Classe de PSI

Feuille d'Exercices 4

☞ ***Thèmes de la semaine du 7 et 14 Novembre 2016 :***

— Calcul d'intégrales. Intégrales impropres convergentes. f Intégrable sur I.

— Théorème de convergende dominée de **Lebesgue**[1] et intégrales à paramètre.

Ex 1 Etudiez selon, ou l'intégrabilité de la fonction sur l'intervalle indiqué, ou la Nature de l'intégrale impropre puis calculez l'intégrale si indiqué par $\left[\oint\right]$.

✌ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^2}\,dt \left[\oint\right]$ ✌ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2t^2}\,dt \left[\oint\right]$ $\displaystyle\int_0^1 t^a\left(\ln\frac{1}{t}\right)^b dt\ (a,b\in\mathbb{R})$ $t \longleftarrow \ln^n t$ sur $]0,1]$

✌ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{(1+t)\sqrt[3]{t^2(1-t)}}$ ✌ $\displaystyle\int_{]0,\frac{\pi}{2}[} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x} \left[\oint\right]$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\arccos(1-t)}$ $t \to \cos^2\left(\frac{1}{t}\right)$ sur$]0,\frac{\pi}{2}]$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{izt-t^2}\cos(t)dt\ (z\in\mathbb{C})$

✌ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t\,dt}{\sqrt{1-t}} \left[\oint\right]$ ✌ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^5}{1+t^{12}}\,dt \left[\oint\right]$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sinh\left(\sqrt{t}\right)\ln t\,dt}{\sqrt{t}-\sin t}$ ✌ $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\cosh t} \left[\oint\right]$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\left(\frac{-t}{t+1}\right)}\,dt$

$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x} \left[\oint\right]$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{e^t+1}} \left[\oint\right]$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^a e^{-t^b}\,dt\ (a,b\in\mathbb{R})$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan t}\,dt \left[\oint\right]$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)^{\ln(\ln t)}}$

Ex 2 ***Intégrales de Wallis***[2] On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,dt$

1) Etablir $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$ puis $I_n \searrow$ puis I_n converge

2) Etablir la récurrence $nI_n = (n-1)I_{n-2}$, pour $n \geq 1$, puis $I_{2n} = \dfrac{\pi\ (2n)!}{2^{2n+1}\ (n!)^2}$

3) Etablir $I_{n+1} \sim I_n$ puis $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. (*considérez la suite* $(n+1)I_nI_{n+1}$)

Ex 3 $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\,dt$. Etablir l'existence de I puis $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\,dt$. En déduire $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$

✌ ***Ex 4*** On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2+t^3}\,dt$. Prouvez rapidement l'existence de I_n et étudiez $\lim I_n$.

✌ ***Ex 5*** Soit f une fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ et continue en 0. Etudiez $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(t^n)dt$

Ex 6 On pose $A_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\tan^2 x}\,dx$ $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{x^2}\,dx$ $B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}\,dx$ $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$

1) Montrez que ces intégrales sont définies et $\forall\, n \in \mathbb{N}, A_n \leq I_n \leq B_n$

2) Etablir $\lim \frac{I_n}{n} = J$.

3) Montrez $B_{n+1} - B_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$.

Ex 7 $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$ $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{1+t^4}$ $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^2}$

1. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

✌ **1)** Justifiez rapidement l'existence de I, J, K et montrez $I = J$

2) Calculez I (utilisez $t = e^u$ et considérez $I + J$)

3) Calculez K.

Ex 8 Etablir $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin^2 t \,\mathrm{d}t}{t^{5/2}} \sim_{+\infty} \frac{1}{3x\sqrt{x}}$

Ex 9

1) Décomp. $X^{2n} - 1$ en poly irréductible sur $\mathbb{R}$. En déduire $\forall\, r \neq 1, \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - 2r\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right) = \frac{r+1}{r-1}(r^{2n} - 1)$

2) Pour $|r| \neq 1$, calculez $I(r) = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos t + r^2)\,\mathrm{d}t$ en utilisant les sommes de **Riemann**[3].

Ex 10 Soit f continue sur $[0;1]$ tq $\forall\, 0 \leq i \leq n \quad \displaystyle\int_0^1 t^i f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrez f admet n+1 racines dans $]0;1[$

Indication : on pourra commencer par établir que Si f continue s'annule en exactement n valeurs comptées distinctement, et notées ordonnées $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, sur un intervalle I, alors il existe un sous-ensemble $J_n \subset [[1, n]]$ tel que $f(t) \displaystyle\prod_{i \in J_n} (\lambda_i - t)$ soit de signe constant sur cet intervalle I

Ex 11 Etudiez l'existence puis la convergence de la suite $U_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^n}$

Ex 12 Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{-1}{1+t^2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1) Justifiez que I_n est bien définie.

2) Démontrez que $(-1)^n I_n$ décroit et déterminez sa limite.

3) La série $\sum I_n$ est-elle convergente ?

Ex 13 Etudiez $\lim \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$. A l'aide d'un chgmt de variables, établir $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.

Ex 14 On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$ $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh^n t} dt$ Montrez $I_n = J_{n+1}$ de deux facons : directement et en montrant qu'elles vérifient la même récurrence.

Ex 15

1) Montrez que $F(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie sur $\mathbb{R}^*$.

2) Etablir $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t = 0$, puis cherchez $\displaystyle\lim_{x\to 0} F(x)$.

3) Calculez $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

✷ **Ex 16** Calculez $I = \displaystyle\int_0^1 xE\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ après avoir justifié son existence.

✷ **Ex 17** Montrez $\dfrac{1}{1 + x^2|\sin x|^{3/2}}$ intégrable sur $\mathbb{R}$. On cherchera à *ramener* à l'étude d'une série.

Ex 18 Montrez que $F(a) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^a}\,\mathrm{d}t$ est continue sur son domaine de définition.

✷ **Ex 19** Soit f continue sur $[0,1]$ telle que $f(1) \neq 0$. Trouvez un équivalent de $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t) dt$

3. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

Ex 20 Soient $\alpha > 1$ et $f : t \to \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(t^2+x^2)^\alpha}$.

1) Déterminez le domaine de définition de f.

2) Montrez que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.

3) Etudiez l'intégrabilité de f sur son domaine de définition.

(Indication rajoutée : on pourra chercher β tel que $\lim_{+\infty} t^\beta f(t) = 0$)

Ex 21 On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cosh(2xt)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrez que F est C^1 sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad F'(x) = 2xF(x)$

2) En déduire $F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{x^2}$

Ex 22 Soit $a > 0$. Prouvez l'existence de $I(a) = \frac{1}{a}\int_0^a \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)(1+x^2)}}\mathrm{d}x$ et déterminez $\lim\limits_{a\to 0_+} I(a)$

Ex 23 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Etudiez $\lim\limits_{x\to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)dt}{t+ix}$

Ex 24 On définit pour ν réel, $\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu t - \frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t$

Etablir, dans l'ordre, $\hat{f}$ définie, continue et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Ex 25 Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continue.Etudiez $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_1^{1+1/n} f(x^n)dx$

Ex 26 Soit $f \in Ł_2(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+)$. Etablir $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 = 0$ et (✷) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 = 0$

Ex 27 Montrez que $f_n(x) = \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ puis étudiez $\lim\limits_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty} f_n$

Ex 28 On se donne $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t$. Etudiez son domaine de définition

1) Etudiez la continuité et la monotonie de f sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2) Montrez $\forall\, x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) + f(1+x) = \frac{1}{x}$

3) Donnez un équivalent de $f(x)$ en 0_+ et en $+\infty$.

✷ **Ex 29** a un réel fixé. Etudiez $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^a \frac{n^2t^2e^{-n^2t^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

Ex 30 Etablir $\int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-y}}{y}dy$

Ex 31 On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ et g définie par $g(x) = \frac{1}{x}(f(x) - f(0))$ si $x \neq 0$ et$g(0) = f'(0)$.

1) Montrez que g est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Etablir $g(x) = \int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$ puis g de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Ex 32 On pose $G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(tx)}{t}\mathrm{d}t$.

1) Prouvez l'existence et calculez $\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}\,\mathrm{d}t$ $(x \in \mathbb{R})$. ***Attention...***

2) Prouvez l'existence et calculez $G(x)$.

Ex 33 Onpose $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

1) Montrez $\forall x \geq 0 \quad G(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$.

Ex 34 **Exemple où le théorème intégration terme à terme ne s'applique pas**

1) Montrez rapidement l'existence de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$, pour $x > 0$.

2) Calculez $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nxt}\sin t\,\mathrm{d}t$ pour $n \geq 1$ et $x > 0$.

3) Etablir $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$

Ex 35 Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée.

1) Montrez, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \to e^{-|t|}f(x-t)$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrez que $g : x \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}f(x-t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $g'' = g - 2f$.

Ex 36 **Intégration des relations de comparaison**

Soient f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et g à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ continues par morceaux sur $[a,b[$ avec $a < b \leq +\infty$

1) On suppose ici f et g intégrables sur $[a,b[$. Etablir

$$f = O_b(g) \implies \int_x^b f = O_b\left(\int_x^b g\right) \qquad f = o_b(g) \implies \int_x^b f = o_b\left(\int_x^b g\right) \qquad f \sim_b g \implies \int_x^b f \sim_b \int_x^b g$$

2) On suppose ici f et g non intégrables sur $[a,b[$. Etablir

$$f = O_b(g) \implies \int_a^x f = O_b\left(\int_a^x g\right) \qquad f = o_b(g) \implies \int_a^x f = o_b\left(\int_a^x g\right) \qquad f \sim_b g \implies \int_a^x f \sim_b \int_a^x g$$

3) Donnez (ou vérifiez) un équivalent simple des intégrales suivantes

$$\int_0^x \frac{\arctan t\,\mathrm{d}t}{t} \sim_{+\infty} ??? \qquad \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{2x} \qquad \int_2^x \frac{dt}{\ln t} \sim_{+\infty} \frac{x}{\ln x}$$

✷ **Ex 37** Soit f continue et intégralbe sur $\mathbb{R}$. Etudiez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left|f(t-x) - f(t)\right| dt$

Ex 38 On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)(x-t)}}$.

1) Donnez l'ensemble de définition de F.

2) Etablir que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et exprimez $F'(x)$.

✷ **3)** Dressez le tableau de variations de F.

✷ **Ex 39** Domaine de défintion, continuité et valeur de $(x,y) \to \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)\arctan(yt)}{t^2} dt$

Ex 40 Soit f numérique de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telle que $f, f'' \in L^2(\mathbb{R})$. Montrez $f' \in L^2(\mathbb{R})$ et

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f'^2\right)^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f''^2\right)$$

✷ **Ex 41** Soit f continue sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs positives strictes.

1) On suppose ici f intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On pose $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour quelles valeurs de a réel la fonction $\dfrac{f}{F^a}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$?

2) On suppose ici f non intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On pose $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Pour quelles valeurs de a réel la fonction $\dfrac{f}{G^a}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$?