x) = f(x)$.

Remarques

- Si f est seulement **continue par morceaux**, F est seulement continue, elle n'est ***pas dérivable***, ce n'est pas la primitive qui s'annule en a

- Attention au cas où a est une borne de I qui ***n'est pas dans*** I (en particulier $a=+\infty$. Le théorème ***ne s'applique pas***. C'est en général voulu par l'énoncé… pour voir les gens subtils qui ne commettent pas cette erreur. Dans ce cas, on applique Chasles $\int_a^x f=\int_a^{a'} f+\int_{a'}^x f$ avec $a'\in I$.

1) On se ramène au théorème : on pose $f(t)=\frac{\cos t}{t}$ continue sur $I=\left]0,+\infty\right[$ et on prend $a=1$, et on pose $G(x)=\int_1^x f(t)\,dt$. G ***définie, continue et*** C^1 sur I et $G'(x)=\frac{\cos x}{x}$. On applique Chasles :

$$F(x)=\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,dt=\int_x^1 f+\int_1^{3x} f=G(3x)-G(x)$$

Par somme et composition, F est ***définie et*** C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall x>0,\ F'(x)=3G'(3x)-G'(x)=\frac{3\cos(3x)}{3x}-\frac{\cos x}{x}=\boxed{\frac{\cos(3x)-\cos(x)}{x}}$$

Remarque : On peut démontrer F définie directement en remarquant que $t\to\frac{\cos t}{t}$ est ***continue par morceaux*** sur $[x,3x]$ et ce, ***pour tout*** $x>0$.

3) ***Attention !*** à la grave erreur de raisonnement $\lim_{x\to 0}\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt=\int_0^0\cdots=0$ Et vous aller voir que c'est (çà peut être) faux, sur cet exemple.

Pour pouvoir l'appliquer, il faudrait la ***continuité en 0*** de $x\longrightarrow\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt$ que l'on obtiendrait via le théorème de Sup, théorème fondamental de l'Analyse, ***mais ici*** les hypothèses ne sont pas réalisées puisqu'il y a un « *problème* » de la fonction-intégrande en 0.

Méthode 1 (par l'intégration du dl en 0) :

Dans cet exemple, comme $[x,3x]$ est un ***dans un voisinage*** de 0 parce que $x\to 0$, on ***peut écrire*** un DL en 0 à l'intérieur de l'intégrale.

$$\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt=\int_x^{3x}\frac{-1/2t^2+o(t^2)}{t}\,dt=\int_x^{3x}-\frac{1}{2}t+o(t)\,dt=\left[-\frac{1}{4}t^2\right]_x^{3x}+\int_x^{3x}o(t)\,dt=-2x^2+\int_x^{3x}o(t)\,dt$$

Le petit problème de cette méthode est de gérer correctement l'intégrale du petit-o.

Pour $|t|\le\eta$, $|o(t)|\le\varepsilon|t|$ (c'est du cours théorique sur o). Par suite, pour $|x|\le\frac{1}{3}\eta$ (on notera le $\frac{1}{3}$) :

$$\left|\int_x^{3x}o(t)\,dt\right|\le\int_x^{3x}|o(t)|\,dt\le\int_x^{3x}\varepsilon|t|\,dt\le\varepsilon\int_x^{3x}t\,dt=\varepsilon\frac{9-1}{2}x^2=4\varepsilon\,x^2$$

On vient de démontrer, quand $x\longrightarrow 0_+$, $\int_x^{3x}o(t)\,dt=o(x^2)$. Par suite, $\lim_{x\to 0_+}\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt=0$

Méthode 2 (prolongement par continuité) :

On remarque que $h(t)=\frac{\cos t-1}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et que $h(t)\sim_0\frac{-1/2t^2}{t}=-\frac{1}{2}t\longrightarrow 0$. Par suite h est prolongeable en une fonction ***continue*** sur le ***segment*** $[0,1]$ (en posant $\tilde{h}(0)=0$), que l'on va noter $\tilde{h}$ (il est prudent dans les raisonnements de donner un autre nom à la fonction prolongée), donc ***bornée*** (par M). Par suite : Pour $|x|\le\frac{1}{3}$,

$$0\le\left|\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}\,dt\right|\le\int_x^{3x}\left|\frac{\cos t-1}{t}\right|dt=\int_x^{3x}\tilde{h}(t)\,dt\le\int_x^{3x}M=2xM\xrightarrow{x\to 0}0$$

Méthode 3 (on ramène au théorème de Spé) :

Un changement de variables donne des ***bornes fixes*** : c'est $u=\frac{t}{x}$, on arrive alors à $\int_1^3\frac{\cos(ux)-1}{u}\,du$.

On « *remet* » t par commodité et on applique le théorème de convergence dominée à paramètre continu ou théorème de limite d'une intégrale à paramètre en posant $h(t,x)=\frac{\cos(tx)-1}{3}$ sur $I=[1,3]$:

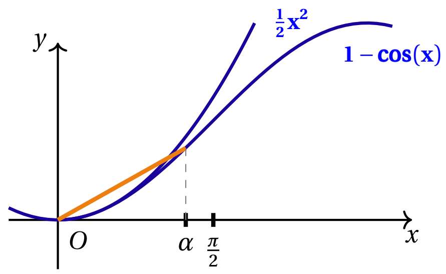
- $\forall t \in [1,3]$, $t \longrightarrow h(x,t)$ admet une limite lorsque $x \to 0$ qui est $\ell(t) = 0$ car
$$\frac{\cos(tx)-1}{t} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{t^2x^2/2}{t} = \frac{1}{2}tx^2 \xrightarrow{x\to 0} 0 \text{ et ce, } \textit{\textbf{pour tout}}\ 1 \le t \le 3$$
- $\forall x \in \left]0,1\right]$, $t \longrightarrow h(x,t)$ est continue par morceaux sur $[1,3]$
- $\forall x \in \left]0,1\right]$, $t \longrightarrow \ell(t)$ est continue par morceaux sur $[1,3]$
- ***Hypothèse de domination sur*** $\left]0,1\right]$
$$\forall x \in \left]0,1\right],\ \forall t \in [1,3], \qquad \left|h(x,t)\right| = \frac{1-\cos(tx)}{t} \le \frac{2}{t} = \xi(t)$$
Majoration immédiate. ξ est ***intégrable*** sur $[1,3]$: continuité sur le ***segment*** $[1,3]$.

On conclut $\lim\limits_{x\to 0} \int_1^3 \frac{\cos(tx)-1}{t} = \int_1^3 \ell(t)\,dt = \int_1^3 0 = 0.$

Méthode 4 (par une inégalité de convexité) :

On utilise la convexité de $t \to 1-\cos t$ sur $[0,\alpha]$ pour $\alpha \le \frac{\pi}{2}$ et la corde (voir dessin). On garde par prudence une inconnue α pour affiner la majoration, si besoin est, pour plus tard.

$$\begin{aligned} 0 \le \left|\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt\right| &\le \int_x^{3x} \left|\frac{\cos t - 1}{t}\right| dt = \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t}\,dt \\ &\le \int_x^{3x} \frac{\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}t}{t}\,dt = \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}\int_x^{3x} dt \\ &= \frac{1-\cos\alpha}{\alpha}2x \xrightarrow{x\to 0} 0 \end{aligned}$$



On peut prendre $\alpha = 1$.

La corde a pour équation $y = \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha}x$.

Méthode 5 (par un encadrement) :

L'inégalité de convexité vue plus haut n'est valide que sur un intervalle. En fait on a l'inégalité sur $\mathbb{R}$: $0 \le 1-\cos x \le \frac{1}{2}x^2$. On peut le démontrer, par exemple en utilisant tout simplement une fonction auxiliaire $g(x) = 1-\cos x - \frac{1}{2}x^2$ et ses variations (regardez aussi le dessin). Ensuite, assez analogue à plus haut :

$$0 \le \left|\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt\right| \le \int_x^{3x} \left|\frac{\cos t - 1}{t}\right| dt = \int_x^{3x} \frac{1-\cos t}{t}\,dt \le \int_x^{3x} \frac{1/2t^2}{t}\,dt = \int_x^{3x} \frac{1}{2}t = \left[t^2\right]_x^{3x} = 8x^2 \xrightarrow{x\to 0} 0$$

On termine la question :

$$H(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,dt = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt = F(x) - \Big[\ln|t|\Big]_x^{3x} \implies \lim_{x\to 0_+} F(x) = \lim_{x\to 0_+} H(x) + \ln\left(\frac{3x}{x}\right) = \boxed{\ln 3}$$

4)

Attention! à la grave erreur de raisonnement $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt = \int_{+\infty}^{+\infty} \cdots = 0.$

Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \Big[\ln|t|\Big]_x^{3x} = \ln 3$

Méthode 1 :

Je montre d'abord que l'intégrale $K = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt$ converge. C'est très semblable à l'intégrale de Dirichlet : on effectue une ipp sur $[1,x]$ avec : $u = \dfrac{1}{t}$ $\quad v' = \cos(t)$ $\quad u' = \dfrac{-1}{t^2}$ $\quad v = \sin(t)$

$$K(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t}\,dt = \left[\frac{1}{t}\sin(t)\right]_1^x + \int_1^x \frac{\sin t}{t^2}\,dt$$

Le premier membre de l'ipp a une limite finie lorsque $x \to +\infty$, puisque $0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \frac{1}{x} \longrightarrow 0$ (aucun problème en 1) et le deuxième aussi puisque l'intégrale converge $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$ par comparaison en $+\infty$ à une fonction de Riemann intégrable. On termine en utilisant la relation de Chasles :

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt = \int_x^{1} \frac{\cos t}{t}\,dt + \int_1^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt = -K(x)+K(3x) \xrightarrow{x\to+\infty} -K+K=0$$

Méthode 2 (ramenant au théorème de Spé) :

On écrit, comme plus haut avec des bornes fixes, $F(x) = \displaystyle\int_1^3 \frac{\cos(tx)}{x}\,dt$ et on utilise le même théorème. On a clairement convergence de la fonction-intégrande vers 0 lorsque $x \to +\infty$ (pour tout t). Je ne vous traite que la domination :

$$\forall 1 \le t \le 3,\ \left|\frac{\cos(tx)}{x}\right| \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{1}!!$$

On peut supposer $x \ge 1$ puisque $x \to +\infty$ et de plus la fonction-constante 1 est bien ***intégrable*** sur $[1,3]$. Heureusement que l'intervalle est borné…

Ex 47

1) Montrez que la décomposition de $X^{2n}-1$ en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ est :
$X^{2n}-1 = (X-1)(X+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)$

2) En déduire $\forall r \ne 1$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+r^2\right) = \frac{r+1}{r-1}(r^{2n}-1)$

3) Pour $|r|<1$, calculez $I(r) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1-2r\cos t + r^2)\,dt$ en utilisant les sommes de Riemann.

4) On va calculer $I(r)$ par une autre méthode. Montrez $I(r)$ définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

5) Montrez $I(r^2) = 2I(r)$ (utilisez $\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$).

6) ✷Calculez $I(r)$ en distinguant les 3 cas $|r| = 1, <1, >1$

1) $x^{2n} = 1 \iff x_k = \exp\left(\dfrac{2ik\pi}{2n}\right)$ pour $0 \le k \le 2n-1$ (racines complexes de l'unité). Puis :

$$\overline{\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right)} = \exp\left(\frac{-ik\pi}{n}\right) = \exp\left(2i\pi + \frac{-ik\pi}{n}\right) = \exp\left(\frac{i(2n-k)\pi}{n}\right)$$

On remarque que $k = 0, n$ donnent les 2 racines réelles ± 1.

$$\begin{aligned}
X^{2n}-1 &= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right)\right)\prod_{k=n+1}^{2n-1}\left(X-\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right)\right)\\
&\overset{(1)}{=} (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right)\right)\prod_{k'=1}^{n-1}\left(X-\exp\left(\frac{i(2n-k')\pi}{n}\right)\right)\\
&= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X-\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right)\right)\left(X-\overline{\exp\left(\frac{ik\pi}{n}\right)}\right)\\
&\overset{(2)}{=} (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(X^2-2X\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+1\right)
\end{aligned}$$

- **(1)** Changement d'indices $k' = 2n-k$ avec $n+1 \le k \le 2n-1 \Longrightarrow 1 \le k' \le n-1$
- **(2)** On a appliqué $(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta}) = X^2 - 2X\cos\theta + 1$

2) Immédiat en remarquant que,en plus, $k = n$ dans le produit donne $X^2+2X+1 = (X+1)^2$, puis on effectue une division

3) On rappelle que les sommes de Riemann associées à une fonction f sur $[0,1]$ sont $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $S'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

Le théorème est que ***si f est continue*** sur $[0,1]$, les sommes de Riemann ont pour limite $\int_0^1 f$.

Attention! à ne pas se tromper de variables entre r, t et n!

Ici, les sommes de Riemann sur $[0,\pi]$ associées à $f(t) = \ln(1-2r\cos t + r^2)$ sont

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1-2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+r^2\right) = \frac{\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1-2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)+r^2\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{n}\frac{r+1}{r-1}(r^{2n}-1) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \longrightarrow +\infty \text{ puisque } |r|<1 \end{aligned}$$

Par suite, pour $|r|<1$, l'intégrale $\int_0^\pi f = \int_0^\pi \ln(1-2r\cos t + r^2)\,dt = 0$

Attention : il faut vérifier la continuité de f qui nécessite de vérifier $r^2-2r\cos t+1>0$ ***sur*** $[0,\pi]$, pour $|r|<1$.

$$r^2-2r\cos t+1 = (r-\cos t)^2+\sin^2 t \geq 0$$

On pouvait aussi utiliser un discriminant. Cette quantité est nulle si $\sin t = 0 \Longrightarrow t = 0,\pi$ et $r = \cos t = \pm 1$. Impossible!

4) On écrit $I(x) = \int_0^\pi \underbrace{\ln(1-2x\cos t+x^2)}_{f(x,t)}\,dt$ On reprend l'étude du signe amorcée plus haut : $1-2x\cos t+x^2 = -x-\cos t)^2+\sin^2 t \geq 0$ et cette quantité est nulle si $t=0$ et $x=1$ et si $t=\pi$ et $x=-1$. Par suite :

- Si $|x|\neq 1$, $t \to f(x,t)$ ***continue*** sur $[0,\pi]$. $I(x)$ existe.
- Si $x=1$, $t\to f(x,t)$ ***continue*** sur $]0,\pi]$
- Si $x=-1$, $t\to f(x,t)$ ***continue*** sur $[0,\pi[$

Etude en $t=0$ lorsque $x=1$.

$$f(x,t) = \ln\big(2-2\cos t\big) = \ln\big(t^2+o(t^2)\big) = \ln(t^2)+\ln\big(1+o(1)\big) = \ln t+\ln 2+o(1) \sim_0 \ln t$$

Critère d'équivalent d'une fonction négative à une fonction intégrable en 0, $t\to f(1,t)$ intégrable sur $]0,\pi]$ donc $I(1)$ existe.

$$I(-x) = \int_0^\pi \ln(1+2x\cos t+x^2)\,dt = \int_\pi^0 \ln(1-2x\cos u+x^2)\,-\,du = I(x)$$

On a effectué le changement de variables $u=\pi-t$ C^1 est bijectif de $[0,\pi]$ sur $[0,\pi]$

5)

$$\begin{aligned} I(x^2) &= \int_0^\pi \ln(1-2x^2\cos t+x^4)\,dt = \int_0^\pi \ln\big(1-x^2(4\cos^2\frac{t}{2}-2)+x^4\big)dt \\ &= \int_0^\pi \ln\big((1+2x\cos\frac{t}{2}+x^2)(1-2x\cos\frac{t}{2}+x^2)\big)dt \\ &= \int_0^\pi \ln\big(1+2x\cos\frac{t}{2}+x^2\big)dt + \int_0^\pi \ln\big(1-2x\cos\frac{t}{2}+x^2\big)dt = I(x)+I(-x) = 2I(x) \end{aligned}$$

6) Soit $|r|<1$. On écrit : $I(r) = \frac{1}{2}I(r^2) = \frac{1}{4}I(r^4) = \cdots = \frac{1}{2^n}I(r^{2n})$.

On a clairement $\frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$. Reste à voir le comportement de $I(r^{2n})$, cad le comportement de $I(x)$ au voisinage de $x=0$, car $r^{2n}\longrightarrow 0$. On peut supposer $x\geq 0$ car $r^{2n}\geq 0$. Le plus simple est de montrer I bornée sur $[0,\frac{1}{2}]$ (il est prudent d'éviter la valeur 1 où il a « *quelques problèmes* » comme vu plus haut). On utilise la croissance de ln et de l'intégrale et on prête très ***attention au signe*** de cos sur $[0,\pi]$ qui change en $\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^\pi \ln\big(1+2x\cos t+x^2\big)dt = \int_0^{\pi/2}\ln\big(1+2x\cos t+x^2\big)+\int_{\pi/2}^\pi \ln\big(1+2x\cos t+x^2\big) \leq \int_0^{\pi/2}\ln\big(1+2\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{4}\big)+\int_{\pi/2}^\pi \ln\big(1+0+\frac{1}{4}\big)$$

On procède de manoère identiqaue pour la minoration (je vous laisse y réfléchir).

On passe alors à la limite dans l'expression $I(r) = \frac{1}{2^n}I(r^{2n})$ et, de l'unicité de la limite, il vient $I(r)=0$.

Soit $|r| > 1$. On remarque :

$$I(\frac{1}{r}) = \int_0^\pi \ln\big(1+2\frac{1}{r}\cos t + \frac{1}{r^2}\big)\,dt = \int_0^\pi \ln\big(\frac{1}{r^2}(r^2+2r\cos t+1)\big)\,dt = \int_0^\pi \ln\big(\frac{1}{r^2}\big)\,dt + I(r) = -2\pi\ln r + I(r)$$

il vient $I(r) = I\big(\frac{1}{r}\big) + 2\pi\ln r = \boxed{2\pi\ln r}$ car $\frac{1}{|r|} < 1$

Le cas $|r| = 1$ est laissé au lecteur.

Ex 48 Soit f continue sur $[0;1]$ tq $\forall 0 \le i \le n \quad \int_0^1 t^i f(t)\,dt = 0$.

1) On suppose que f est un polynôme de degré $\le n$. Montrez P est le polynôme nul.

2) ✷ On revient au cas général. Montrez f admet n+1 racines dans $]0;1[$

Indication : on pourra commencer par établir que Si f continue s'annule en exactement n valeurs comptées distinctement, et notées ordonnées $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, sur un intervalle I, alors il existe un sous-ensemble $J_n \subset [[1,n]]$ tel que $f(t)\prod_{i\in J_n}(\lambda_i - t)$ soit de signe constant sur cet intervalle I

---

1) Posons $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, puisque $\deg(P) \le n$. Par combinaison linéaire, il vient :

$$\int_0^1 P^2(t)\,dt = \int_0^1 (a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n)P(t)\,dt = a_0\int_0^1 P(t) + a_1\int_0^1 tP(t)\,dt + \cdots + a_n\int_0^1 t^n P(t)\,dt = 0$$

Par ***positivité et continuité*** de $P^2(t)$ et nullité de l'intégrale, il vient $P^2(t) = 0$ sur l'intervalle [0,1], donc c'est le polynôme nul.

2) Commençons par établir le résultat suivant par récurrence sur $n \ge 1$:

$\mathscr{P}(n)$: Si f continue s'annule en exactement n valeurs comptées distinctement, et notées ordonnées $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, sur un intervalle I, alors il existe un sous-ensemble $J_n \subset [[1,n]]$ tel que $f(t)\prod_{i\in J_n}(\lambda_i - t)$ soit de signe constant sur cet intervalle I :

- $n = 1$. Si f ne change pas de signe en λ_1, comme f ne s'annule pas ailleurs sur l'intervalle I, il y est de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $I = \emptyset$ convient. sinon il est immédiat que $(\lambda_1 - t)f(t)$ convient, donc $I = \{1\} \subset [[1]]$. $\mathscr{P}(1)$ Ok.
- Supposons la propriété vraie pour $n \ge 1$. soit f continue et s'annulant en exactement $n+1$ valeurs telles que $\lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1}$ sur un intervalle I. Alors sur l'intervalle $I \cap \big]-\infty, \frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{2}\big] = K$, il existe exactement n valeurs sur lesquels f s'annule qui sont bien évidemment $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. (rappelons $\lambda_n < \frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{2} < \lambda_{n+1}$). Par hypothèse de récurrence, il existe $J_n \subset [[1,n]]$ tel que $g(t) = f(t)\prod_{i\in J_n}(\lambda_i - t)$ soit de signe constant sur K. Comme f est continue, par le théorème des valeurs intermédaires, g l'est aussi et ne peut changer de signe sur $\big]\lambda_n, \lambda_{n+1}\big[$. En fait g ne peut changer de signe sur I qu'en λ_{n+1}. Si g n'y change pas de signe, on prend $J_{n+1} = J_n$ et $g(t)$ est bien de signe constant. Si $g(t)$ change de signe en λ_{n+1}, le lecteur constatera que $(\lambda_{n+1} - t)g(t)$, lui, ne change plus de signe et pas non plus sur I. On prend donc $J_{n+1} = J_n \cup \{n+1\} \subset [[1, n+1]]$. $\mathscr{P}(n+1)$ est bien vérifié.

Remarque : En fait on a aussi démontré $J_n = \big\{ i \in [[1,n]] \,\big|\, f \text{ change de signe en } \lambda_i \big\}$

On démontre alors le résultat par l'absurde : supposons f continue ***possédant exactement*** p racines sur $\big]0,1\big[= I$ notées ordonnées $\lambda_1 < \cdots < \lambda_p$ ***avec*** $p \le n$ et vérifiant $\forall 0 \le i \le n, \quad \int_0^1 t^i f(t)\,dt = 0$. En se servant du résultat plus haut, il existe un ensemble d'indices J de cardinal inférieur à p, donc à n tel que $g(t) = f(t)\prod_{i\in J}(\lambda_i - t)$ soit de signe constant. Comme $\prod_{i\in J}(\lambda_i - t)$ est un polynôme de degré $\leq n$, cad combinaison linéaire de t^i, par linéarité de l'intégration, il vient $\int_0^1 g(t)\,dt = 0$. En utilisant un théorème bien connu, comme g est continue et de signe constant, on en déduit $g = 0$ sur $\left[0,1\right]$ ce qui amène une infinité de racines pour f. ***Absurde***.

Remarque : On démontre ***aussi*** que si ***pour tout*** $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$ et f continue sur $\left[0,1\right]$, alors f est nulle.

Ex 49 Soit $a > 0$. Prouvez l'existence de $I(a) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)(1+x^2)}}\,dx$ et déterminez $\lim\limits_{a\to 0_+} I(a)$

On pose $I(a) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a \underbrace{\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)(1+x^2)}}}_{f(a,x)}\,dx$

1) Montrons que I est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$. On commence par remarquer que $f_a : x \longrightarrow f(a,x)$ est continue sur $\left[0,a\right[$ et ceci ***pour tout*** $a > 0$. Reste à montrer l'intégrabilité de f_a sur $\left]0,a\right]$:

On effectue le changement de variables $u = x - a$ qui amène :

$$|f^*(a,u)| = \frac{u+a}{\sqrt{\left(a^2-(u+a)^2\right)\left(1+(u+a)^2\right)}} = \frac{u+a}{\sqrt{\left(-2ua-u^2\right)\left(1+a^2+2ua+u^2\right)}}$$
$$\sim_{u\to 0} \frac{a}{\sqrt{-2ua(1+a^2)}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2(1+a^2)}}\,\frac{1}{(-u)^{1/2}}$$

Du critère d'équivalent d'une fonction de **Riemann**[1] à une fonction intégrable sur $\left[0,a\right[$ $(1/2 < 1)$, il en résulte l'intégrabilité de f_a sur $\left[0,a\right[$, et ce ***pour tout*** a> 0, puis que l'intégrale est bien ***définie*** (= ***convergente)*** pour $a > 0$.

2) Pour la limite, on ne peut appliquer les théorèmes de Spés qui s'appliquent tous à une intégrale à bornes fixes. Mais il existe un ***changement de variables*** qui « *rend* » les bornes fixes : $u = x/a \quad dx = a\,\mathrm{d}u$:

$$I(a) = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{au\;a\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2-(au)^2)(1+(au)^2)}} = \frac{1}{a}\int_0^1 \frac{a^2u\,\mathrm{d}u}{|a|\sqrt{(1-u^2)(1+a^2u^2)}} = \int_0^1 \frac{u\,\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(1+a^2u^2)}}$$

On applique maintenant le théorème de Lebesgue à paramètre continu avec $J = \left]0,1\right]$, voisinage de la borne 0 où on prend la limite, et $g(x,t) = \dfrac{t}{\sqrt{(1-t^2)(1+x^2t^2)}}$:

- $\forall t \in \left]0,1\right[$, $t \longrightarrow g(x,t)$ admet une limite lorsque $x \to 0$ qui est $\ell(t) = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$
- $\forall x \in J$, $t \longrightarrow g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\left]0,1\right[$
- $\forall x \in J$, $t \longrightarrow \ell(t)$ est continue par morceaux sur $\left]0,1\right[$
- ***Hypothèse de domination sur*** J

$$\forall x \in J,\ \forall t \in \left]0,1\right[,\quad \left|g(x,t)\right| = \left|\frac{t}{\sqrt{(1-t^2)(1+x^2t^2)}}\right| \leq \left|\frac{t}{\sqrt{(1-t^2)(1+0)}}\right| = \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \xi(t)$$

ξ est ***intégrable*** sur $\left]0,1\right[$: continue sur $\left[0,1\right[$ et $= \dfrac{t}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \sim_1 \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}$

On reconnaît une fonction de **Riemann**[1]intégrable en 1 puisque $1/2 < 1$.

1. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

Le théorème de Lebesgue peut donc s'appliquer :

$$\boxed{\lim_{x\to 0_+} I(a)} = \lim_{x\to 0}\int_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{(1-t^2)(1+x^2t^2)}} = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^1 \boxed{=1}$$

Ex 50 ✷ Soit $f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^+)\cap C(\mathbb{R}^+)$. Etablir $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 = 0$

$f \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^+)$ signifie que le carré de f, f^2, est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

1) On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz hérité du produit scalaire sur les fonctions continues sur $[0,x]$, on l'applique pour chaque x : $(f\,|\,g) = \int_0^x fg$. Je le rappelle $(x|y) \leq \|x\|\,\|y\|$. Il suit :

$$0 \leq \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2 \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)^2\,dt\int_0^x 1^2\,dt \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} f^2 \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

L'équivalent $\int_0^x f^2 \sim_{+\infty} \int_0^{+\infty} f^2$ résulte de la convergence de l'intégrale.

2) Ne pas oublier que si f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, f peut ne pas l'être : par exemple : $\frac{1}{(x+1)^{3/4}}$. Et dans ce cas, $x \longrightarrow \int_0^x f$ n'a pas de limite finie et si on suppose $f \geq 0$, la limite est même $+\infty$. On peut aussi remarquer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, la limite 0 est immédiate. Il faut utiliser les ε.