Quelques Corrections sur les Séries Numériques

Ex 1

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}n}=u_n}$$

Il suffit de remarquer que $2^{(-1)^n}$ vaut 2 ou $\frac{1}{2}$ selon la parité. Par suite $u_n \geq 0$ et le critère de majoration-minoration d'une série ***positive*** amène la divergence de la série par la minoration :

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}n}\geq\frac{1}{\sqrt{n}+2n}\sim\frac{1}{2n}$$

$$\boxed{\left(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n}\right)^{-2}=u_n}$$

On remarque $u_n \geq 0$ (car $\cosh x \geq 1$) et on utilise l'équivalent usuel $\cosh x \sim_{+\infty} \frac{1}{2}e^x$. On rappelle que l'équivalent d'une puissance ***fixe*** est la puissance de l'équivalent (ou autrement dit, on peut « *mettre* » un équivalent à l'intérieur d'une puissance ***fixe***) :

$$u_n=\left(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n}\right)^{-2}\sim\left(\frac{1}{2}\exp\left(\sqrt{\ln n}\right)\right)^{-2}=4\,\exp\left(-2\sqrt{\ln n}\right)=v_n$$

On applique le critère « $n^\alpha v_n$ » qui prouve la divergence ($\alpha \leq 1$ et $\lim = +\infty$) :

$$n^1 v_n=\exp\Big(\underbrace{\ln n-2\sqrt{\ln n}}_{w_n}\Big)$$

Par croissances comparées, $w_n \sim \ln n \longrightarrow +\infty$ et composition de limites avec l'exponentielle $\lim n^1 v_n = e^{+\infty} = +\infty$ Le critère d'équivalent s'applique par ***positivité***, on en déduit la divergence de $\sum u_n$

Remarque : Attention! à ne pas mettre l'équivalent à l'intérieur de l'exponentielle. ***On n'a pas*** $\exp\left(\ln n-2\sqrt{\ln n}\right) \sim \exp\left(\ln n\right)$ (qui est égal à n par ailleurs).

$$\boxed{\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\pi}{2}\right)^a-\arctan^a n=u_n}$$

De l'inégalité $\arctan x \leq \frac{\pi}{2}$, il vient immédiatement $u_n \geq 0$, puis :

$$\begin{aligned}
u_n &\overset{(1)}{\hat{=}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^a-\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right)^a \overset{(2)}{\hat{=}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^a-\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^a=\left(\frac{\pi}{2}\right)^a-\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)^a\\
&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^a-\left(\frac{\pi}{2}\right)^a\left(1-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^a \overset{(3)}{\hat{=}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^a-\left(\frac{\pi}{2}\right)^a\left(1+a\left(-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\right)+\frac{a(a-1)}{2}\left(-\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\right)^2+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^a\left(1-1+\frac{2a}{\pi}\frac{1}{n}-\frac{2a(a-1)}{\pi^2}\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\sim\left(\frac{\pi}{2}\right)^a\frac{2a}{\pi}\frac{1}{n}=\boxed{\frac{2\pi^{a-1}}{2^{a-1}}\,\mathbf{\frac{1}{n}}}
\end{aligned}$$

- **(1)** On utilise l'identité $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ pour $x \geq 0$

- **(2)** Dl de arctan en 0 car $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$
- **(3)** Dl de $(1+u)^a$ en 0 à 3 termes car $u = -\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n^2}) \longrightarrow 0$

Du l'équivalence du terme ≥ 0 de cette série au terme général de la série harmonique divergente $\sum \frac{1}{n}$ il vient $\sum u_n$ diverge.

$$\mathbf{u_n} = \arccos\sqrt{\frac{\arctan \mathbf{n}}{}} - \arcsin\sqrt{\frac{\arctan \mathbf{n}}{}}$$

On utilise la formule $\arctan n + \arctan \frac{1}{n} = \frac{\pi}{2}$, valable pour $n > 0$ et qui permet $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$. Il vient :

$$\sqrt{\frac{\arctan n}{\pi}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{n}}{\pi}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\sqrt{1 \underbrace{- \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n} + \frac{2}{3\pi}\,\frac{1}{n^3} + o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)}_{\to 0}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\,\left(1 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n} + \frac{2}{3\pi}\,\frac{1}{n^3}\Big) - \frac{1}{8}\Big(-\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{n} + \frac{2}{3\pi}\,\frac{1}{n^3}\Big)^2 + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)$$
$$= \sqrt{\frac{1}{2}}\,\left(1 - \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{n} - \frac{1}{2\pi^2}\,\frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\,\frac{1}{n} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\,\frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

Ensuite il faut « *composer* » avec les dls de arccos et arcsin, ***mais*** on n'est pas « *en* » 0, mais « *en* » $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ici, mettre en facteur « *le plus fort* » sert à rien. Le plus simple est sans doute de chercher les dls en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Comme on n'est pas en 0, ***la méthode usuelle*** est d'effectuer le changement de variable $u = x - \frac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow 0$ et on procède par dérivation, pour $x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\Big(\arcsin(x)\Big)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(u+\frac{1}{\sqrt{2}})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{2}\,u - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\,\Big(1 \underbrace{- 2\sqrt{2}u - 2u^2}_{\to 0}\Big)^{-1/2}$$
$$= \sqrt{2}\,\left(1 - \frac{1}{2}\Big(-2\sqrt{2}u - 2u^2\Big) + \frac{3}{8}\Big(-2\sqrt{2}u - 2u^2\Big)^2 + o(u^2)\right) = \sqrt{2} + 2u + 4\sqrt{2}u^2 + o(u^2)$$

On applique le théorème de ***primitivation du dl*** sans oublier le « *terme constant* » qui est ici $\arcsin(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}u + u^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}u^3 + o(u^3) = \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\,\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) + \Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^3 + o\Big(\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^3\Big)$$

J'en profite pour rappeler qu'un dl en $x = a$ s'exprime en fonction des $(x-a)^k$. Pour arccos, on trouve :

$$\text{si } x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \arccos x = \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\,\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) - \Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^3 + o\Big(\Big(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^3\Big)$$

En fait, il n'y a pas besoin de calculer si on se rappelle que $\arccos' = -\arcsin'$ et par suite $\arccos^{(i)} = -\arcsin^{(i)}$ et le théorème de **Taylor**[1]-**Young**[2] : ***Si*** une fonction est n fois dérivable en a, alors le dl d'ordre n en a est :

$$f(x) = f(a) + f'(x)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o(x-a)^n$$

Donc, si vous avez bien suivi, on change juste les signes, constante exclus. Terminons le dl à l'ordre 2 :

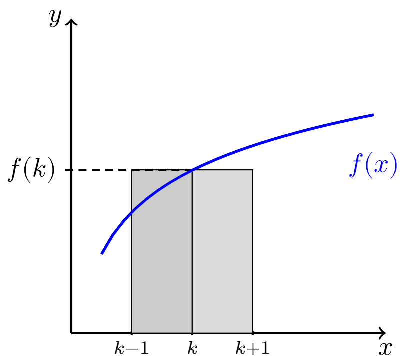
$$u_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\,\frac{1}{n} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\,\frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\,\frac{1}{n} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\,\frac{1}{n^2} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)$$
$$= \frac{\pi}{4} - \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\,\frac{1}{n} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\,\frac{1}{n^2}\Big) - \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\,\frac{1}{n} + \ldots\Big)^2 - \left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\,\frac{1}{n} - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\,\frac{1}{n^2}\Big) + \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\,\frac{1}{n} + \ldots\Big)^2\right) + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{n} + o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

1. **Brook Taylor** : mathématicien anglais (1685-1731).Son nom est resté attaché au développement en série entière.
2. **William Henry Young** : mathématicien anglais (1863-1942). Contributions en analyse.

On conclut par $u_n \sim \frac{2}{\pi}\frac{1}{n}$. Ceci prouve que la série est à termes posotofs, tout au moins à partir d'un certain rang, le ***critère d'équivalent s'appliquе*** donc : le terme général de la série $\sum u_n$ étant équivalent auterme général de la ***série harmonique*** divergente, la série $\sum u_n$ ***diverge.***

$$\mathbf{u_n = \sum \frac{1}{\sum_{k=2}^{n} \ln^2 k}}$$

On utilise la comparaison série-intégrale pour déterminer un équivalent de a_n. On pose $f(x) = \ln^2(x)$ qui est ***croissante*** sur chacun des 2 intervalles $[k-1, k]$ et $[k, k+1]$, pour $k \geq 2$. Par suite :



$$\int_{k-1}^{k} \ln^2 x \, dx \leq \int_{k-1}^{k} \ln^2 k \, dx = \ln^2 k = \int_{k}^{k+1} \ln^2 k \, dx \leq \int_{k}^{k+1} \ln^2 x \, dx$$

$$\int_{1}^{n} \ln^2 x \, dx = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln^2 x \, dx \leq \sum_{k=2}^{n} \ln^2 k \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln^2 x \, dx = \int_{2}^{n+1} \ln^2 x \, dx$$

Reste à calculer une primitive de $\ln^2 x$. On suppose connu que $x \ln x - x$ est une primitive de $\ln x$ (par une ipp). On pose $u' = 1$ $v = \ln^2 x$ $u = x$ $v' = 2\frac{\ln x}{x}$ puis

$$\int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - \int x 2 \frac{\ln x}{x} \, dx = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x)$$

Si on revient à notre encadrement, on arrive à :

$$n \ln^2 n - 2n \ln n + 2n - 2 = \int_{1}^{n} \ln^2 x \, dx \leq \frac{1}{u_n} \leq \int_{2}^{n+1} \ln^2 x \, dx = (n+1)\ln^2(n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - 2\ln^2 2 + 4\ln 2 - 4$$

On a immédiatement, à gauche, $n \ln^2 n - 2n \ln n + 2n - 2 \sim n \ln^2 n$.

Cherchons un équivalent de, à droite, $w_n = (n+1)\ln^2(n+1) - 2(n+1)\ln(n+1) + 2(n+1) - 2\ln^2 2 + 4\ln 2 - 4 \sim n \ln^2 n$. On peut tout de suite écrire $w_n \sim (n+1)\ln^2(n+1)$ car les autres quantités sont négligeables en $+\infty$ (par le rapport tend vers0, croissances comparées). Ensuite

$$(n+1)\ln^2(n+1) = (n+1)\left(\ln\left(n(1+\frac{1}{n})\right)\right)^2 = (n+1)\left(\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})\right)^2 \overset{(1)}{\simeq} (n+1)\left(\ln n + o(\ln n)\right)^2 \sim n \ln^2 n$$

- **(1)** $\ln(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ car $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$ et $\frac{1}{n} = o(\ln n)$

Le théorème d'encadrement des équivalents nous amène alors $\frac{1}{u_n} \sim n \ln^2 n$. Il suit $u_n \sim \dfrac{1}{n \ln^2 n}$. On reconnaît une série de Bertrand, mais ce n'est pas au programme. On peut néanmoins savoir qu'elle converge. Malheureusement, le critère $n^a u_n$, très utile, ne fonctionne pas sur cet exemple (il ne fonctionne pas pour une puissance de n égale en dessous à 1). Il faudrait refaire une comparaison série-intégrale, mais cette fois-ci on peut épargner les détails. Si on a bien compris son mécanisme (qui est le même car la fonction est monotone), on calcule la primitive de $\frac{1}{x \ln^2 x}$ qui est $\frac{-1}{\ln x}$ (je vous laisse y réfléchir). On arrive ensuite à un encadrement, mais on ne prend que la majoration :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln^2 k} \leq \int_{2}^{n+1} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln 2}$$

On a prouvé que les sommes partielles de la série étaient majorées. Comme la série est ***positive***, ceci prouve sa convergence.

Ex 2 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles positives convergentes. Montrez $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

On rappelle l'inégalité ***à retenir*** $ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2)$: elle provient du développement de $(a-b)^2 \geq 0$. On l'applique ici à $a=\sqrt{u_n}$ et $b=\sqrt{v_n}$. Il vient alors :

$$0 \leq \sqrt{u_n v_n} \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n}^2+\sqrt{v_n}^2\right) \leq \frac{1}{2}u_n+\frac{1}{2}v_n$$

Du critère de ***majoration*** des séries ≥ 0, comme les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, il suit que la série $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

IMT PSI 2023-2022 (équivalent somme) ✍

Ex 3 Trouvez un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant **(i)** une comparaison série-intégrale **(ii)** les sommes de Riemann

La fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante d'où l'encadrement : $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, la 2$^{\text{e}}$ seulement pour $k \geq 2$. Puis, on somme ces inégalités de $n+1$ à $2n$:

$$2(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}) = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \sum_{k=n+1}^{2n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_n^{2n} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2(\sqrt{2n}-\sqrt{n})$$

On a $2(\sqrt{2n}-\sqrt{n}) = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}$ et on effectue un petit dl pour obtenir un équivalent de la quantité de gauche :

$$\begin{aligned}2(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+1}) &= 2\left(\sqrt{2n}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{1/2}-\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}\right) = 2\left(\sqrt{2n}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n^2})\right)-\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}o(\frac{1}{n^2})\right)\right)\\ &= 2\left((\sqrt{2}-1)\sqrt{n}+O(\frac{1}{\sqrt{n}})\right) \sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}\end{aligned}$$

Par le théorème encadrement des équivalents, on conclut $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim\sim 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k+n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} = \sqrt{n}\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}\\ &\overset{(2)}{=} \sqrt{n}\,S_n - \frac{1}{\sqrt{2n}} \overset{(3)}{\approx} \sqrt{n}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = \sqrt{n}\Big[2\sqrt{x+1}\Big]_0^1 = (2\sqrt{2}-2)\sqrt{n}\end{aligned}$$

- **(1)** Changement d'indices $k \longrightarrow k+n$
- **(2)** On reconnaît une somme de Riemann dans la quantité du type $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ (ou $\sum_{k=0}^{n-1}$). ***Attention!*** $\sum_{k=0}^{n}$ n'est pas correct car un des « *rectangles d'approche déborde* » de l'aire concernée, ou de l'intervalle $[0,1]$ si vous préférez (faites un dessin). Ici $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$, fonction qui est bien ***continue*** sur $[0,1]$. Le théorème s'applique : $S_n \longrightarrow \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}} = I$
- **(3)** Comme $I \neq 0$, $S_n \longrightarrow I$ amène $S_n \sim I$. D'autre part $\frac{1}{\sqrt{2n}} = o(\sqrt{n})$

Ex 4 Etablir la convergence et calculez la somme de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2+3n+2}$

On a immédiatement que $u_n = \dfrac{1}{n^2+3n+2} \sim \dfrac{1}{n^2}$. Du critère d'équivalence d'une série ***positive*** à une série de **Riemann**[3] convergente, $\sum \frac{1}{n^a}$ avec $a = 2 > 1$, il vient que la série $\sum u_n$ est convergente. Ensuite, on fait une décomposition en éléments simples (je ne mets pas les détails) : $\dfrac{1}{n^2+3n+2} = \dfrac{a}{n+2} + \dfrac{b}{n+1} = \dfrac{-1}{n+2} + \dfrac{1}{n+1}$

On calcule ensuite la somme par ***téléscopage* :**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n+2} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{-1}{n+2} + \frac{1}{n+1} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N+1} \frac{-1}{n+1} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} = \lim_{N\to+\infty} \frac{-1}{N+2} + \frac{1}{1} = 1$$

Mines-Ponts PSI 2021 (somme et convergence d'une série) ✌✍

Ex 6 Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Déterminez les couples (a,b) pour lesquels la série de terme général u_n converge. Déterminez alors sa somme.

On effectue un développement du terme général u_n de la série,, en utilisant le dl de $\sqrt{1+x}$ lorsque $x \to 0$:

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2} = \sqrt{n} + a\sqrt{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} + b\sqrt{n\left(1+\frac{2}{n}\right)} \\ &\overset{1/n\to 0}{\widehat{=}} \sqrt{n}\left(1 + a\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{n} \underbrace{-\frac{1}{8}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{O(1/n^2)}\right) + b\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2}{n} \underbrace{-\frac{1}{8}\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{O(1/n^2)}\right)\right) \\ &= \left(1+a+b\right)\sqrt{n} + \left(\frac{1}{2}a + b\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \underbrace{\left(-\frac{1}{8}a - \frac{1}{2}b\right)\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{O(1/n^{3/2})} \end{aligned}$$

- Si $1+a+b \neq 0$, $u_n \sim (1+a+b)\sqrt{n} \not\to 0$. La série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $1+a+b = 0$ et $\frac{1}{2}a + b \neq 0$, $u_n \sim \left(\frac{1}{2}a+b\right)\frac{1}{\sqrt{n}}$. Du critère d'équivalent d'une série de ***signe constant*** (signe de $\frac{1}{2}a+b$), à une série de **Riemann**[3] divergente, il vient que la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $1+a+b = 0$ et $\frac{1}{2}a+b = 0$ (qui se résoud en $a = -2$, $b = 1$), Il vient $u_n \sim \left(-\frac{1}{8}a - \frac{1}{2}b\right)\frac{1}{n^{3/2}}$ ou même $u_n = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Des critères usuels sur les ***séries positives***, on en tire que $\sum u_n$ converge.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} + \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n+2} \overset{(1)}{\widehat{=}} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n} - 2\sum_{n=0}^{N} \sqrt{n+1} + \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n+2} \\ &\overset{(2)}{\widehat{=}} \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \sqrt{n} - 2\sum_{n=1}^{N+1} \sqrt{n} + \sum_{n=2}^{N+2} \sqrt{n} = \lim_{N\to+\infty} \sqrt{0} + \sqrt{1} - 2\sqrt{2} + -2\sqrt{N+1} + \sqrt{N+1} + \sqrt{N+2} \\ &= \lim_{N\to+\infty} 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{N}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{N}} + \sqrt{1+\frac{2}{N}}\right) = \lim_{N\to+\infty} 1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{N}\underbrace{\left(-1 - \frac{1}{2}\frac{1}{N} + 1 + \frac{1}{2}\frac{2}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)\right)}_{\underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}N} = \boxed{\frac{3}{2} - 2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

- **(1)** ***Attention!*** à ne pas couper la somme ***infinie*** en 3 car les 3 sommes divergent, il faut d'abord passer par la limite pour avoir des sommes ***finies***
- **(2)** On ré-indice pour télescoper les 3 sommes.

CCP PC 2005

Ex 7 Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Etablir que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum e^{-1/u_n}$ convergent.

On utilise l'inégalité usuelle $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ qui provient du développement de $(a-b)^2 \geq 0$. Ici, $a = \sqrt{u_n}$ et $b = \frac{1}{n}$:

$$0 \leq \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leq \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\frac{1}{n^2}$$

La série $\sum u_n$ converge par hypothèse et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ aussi , par critère de Riemann. Par sommation et le critère de majoration d'une série ***positive***, la série demandée converge.

C'est un peu plus compliqué de trouver un majorant de la deuxième expression. En fait si on fait un dessin, on s'aperçoit que $e^{-1/x} \leq x$. Il reste à le démontrer. Comme $x \geq 0$, cette inégalité équivaut à $\frac{1}{x}e^{-1/x} \leq 1$. On conclut : par croissance comparée $\lim_0 \frac{1}{x}e^{-1/x} = 0$ et donc, ***par propriété de limite***, cette quantité est inférieure à 1, pour x assez proche de 0. Comme $\sum u_n$ converge, on en déduit $u_n \longrightarrow 0$ puis, donc, à partir d'un certain rang $0 \leq e^{-1/u_n} \leq u_n$.

Le critère de majoration d'une série ***positive*** nous amène la convergence de $\sum e^{-1/u_n}$

Mines-Ponts PC 2015 | Centrale PC 2008 (série de terme sous forme de somme) ✷

Ex 9 Soit $\alpha > 0$. Nature de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + (n-k)^\alpha}$? [**2008 :** $\alpha = 2$] .

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha + (n-k)^\alpha} = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha + \left(1-\frac{k}{n}\right)^\alpha} \overset{(1)}{\hat{=}} \frac{1}{n^{\alpha-1}} S_n \overset{(2)}{\approx} \frac{1}{n^{\alpha-1}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha + (1-x)^\alpha}$$

- **(1)** La fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{x^\alpha + (1-x)^\alpha}$ est ***continue*** sur $[0,1]$, le dénominateur ne s'y annulant pas. Par suite la somme de Riemann $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ converge vers l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
- **(2)** il faut vérifier que cette intégrale (qui sera alors l'équivalent en vertu de $\lim S_n = \ell \neq 0 \iff S_n \sim \ell$) n'est ***pas nulle***. Cela provient du fait que la fonction est ***continue et*** > 0 sur l'intervalle, donc son intégrale aussi.

On en déduit alors que la série $\sum u_n$ converge ssi $\alpha > 2$.

IMT PSI 2021 | Centrale PSI 2015 (nature d'une série) ✷

Ex 10 Nature de la série de terme général $\sin\left(\pi(1+\sqrt{2})^n\right)$?

Ind. pas dans Oral originel : on pourra d'abord étudier la série $\sum \sin\left(\pi(\sqrt{2}-1)^n\right)$

1) On constate que $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, par conséquent $(\sqrt{2}-1)^n \longrightarrow 0$ puis $u_n = \sin\left(\pi(\sqrt{2}-1)^n\right) \sim \pi(\sqrt{2}-1)^n$. Du critère d'équivalent d'une série ***positive*** à une série ***géométrique*** convergente (car sa raison vérifie $|\sqrt{2}-1| < 1$), il résulte que la série $\sum u_n$ converge.

2) Première remarque : ici les termes ne sont pas nécessairement positifs et la série n'est pas alternée donc il n'y a pas beaucoup de critères du cours qui « *marchent* »… On peut avoir alors l'idée usuelle de regarder la ***suite*** des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(\pi(1+\sqrt{2})^k)$ mais on sera vite bloqué. En fait, toute l'idée est dans le π… et dans l'utilisation de la question précédente et de la formule du binôme de **Newton**[4] :

$$\underbrace{\pi(\sqrt{2}-1)^n}_{A_n} + \underbrace{\pi(\sqrt{2}+1)^n}_{B_n} = \pi \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \sqrt{2}^k + \pi \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \sqrt{2}^k = \pi\, 2 \underbrace{\sum_{k \text{ pair}} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k}_{N}$$

k étant pair, $\sqrt{2}^k$ est entier et par suite N est entier, soit $A_n + B_n = 2\pi N$. Il suit donc que $\sin B_n = -\sin A_n$. Comme la série $\sum A_n$ converge d'après la question précédente, il suit que la série $\sum B_n$ converge aussi.

Ex 11 ✷ Nature de $\sum \dfrac{1}{p_n n^a}$ $(a \in \mathbb{R})$, p_n étant le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

4. **Isaac Newton** : anglais (1643-1727). Partage avec Leibniz la découverte du calcul infinitésimal. Connu pour la formule du binôme et la méthode éponyme d'approximation des zéros d'une fonction.

On commence par constater que pour $1 \le n \le 9$, le nombre de chiffres dans l'écriture décimale est $p_n = 1$, pour $10 \le n \le 99$, c'est $p_n = 2$, pour $100 \le n \le 999$, c'est $p_n = 3$. Plus généralement pour $10^k \le n \le 10^{k+1} - 1$, $p_n = k+1$. En passant au $\ln \nearrow$ donc conserve l'inégalité :

$$k \ln 10 \le \ln n \le \ln(10^{k+1} - 1) \le (k+1)\ln 10 \Longrightarrow \frac{\ln n}{\ln 10} - 1 \le k \le \frac{\ln n}{\ln 10} \Longrightarrow k \sim \frac{\ln n}{\ln 10}$$

Je vous passe les détails pour la preuve de l'équivalent ($1 = o(\ln n)$). On en déduit $p_n = k+1 \sim \dfrac{\ln n}{\ln 10}$ puis $u_n = \dfrac{1}{p_n n^a} \sim \dfrac{\ln 10}{\ln n\, n^a}$. On reconnaît une série de **Bertrand**[5] (Je ne refais pas la démo ici) : on a donc que la série $\sum u_n$ converge ssi $a > 1$.

Ex 12

$$\boxed{\frac{(-1)^n}{n \ln n} = u_n}$$

- C'est bien une série alternée car $n \ln n \ge 0$
- $|u_n| = \frac{1}{n \ln n} \longrightarrow 0$ immédiatement.
- On sait que $n \nearrow$ et $\ln n \nearrow$. Par multiplication de termes positifs, $n \ln n \nearrow$ aussi, puis $|u_n| \searrow$

La série $\sum u_n$ vérifiant le CSSA, elle converge.

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n + (-1)^n}} = u_n}$$

Cette série n'est pas alternée, malgré le $(-1)^n$, elle est positive, on se contente donc d'appliquer le critère d'équivalent : $u_n \sim \frac{1}{n}$. La série diverge donc.

$$\boxed{\sin\left(\pi\sqrt{n^2 + a^2}\right) = u_n}$$

Il n'est pas évident que cette série soit alternée, ni d'ailleurs que $|u_n| \searrow$. On effectue donc un petit développement :

$$u_n \overset{(1)}{\widehat{=}} \sin\left(\pi n \sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}\right) \overset{(2)}{\widehat{=}} \sin\left(\pi n \left(1 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2} + o(\frac{1}{n^3})\right)\right) = \sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\frac{a^2}{n} + o(\frac{1}{n^2})\right)$$
$$\overset{(3)}{\widehat{=}} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{a^2}{n} + o(\frac{1}{n^2})\right) \overset{(4)}{\widehat{=}} (-1)^n \left(\frac{\pi}{2}\frac{a^2}{n} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \underbrace{(-1)^n \frac{\pi}{2}\frac{a^2}{n}}_{v_n} + \underbrace{o(\frac{1}{n^2})}_{w_n}$$

- **(1)** On met le « *plus fort* » en facteur pour ramener à un dl usuel en 0.
- **(2)** Comme $u = \frac{a^2}{n^2} \to 0$, on utilise le dl en 0 de $\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2}$. Je rappelle que pour une série on développe jusqu'à un ***petit-o*** absolument convergent, mais ceci doit être ***à la fin***. Donc en cours, on développe un peu plus ou un peu moins ... Ici à cause du n initial, on développe jusqu'à un $o(\frac{1}{n^3})$

5. **Joseph Bertrand** : mathématicien français (1822-1900).

- **(3)** On a $\sin(u+\pi)=-\sin u$ et $\sin(u+n\pi)=(-1)^n\sin u$. Idem pour $\cos u$
- **(4)** A l'intérieur du sin, la quantité $\to 0$, on effectue un petit dl en 0 jusqu'à un $o(\frac{1}{n^2})$, donc, ici, un seul terme.

- La série $\sum v_n$ converge, par application immédiate du CSSA.
- La série $\sum w_n$ converge par le ***critère petit-0*** d'une série positive convergente : série de Riemann avec $a=2>1$.

Par somme de 2 séries convergentes, la série $\sum u_n$ converge.

$$\boxed{\frac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}=u_n}$$

On peut « *comprendre / supposer* » que il est peu probable que $|u_n|\searrow$, cad $\ln n+(-1)^n\nearrow$ par conséquent on ne pourra sans doute pas utiliser le CSSA. On effectue un donc développement de u_n :

$$\begin{aligned}u_n &\overset{(1)}{\hat{=}} \frac{(-1)^n}{\ln n(1+\frac{(-1)^n}{\ln n})}=\frac{(-1)^n}{\ln n}\Big(1+\frac{(-1)^n}{\ln n}\Big)^{-1}\overset{(2)}{\hat{=}}\frac{(-1)^n}{\ln n}\Big(1-\frac{(-1)^n}{\ln n}+\frac{1}{\ln^2 n}+o(\frac{1}{\ln^2 n})\Big)\\ &=\frac{(-1)^n}{\ln n}-\frac{1}{\ln^2 n}+\frac{(-1)^n}{\ln^3 n}+o\Big(\frac{1}{\ln^3 n}\Big)\end{aligned}$$

- **(1)** On met le « *plus fort* » en facteur, cad ici $\ln n$, pour avoir du $1+\to 0$.
- **(2)** Comme $u=\frac{1}{\ln n}\to 0$, on utilise le dl en 0 de $(1+u)^{-1}=\frac{1}{1+u}$. Je rappelle que pour les séries, ***on sait*** à quel ordre effectuer le dl : jusque à un ***petit-o*** d'une série absolument convergente (ou positive convergente), si c'est possible …

Maintenant, il faut comprendre que l'on y arrivera ***jamais*** par cette méthode. En effet, on aura toujours des $o(\frac{1}{\ln^a n})$ et la série $\sum\frac{1}{\ln^a n}$ est ***toujours divergente***… On va ici utiliser la méthode des équivalents successifs. Suivez bien le raisonnement : on se sert du développement asymptotique précédent (ce n'est pas un dl), ce n'est donc pas du temps perdu.

• On a $u_n\sim\dfrac{(-1)^n}{\ln n}=v_n$ (par le da). La série $\sum v_n$ est immédiatement convergente par le CSSA. ***mais attention*** on ne peut pas en déduire que la série $\sum u_n$ converge ! Le critère d'équivalent ***ne s'applique pas*** ici.

• En reprenant le da, on a l'équivalent $u_n-v_n\sim-\dfrac{1}{\ln^2 n}=w_n$. Or la série $\sum w_n$ diverge (on peut reconnaître une série de Bertrand mais ce n'est pas au programme). Pour le prouver, le plus simple est le critère $n^a u_n$. On prend $a=1$, puis $\lim n^1 w_n=\lim\frac{n}{\ln^2 n}=+\infty$. On termine en remarquant que ***ici*** le critère d'équivalent s'applique, puisque w_n est ***positive***. La série $\sum u_n-v_n=t_n$ diverge donc et comme $u_n=t_n+v_n$ (diverge + converge), la série $\sum u_n$ diverge.

Navale PSI 2021 (convergence série alternée)

Ex 13 Nature de la série de terme général $\ln\Big(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\Big)$?

On effectue un dl de u_n. Je rappelle qu'il est en général préférable de développer de l'intérieur ***vers*** l'extérieur, cad on ne ***commence pas*** par développer le ln, et que l'objectif est que le dl final comporte un $o(\frac{1}{n^a})$ avec $a>1$ (c'est souvent $a=2$, $a=\frac{3}{2}$ s'il y a des $\sqrt{n}$, …) :

$$\begin{aligned}\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\Big)&\overset{(1)}{\hat{=}}\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n(1+\frac{1}{n})^{1/2}}\Big)=\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big)\overset{(2)}{\hat{=}}\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big(1-\frac{1}{2}\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\Big)\Big)\\ &=\ln\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1^n)}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\Big)\\ &\overset{(3)}{\hat{=}}\Big(\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1^n)}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\Big)-\frac{1}{2}\Big(\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{2}\frac{(-1^n)}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\Big)^2+o\Big(\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1^n)}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\Big)^2\\ &\overset{(4)}{\hat{=}}\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{v_n}-\underbrace{\frac{(-1)^n}{2n^2}}_{w_n}+\underbrace{o(\frac{1}{n^2})}_{t_n}\end{aligned}$$

- **(1)** On met en facteur le « *plus fort* » dans la racine, soit n^2, pour avoir du $1+\to 0$
- **(2)** Comme $u=\frac{1}{n}\to 0$, on fait un dl en 0 de $(1+u)^{-1/2}$. Comme on a remarqué le $\frac{1}{n}$ en facteur, on l'effectue seulement à la précision $\frac{1}{n}$, car on l'aura à la précision $\frac{1}{n^2}$ (regardez la ligne d'après si vous ne comprenez pas bien)
- **(3)** Comme $u=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1^n)}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\to 0$, on utilise le dl en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$
- **(4)** Le $o\Big(\frac{(-1)^n}{n}-\frac{(-1^n)}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\Big)^2$ est unb petit-o du « *plus fort* », soit $\frac{1}{n^2}$

- La série $\sum v_n$ converge par le CSSA (immédiat).
- La série $\sum w_n$ converge absolument, donc converge, car $|w_n|=\frac{1}{2n^2}$, série de Riemann convergente.
- La série $\sum t_n$ converge par le critère petit-o ***car*** $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série convergente ***positive***.

Par sommation de 3 séries convergentes, la série $\sum u_n$ converge.

Mines-Ponts PSI 2023 | Petites Mines PSI 2013 (autour de séries alternées) ✷✍

Ex 14 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sqrt{k}$ et $T_n=S_n+S_{n+1}$.

1) Montrez $S_n\sim\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\sqrt{n}$.

2) Montrez que T_n admet une limite finie et que celle-ci est positive.

1) [**2013 :** Nature de $\sum(T_{n+1}-T_n)$.]

2) [**2013 : En déduire que** (T_n) converge vers une limite $\ell<0$ puis que $S_n\sim(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{2}$.]

3) [**2013 :** Nature de la série $\sum\frac{1}{S_n}$?]

1) On calcule $t_{n+1}-t_n=s_{n+2}-s_n=(-1)^{n+2}\sqrt{n+2}+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}=(-1)^n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$.

Comme $\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\geq 0$, c'est donc une série ***alternée***. Pour prouver la convergence le premier réflexe est d'essayer le CSSA et, notamment, de regarder si elle (***sa valeur absolue***) décroit. On choisit la méthode de la dérivation :

$$\frac{d}{dn}\Big(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\Big)=\frac{1}{2\sqrt{n+2}}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{2\sqrt{n+2}\sqrt{n+1}}\leq 0$$

Reste à prouver $\longrightarrow 0$. Un petit dl suffira :

$$(-1)^n(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=(-1)^n\left(\sqrt{n}\Big(1+\frac{2}{n}\Big)^{1/2}-\sqrt{n}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{1/2}\right)=(-1)^n\sqrt{n}\Big(\Big(1+\frac{1}{2}\frac{2}{n}+o(\frac{1}{n})\Big)-\Big(1+\frac{1}{2}\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n})\Big)\Big)\sim\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}-$$

2) On aura remarqué le télescopage des termes : $S_n=\sum_{k=1}^{n}(t_{k+1}-t_k)=t_{n+1}-t_1$. Comme Q1 a établi la convergence de la série $\sum(t_{n+1}-t_n)$, cela entraîne (équivaut) la convergence de la suites des somme partielles S_n. On en déduit que la suite (t_n) converge et vers $\ell=\sum_{k=1}^{+\infty}(t_{k+1}-t_k)+t_1$. On a $t_1=-2+\sqrt{2}<0$.

Quant à la somme infinie de la série alternée $\sum t_{n+1}-t_n$, ***comme*** elle vérifie le CSSA, le cours nous apprend qu'elle est du signe du premier terme, soit $t_2-t_1=-\sqrt{3}+\sqrt{2}<0$. Je vous rappelle qu'on a même un encadrement plus précis, si besoin est, par les sommes partielles (d'indice) paires et impaires.

On a donc démontré $t_n=s_{n+1}+s_n\longrightarrow\ell$ soit encore, comme $s_{n+1}=s_n+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}$, que $2s_n+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}\longrightarrow\ell$ ce qui s'écrit encore $2s_n+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}=\ell+o(1)$ puis $2s_n=(-1)^n\sqrt{n+1}+o(\sqrt{n})$. Finalement $2s_n\sim(-1)^n\sqrt{n+1}\sim(-1)^n\sqrt{n}$. On a bien le résultat de l'énoncé.

Remarques

- Je rappelle le résultat général, utilisé plus haut, que je ne redémontre pas ici, la ***série*** $\sum u_n-u_{n-1}$ converge ***ssi*** la ***suite*** (u_n) converge. Il sert surtout dans le sens droite-gauche, pour prouver qu'une suite converge, car il n'y a pas beaucoup de critères de convergence pour le suites (à votre programme, il n'y a guère que « *croissant majoré* » ou « *décroissant minoré* »).

- Comme cela sert à la question d'après, je reprends $2s_n+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}=\ell+o(1)$ en le développant :

  $$2s_n+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}=2s_n+(-1)^{n+1}\sqrt{n}(1+\frac{1}{n})^{1/2}=2s_n+(-1)^{n+1}\sqrt{n}(1+\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n}))=2s_n+(-1)^{n+1}\sqrt{n}+o(1)$$

  Il suit le développement de s_n à deux termes $2s_n=(-1)^n\sqrt{n}+\ell+o(1)$

3) Il y a un petit piège ici, des questions précédentes on déduit $\frac{1}{s_n}\sim\frac{2(-1)^n}{\sqrt{n}}=w_n$ et cette dernière série converge immédiatement par le CSSA ***mais on ne peut pas*** en déduire la convergence de la série $\sum\frac{1}{s_n}$ car le critère d'équivalent ***ne s'applique pas ici*** : les termes ne sont pas positifs. On va chercher l'équivalent de $\frac{1}{s_n}-w_n$ en se servant de la remarque plus haut :

$$\frac{1}{s_n}-w_n=\frac{\sqrt{n}-2(-1)^n s_n}{s_n\sqrt{n}}=\frac{(-1)^{n+1}}{s_n\sqrt{n}}((-1)^{n+1}\sqrt{n}+2s_n)\sim\frac{(-1)^{n+1}}{s_n\sqrt{n}}\ell\sim\frac{-2\ell}{n}$$

La série harmonique $\sum\frac{-2\ell}{n}$ diverge ***mais ici*** le critère d'équivalent s'applique par la ***positivité***. On en déduit que la série de terme général $x_n=\frac{1}{s_n}-w_n$ diverge. Comme $\frac{1}{s_n}=x_n+w_n$, somme d'une série convergente et d'une série divergente, la série $\sum\frac{1}{s_n}$ ***diverge***.

TPE PSI 2016 (série alternée)

Ex 15 Que dire de la nature d'une série de terme général $v_n=\frac{(-1)^n}{n^{1/3}}+\frac{2}{n^{2/3}}+o(\frac{1}{n^{2/3}})$?

1)

$$v_n=\underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{1/3}}}_{u_n}+\underbrace{\frac{2}{n^{2/3}}}_{w_n}+\underbrace{o(\frac{1}{n^{2/3}})}_{t_n}$$

- La série $\sum u_n$ converge par le CSSA (immédiat).
- La série de Riemann $\sum w_n$ diverge car $\frac{2}{3}<1$
- On ne peut rien dire sur la série $\sum t_n$ car c'est le petit-o d'une série divergente.

Il faut procéder autrement par ***une autre méthode***, on utilise les « *équivalents successifs* » :

- On a $v_n\sim u_n$ ***mais*** on ne peut pas conclure à la convergence de $\sum v_n$ car les termes ne sont pas positifs : le critère d'équivalent ne s'applique pas.
- On a $v_n-u_n\sim w_n$. ***Ici, par contre,*** le critère d'équivalent s'applique car le terme est positif. On en déduit que la série $\sum v_n-u_n$ diverge. Via $y_n=v_n-u_n$ puis $v_n=u_n+y_n$, la série $\sum v_n$ diverge par sommation de la série convergente $\sum u_n$ et de la série divergente $\sum y_n$.

Mines-Ponts PSI 2021 (série fraction rationnelle complexe)

Ex 16 Soient $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ tels que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$. Etudiez la convergence de la série $\sum(-1)^n\frac{P(n)}{Q(n)}$

On pose $P(X)=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ avec $a_p\neq 0$, soit $\deg P=p$ et $Q(X)=\sum_{k=0}^{q}b_kX^k$ avec $a_q\neq 0$, soit $\deg Q=q$. On peut commencer par remarquer :

- Si $q\geq p+2$, alors $\left|(-1)^n\frac{P(n)}{Q(n)}\right|\sim\frac{|a_p|}{|b_q|}\frac{1}{n^{q-p}}=O(\frac{1}{n^2})$. La série converge absolument, donc converge.
- Si $q\leq p$, le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge donc. IL est plus correct de le démontrer proprement car les coefficients sont complexes. On a $u_n\longrightarrow 0$ ssi $|u_n|\longrightarrow 0$ et $|u_n|\sim\frac{|a_p|}{|b_q|}n^{p-q}$. On est ici dans $\mathbb{R}^+$, plus de souci, la limite est immédiate et vaut ou $+\infty$ (***Attention!*** pas de limite ∞ dans $\mathbb{C}$) ou $\frac{|a_p|}{|b_q|}$ (si $p=q$).

Reste à étudier $q=p+1$. On effectue un petit développement :

$$u_n=(-1)^n\frac{a_pn^p+O(n^{p-1})}{b_{p+1}n^{p+1}+O(n^p)}=(-1)^n\frac{a_p+O(\frac{1}{n})}{b_{p+1}n+O(1)}=(-1)^n\frac{1}{b_{p+1}n}\left(a_p+O(\frac{1}{n})\right)\left(1+O(\frac{1}{n})\right)^{-1}=\frac{a_p}{b_{p+1}}\frac{(-1)^n}{n}+O(\frac{1}{n^2})$$

La série $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ converge immédiatement par le CSSA et donc la série $\alpha\sum\frac{(-1)^n}{n}$ aussi, pour $\alpha\in\mathbb{C}$. De même, critère

grand-O, la série converge, même dans $\mathbb{C}$, (c'est la convergence absolue car $u_n = O(\frac{1}{n^2})$ ssi $|u_n| \leq M\frac{1}{n^2}$ dans un voisinage de l'infini). Par sommation, la série $\sum u_n$ converge.

Mines-Ponts PSI 2021 -2019 (nature série numérique)

Ex 17 Soit $u_n = \left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^{\sinh(1/n)}$.

1) Déterminez, si elle existe, la limite de u_n lorsque $n \to +\infty$, notée ℓ.

2) Déterminez la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

3) Etudiez la convergence de la série $\sum(-1)^n(u_n - \ell)$. [Question absente en 2019]

1)

$$u_n = \exp\left(\underbrace{\sinh\left(\frac{1}{n}\right)}_{v_n \longrightarrow 0}\ \underbrace{\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)}_{w_n \longrightarrow \ln(0) = -\infty}\right)$$

Forme indéterminée : on cherhche un équivalent simple de « *chacun* » :

- $v_n \sim \frac{1}{n}$
- ***Méthode 1 (standard) :*** on fait un petit dl :
  $w_n = \ln\left(\frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})\right) = \ln\left(\frac{1}{2n^2}(1 + o(1))\right) = \ln\left(\frac{1}{2n^2}\right) + \ln(1 + o(1)) = -2\ln n - \ln 2 + o(1) \sim -2\ln n$

  Méthode 2 (efficace) :

  $\cosh\frac{1}{n} - 1 \sim \frac{1}{2n^2} \longrightarrow 0 \boxed{\neq 1}$, on compose avec ln (limite programme) : $w_n \sim \ln\left(\frac{1}{2n^2}\right) \sim -2\ln n$

Finalement $v_n w_n \sim \dfrac{-2\ln n}{n} \longrightarrow 0$ et par ***composition de limites*** avec exp, $u_n \longrightarrow e^0 = 1$

Remarque : Attention ! à ne pas mettre l'équivalent dans exp ! (on ne peut composer les équivalents)

2)

$$\begin{aligned}
u_n &= \exp\left(\sinh\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)\right) = \exp\left(\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\ln\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\ln\left(\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(-2\ln n - \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)\right)\\
&= \exp\left(\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(-2\ln n - \ln 2 + \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Attention ! à bien écrire dans l'ordre de négligeabilité. ***Attention !*** au petit-o

$$= \exp\left(\frac{-2\ln n}{n} + \frac{-\ln 2}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)$$

Attention ! on ne peut pas développer plus que $\dfrac{\ln n}{n^2}$ ***donc éviter de mettre du*** $\dfrac{1}{n^2}$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \left(\frac{-2\ln n}{n} + \frac{-\ln 2}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-2\ln n}{n} + \frac{-\ln 2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\\
&= 1 + \frac{-2\ln n}{n} + \frac{-\ln 2}{n} + 2\frac{\ln^2 n}{n^2} + 2\ln 2\frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On a $u_n - 1 \sim \dfrac{-2\ln n}{n}$. La série $\sum \dfrac{\ln n}{n}$ diverge (par comparaison série-intégrale je ne le retraite pas ici car déjà dans d'autres endroits dans le cours)) et par critère d'équivalent, ***comme*** $u_n - 1$ de signe constant, la série $\sum(u_n - 1)$ diverge.

Ex 19

$$\sum \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,dx$$

L'avantage des séries-intégrales positives est, assez souvent, le critère de majoration-minoration d'une série positive permet de conclure. Inutile de chercher à calculer l'intégrale, en général elle ne se calcule pas. On cherche plus précisément à majorer (ou minorer) par une intégrale qui se ***calcule*** (cad la fonction-intégrande se primitive). Le problème est de « *deviner* » si la série converge ou diverge pour majorer ou minorer, sinon il faudra essayer les deux. On a clairement $u_n \geq 0$ et on conclut à la convergence de $\sum u_n$ par :

$$0 \leq u_n = \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}} \leq \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1}} = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{1/n} = \frac{2}{3}\,\frac{1}{n^{3/2}} \qquad \text{(série de Riemann convergente } \frac{3}{2} > 1)$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}} \sin t\, dt = u_n$$

Il n'est pas immédiatement visible que cette série est alternée mais en considérant le signe de sinus qui est, je vous rappelle du signe de $(-1)^n$ sur l'intervalle $[n\pi,(n+1)\pi]$, on le comprend. On va montrer que cette série vérifie le CSSA :

- La série est bien ***alternée*** : on effectue la changement de variables $u = t - n\pi$ $du = dt$:

$$u_n = \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{u+n\pi}} \sin(u+n\pi)\, du = (-1)^n \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{u+n\pi}} \sin(u)\, du$$

  et la positivité de la fonction-intégrande amène la positivité de l'intégrale.

- La ***suite*** $u_n \longrightarrow 0$ (je le rappelle équivalent à $|u_n| \longrightarrow 0$). On utilise $\sqrt{x} \geq \sqrt{a}x$ ***sur*** l'intervalle $[0,a]$ qui est un résultat de convexité : $x \longrightarrow \sqrt{x}$ est concave et $y = \sqrt{a}\,x$ est la corde de $[0,a]$ (faites un dessin) :

$$|u_n| \leq \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{u+n\pi}}\, du \leq \int_0^{\pi} e^{-\sqrt{(n+1)\pi}\;u}\, du = \left[\frac{-1}{\sqrt{(n+1)\pi}} e^{-\sqrt{(n+1)\pi}\;u}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)\pi}}\left(1 - \underbrace{e^{-\sqrt{(n+1)\pi}\;\pi}}_{\to 0}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0$$

  L'utilisation de la convexité permet d'intégrer / primitiver (simplement par une fonction usuelle) la fonction exponentielle, ce qui est impossible avec la racine dans l'exponentielle.

- La suite $|u_n|$ ***décroit***. Par croissance de l'intégrale, ***il suffit*** de démontrer la décroissance (***par rapport à*** n) de la fonction-intégrande sur $[0,\pi]$: $\sqrt{u+n\pi} \leq \sqrt{u+(n+1)\pi} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{u+n\pi}\sin u \leq \sqrt{u+(n+1)\pi}\sin u$
  parce que le sinus est positif sur $[0,\pi]$

Remarque : On peut démontrer plus facilement $u_n \longrightarrow 0$, sans la minoration de convexité, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue qui est très utile et très important mais, aujourd'hui, on ne l'a pas encore vu en cours. Bientôt…

CCP PC (série de terme intégral) ✍

Ex 20 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t^2}\, dt$.

1) Montrer (a_n) décroissante. Calculez a_0 en utilisant le changement de variables $t = \sin u$. On donne $a_1 = \frac{1}{3}$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+4} a_n$. En déduire que $a_n \sim a_{n+1}$.

3) Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de a_n. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

1) Comme $0 \leq t \leq 1$, on a immédiatement $0 \leq t^n \leq t^{n+1}$ puis, par positivité, $0 \leq t^n\sqrt{1-t^2} \leq t^{n+1}\sqrt{1-t^2}$ et finalement, par croissance de l'intégration, $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$.

$$a_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u \, du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \, du = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\big(\cos(2u)+1\big)\, du = \left[\frac{\sin(2u)}{4} + \frac{u}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

2) On effectue une ipp avec $v = t^{n+1}$ $u' = t\sqrt{1-t^2}$ $v' = (n+1)t^n$ $u = -\frac{1}{3}(1-t^2)^{3/2}$, u et v sont bien C^1 sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \int_0^1 t^{n+1} t(1-t^2)^{1/2}\, dt = \left[-\frac{1}{3}t^{n+1}(1-t^2)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{n+1}{3}\int_0^1 t^n(1-t^2)^{3/2}\, dt \\ &= \frac{n+1}{3}\int_0^1 t^n(1-t^2)(1-t^2)^{1/2}\, dt = \frac{n+1}{3}\left(\int_0^1 t^n(1-t^2)^{1/2}\, dt - \int_0^1 t^{n+2}(1-t^2)^{1/2}\, dt\right) = \frac{n+1}{3}(a_n - a_{n+2}) \end{aligned}$$

On obtient ensuite $3a_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - (n+1)a_{n+2}$ puis le résultat demandé.

Il faut penser à utiliser la décroissance de a_n pour trouver l'équivalent demandé :

$$a_{n+2} \leq a_{n+1} \leq a_n \quad \Longrightarrow \quad \frac{n+1}{n+4}a_n \leq a_{n+1} \leq a_n$$

Comme $\frac{n+1}{n+4}a_n \sim \frac{n}{n}a_n = a_n$, le théorème d'encadrement nous donne bien $a_n \sim a_{n+1}$

3) Pour clarifier la démonstration, posons $u_n = (n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1}$. On vérifie :

$$u_{n+1} = (n+2)(n+3)(n+4)a_{n+1}a_{n+2} = (n+2)(n+3)(n+4)a_{n+1}\frac{n+1}{n+4}a_n = u_n$$

On en déduit $u_n = u_0 = 6a_0 a_1 = \frac{\pi}{2}$ puis $(n+1)(n+2)(n+3)a_n a_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ et en utilisant la question précédente :

$$(n+1)(n+2)(n+3)a_n^2 \sim \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad a_n^2 \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \sim \frac{\pi}{2n^3} \quad \Longrightarrow \quad a_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\, n^{3/2}}$$

Le ***critère d'équivalent*** à la série de Riemann ***positive*** $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ convergente car $\frac{3}{2} > 1$ amène la convergence de la série $\sum a_n$.

Centrale PSI 2016 (série de terme intégral à indéterminée)

Ex 22 Soient (u_n) une suite réelle à termes positifs et (v_n) la suite définie par $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^3}$.

1) Montrer que (u_n) converge vers 0 si et seulement si (v_n) converge vers 0.

2) Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

3) Le résultat de la question précédente reste-t-il valable si (u_n) est à valeurs dans $]-1,+\infty[$?

1) D'après le théorème fondamental de l'analyse, comme $f : t \longrightarrow \frac{1}{1+t^3}$ est ***continue*** sur $I = \,]-1,+\infty[$, $F : x \longrightarrow \int_0^x f(t)\, dt$ est continue sur I, donc si $u_n \longrightarrow 0$, $\lim v_n = \lim F(u_n) = F(\lim u_n) = F(0) = 0$

On suppose $v_n \longrightarrow 0$. F est dérivable sur I et $F'(x) = f(t) > 0$. On en déduit F strictement monotone et continue sur I, donc F ***bijective*** de I sur $f(I) = \,]\lim_{-1} F, \lim_{+\infty} F[\, \ni 0$. F^{-1} est continue (et même C^1 d'ailleurs puisque $F' = f \neq 0$ d'après le cours) et $F^{-1}(0) = 0$. Comme plus haut, on en déduit $u_n = F^{-1}(v_n) \longrightarrow F^{-1}(0) = 0$

2) Comme $u_n \geq 0$, $v_n = \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+t^3} \leq \int_0^{u_n} 1\, dt \leq u_n$. Donc par critère de majoration d'une série ***positive*** ($v_n \geq 0$), si la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum v_n$ converge.

Si la série $\sum u_n$ converge, la suite $u_n \longrightarrow 0$ donc est bornée (par M). Par suite on a $v_n \geq \int_0^{u_n} \frac{dt}{1+M^3} = \frac{1}{1+M^3}u_n$. La série $\sum u_n$ convergence par critère de majoration d'une série ***positive***.

3) Si u_n à valeurs dans $]-1,+\infty[$, la 2^e partie de la Q2 fonctionne encore mais sans doute pas la 1^{re} partie. En tous cas, la démonstration proposée n'est plus valide.

Si $\sum u_n$ converge, $u_n \longrightarrow 0$ donc est bornée, et ses termes sont à valeurs dans $[m, M] \subset]-1, +\infty[$, avec $m \leq 0$ si u_n prend des valeurs négatives. Si $u_n \geq 0$, pour $0 \leq t \leq u_n$, $\frac{1}{1+M^3} \leq f(t) \leq \frac{1}{1+0}$, ce qui donne un encadrement de v_n par u_n : $\frac{1}{1+M^3} u_n \leq v_n \leq u_n$, comme vu en Q2, mais si $u_n \leq 0$, pour $u_n \leq t \leq 0$, $\frac{1}{1+0} \leq f(t) \leq \frac{1}{1+m^3}$ avec $-1 < m \leq 0$ qui amène l'encadrement, comme les bornes sont « *à l'envers* », $\frac{1}{1+m^3} u_n \leq v_n \leq u_n$ et pour appliquer le critère de majoration d'une série ***positive***, il faut écrire :

$$u_n \geq 0 \Longrightarrow v_n \leq u_n \qquad u_n \leq 0 \Longrightarrow -v_n \leq -\frac{1}{1+m^3} u_n$$

Il faudrait donc, pour appliquer le critère de majoration, avoir une série qui converge pour les termes positifs et qui converge pour les termes négatifs. L'exemple de la série alternée usuelle convergente $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ montre qu'on n'a pas toujours ce résultat : les séries $\sum \frac{1}{2n}$ et $\sum -\frac{1}{2n+1}$ divergent. Un contre-exemple devrait donc venir d'une série alternée.

F étant la primitive qui s'annule en 0, et sachant qu'on peut primitiver un dl, c'est du cours, à l'intérieur de l'intégrale on a $\frac{1}{1+t^3} = 1 - t^3 + o(t^4)$ ce qui amène $F(x) = 0 + x - \frac{1}{4}x^4 + o(x^5)$. Si $\sum u_n$ converge, $u_n \longrightarrow 0$, puis $v_n = u_n - \frac{1}{4}u_n^4 + o(u_n^5)$. Peut-on trouver u_n tq la série $\sum v_n$ diverge? La série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ convient. Je vous laisse réfléchir à la preuve usuelle (cvg + dvg + cvg).

Mines-Ponts PSI 2022 (série intégrale)

Ex 23

1) Montrez que la fonction $F : x \longrightarrow \int_0^x (\pi|\sin t| - 2)\,dt$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

2) Déterminez la nature de la série de terme général $\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\pi|\sin t| - 2}{t}\,dt$

1) Le problème est la valeur absolue : on peut se rappeler que $\sin t$ est du signe de $(-1)^k$ sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ et remarquer :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (\pi|\sin t| - 2)\,dt = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} (\pi(-1)^k \sin t - 2)\,dt = \Big[\pi(-1)^k(-\cos t) - 2t\Big]_{k\pi}^{(k+1)\pi} = \pi(-1)^k((-1)^k - (-1)^{k+1}) - 2\pi = 0$$

Puis pour n_x entier tel que $n_x\pi \leq x < (n_x+1)\pi$ (cad $n_x = \lfloor \frac{x}{\pi} \rfloor$) :

$$\Big|F(x)\Big| = \Big|\sum_{k=0}^{n_x-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f + \int_{n_x\pi}^{x} f\Big| = \Big|\int_{n_x\pi}^{x} (\pi|\sin t| - 2)\,dt\Big| \leq \pi(\pi+2)$$

2) Une ipp avec $u' = \pi|\sin t| - 2 \quad v = \frac{1}{t} \quad u = F(t) \quad v' = -\frac{1}{t^2}$ amène, en se rappelant via Q1 $F(n\pi) = 0$:

$$\Big|\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{\pi|\sin t| - 2}{t}\,dt\Big| = \Big|\Big[\frac{F(t)}{t}\Big]_{n\pi}^{+\infty} + \int_{n\pi}^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt\Big] = \Big|\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\,dt\Big| \leq \frac{\pi(\pi+2)}{\pi^2\, n^2}$$

Le critère de majoration d'une série ***positive*** permet de conclure à la convergence absolue donc la convergence.

CCINP PSI 2022-2019 (série alternée avec terme intégral)

Ex 24 On pose $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,dt$.

1) 5/2 : calculez $\lim I_n$. **3/2 :** on admet $\lim I_n = 0$

2) Calculez $I_n + I_{n+2}$ [**2019 :** (on fera le changement de variables $u = \tan t$)].

3) En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ *Ind :* faire apparaître un télescopage.

4) Montrez que la série de terme général $\sum (-1)^n I_n$ converge et calculez sa somme.

1) On commence par remarquer que l'intégrale existe puisque $f_n(t) = \tan^n(t)$ est ***continue*** sur $I = [0, \frac{\pi}{4}]$ ***fermé***.

- Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur I :

  On remarque, pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq \tan t \leq 1$ puis : $\tan^n(t) \xrightarrow{n \to +\infty} \left.\begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{si } t = \frac{\pi}{4} \end{cases}\right\} = f(t)$

Convergence simple sur I vers la fonction ***continue par morceaux*** f

- Hypothèse de Domination sur I :

$$\forall t \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|f_n(t)\right| = \left|\tan^n(t)\right| \leq 1 = \xi(t)$$

On a déjà remarqué que $0 \leq \tan t \leq 1$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$

ξ est ***intégrable*** sur I : la fonction constante-1 est ***continue*** sur le segment ***borné*** $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Par application du théorème de convergence dominée de **Lebesgue**[6] $\lim I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} f = 0$

2) On utilise le changement de variables $u = \tan t$ C^1 de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,1]$ on a $du = (1+\tan^2 t)\,dt$

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^n t + \tan^{n+2} t\, dt = \int_0^{\pi/4} \tan^n t(1+\tan^2 t)\, dt = \int_0^1 u^n\, du = \frac{1}{n+1}$$

3) La série converge immédiatement par le CSSA puis :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (I_{2n} + I_{2n+2}) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n I_{2n} + \sum_{n=0}^{N} (-1)^n I_{2n+2}$$
$$= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n I_{2n} + \sum_{n=1}^{N+1} (-1)^{n-1} I_{2n} = \lim_{N\to+\infty} (-1)^N I_{2N+1} + I_0 = I_0 = \int_0^{\pi/4} 1\, dt = \frac{\pi}{4}$$

Remarque : Il y a une autre méthode à bien connaître (mais qui ne convient pas ici à cause du en déduire) qui est le passage à la limite en 1 dans le DSE usuel du cours $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ vraie, à priori, ***sur*** $]-1,1[$

4) On montre d'abord rapidement la convergence de la série alternée $\sum_n (-1)^n I_n$ par le CSSA :

- Série alternée car $I_n \geq 0$ car $\tan^n(t) \geq 0$ pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.
- $\lim I_n = 0$ d'après Q1.
- $I_n \searrow$ par croissance de l'intégrale puisque $\tan^{n+1}(t) \leq \tan^n(t)$ puisque $0 \leq \tan(t) \leq 1$.

Ensuite on pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$ puis on a l'idée de sommer avec $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_{n+2}$ à cause de Q2 :

$$S + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (I_n + I_{n+2}) \overset{(1)}{\widehat{=}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \overset{(2)}{\widehat{=}} \ln 2$$
$$\overset{(3)}{\widehat{=}} S + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-2} I_n = S + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n I_n \overset{(4)}{\widehat{=}} 2S - (I_0 - I_1) = 2S - \frac{\pi}{4} + \int_0^{\pi/4} \tan t\, dt$$
$$= 2S - \frac{\pi}{4} + \Big[-\ln|\cos t|\Big]_0^{\pi/4} = 2S - \frac{\pi}{4} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \overset{(5)}{\widehat{=}} \ln 2 \implies \boxed{S = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2}$$

- **(1)** On applique Q2
- **(2)** Somme « *classique* », qui n'est pas stricto-sensu du cours mais presque, que j'ai déjà redémontré ailleurs et que je ne reproduis pas ici.
- **(3)** On reprend au début et on réindice
- **(4)** Il en manque 2 dans la somme.
- **(5)** On reprend le calcul de la 1re ligne

6. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941). Reconnu pour sa théorie de l'intégration initiée dans sa thèse de 1902 « *Intégrale, longueur, aire* ».

Mines-Ponts PSI 2022 (série intégrale) ✷✍

Ex 26 Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n t\sin(nt)\,dt$

1) **5/2 :** Montrez que (u_n) converge. **3/2 :** On admet $\lim u_n=0$

2) Montrez que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-u_{n+1}$

3) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? Donnez un équivalent de la somme partielle de cette série.

1) On utilise le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

- Etude de la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,\frac{\pi}{2}]$:

  Pour $0\le t<\frac{\pi}{2}, 0\le\cos t<1$ puis $f_n(t)=\cos^n t\sin(nt)\xrightarrow{n\to+\infty}\left.\begin{cases}0 & \text{si } 0\le t<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \text{si } t=\frac{\pi}{2} \text{ car } \sin(n\frac{\pi}{2})=0\end{cases}\right\}=f(t)$

  Convergence simple sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ vers la fonction ***continue par morceaux*** f

- Hypothèse de Domination sur $[0,\frac{\pi}{2}]$:

$$\forall t\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \forall n\in\mathbb{N},\ \left|f_n(t)\right|\le 1=\xi(t)$$

  ξ est ***intégrable*** sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ comme fonction continue sur un segment.

Le théorème s'applique $\lim u_n=\int_0^{\pi/2}f=0$

2)

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\int_0^{\pi/2}\cos^{n+1}t\sin((n+1)t)-\cos^n t\sin(nt)\,dt=\int_0^{\pi/2}\cos^n t(\cos(t)\sin((n+1)t)-\sin(nt))\,dt\\&\overset{(1)}{=}\int_0^{\pi/2}\cos^n t\sin t\cos((n+1)t)\,dt\overset{(2)}{=}\left[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}t\cos((n+1)t)\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}\cos^{n+1}t\sin((n+1)t)\,dt\\&=\frac{1}{n+1}-u_{n+1}\end{aligned}$$

- **(1)** On applique $\cos a\sin b-\sin(b-a)=\cos b\sin a$
- **(2)** Ipp avec $u'=\cos^n t\sin t$ $v=\cos((n+1)t)$ $u=-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}t$ $v'=-(n+1)\sin((n+1)t)$

3) La suite (u_n) converge, donc la série $\sum u_{n+1}-u_n$ converge et d'après Q2, la série $\sum\frac{1}{n+1}-u_{n+1}$ converge. Comme la série harmonique $\sum\frac{1}{n+1}$ diverge, nécessairement la série $\sum u_{n+1}$ diverge. En sommant l'égalité de Q2, il suit :

$$\sum_{k=0}^n u_{k+1}-u_k=u_{n+1}-u_0=\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}-\sum_{k=0}^n u_{k+1}$$

En notant $H_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}$ et se rappelant $H_n\sim\ln n$ (par une comparaison série-intégrale), en notant S_n usuellement les sommes partielles de la série $\sum u_n$, il vient $S_{n+1}=H_{n+1}-u_{n+1}+u_0=H_{n+1}+o(\ln n)\sim\ln n$.

a

TPE PSI 2019 (série racine d'équation) ✷✍

Ex 27

1) Pour $n\ge 1$, montrez que l'équation $x^n+nx=1$ possède une unique solution positive, que l'on note u_n.

2) La suite (u_n) converge t-elle ?

3) Déterminez un équivalent simple de u_n.

4) Déterminez la nature de la série $\sum n!\,(\dfrac{1}{n}-u_n)$.

1) On pose $f_n(x)=x^n+nx-1$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x)=nx^{n-1}+n$. On est obligé de distinguer 2 cas selon la parité de n car le signe de $x^{n-1}+1$ change selon.

n ***impair***

x	$-\infty$	0	u_n	1	$+\infty$
$f_n'(x)$			$+$		
$f_n(x)$	$-\infty$	-1	0	n	$+\infty$

n ***pair***

x	$-\infty$	-1	0	u_n	1	$+\infty$
$f_n'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	-n	-1	0	n	$+\infty$

Pour n pair et n impair on fait le même raisonnement : f_n est ***continue*** et ***strictement croissante*** de $\mathbb{R}^+$ sur $[-1,+\infty[$, elle y induit une bijection : il existe donc ***une seule*** racine notée u_n sur $\mathbb{R}^+$. Comme $f_n(0)=-1$ et $f_n(1)=n$, il résulte du théorème des valeurs intermédiaires que $0\leq u_n\leq 1$.

2) On doit trouver plus de choses sur u_n. Comment faire? malheureusement, il n'y a pas une seule réponse, il faut analyser... Des fois on peut essayer de démontrer u_n monotone en considérant le signe de $f_{n+1}(u_n)$: si par exemple, on trouve $f_{n+1}(u_n)\geq 0$, on en déduit $f_{n+1}(u_n)\geq f_{n+1}(u_{n+1})$ et de la croissance de f_{n+1}, on en déduirait $u_n\geq u_{n+1}$. Mais cette méthode ne marche pas bien ici. Une autre idée est d'***affiner*** le théorème des valeurs intermédiaire : on essaye $f_n(1/2)=(1/2)^n+n/2-1$. Comme $(1/2)^n+n/2-1\longrightarrow+\infty$ on en déduit à partir d'un certain rang (apcr) que $f_n(1/2)\geq 0$ et le tvi donne alors $0\leq u_n\leq\frac{1}{2}$. On revient alors à $f_n(u_n)=u_n^n+nu_n-1=0$. L'encadrement précédent amène $0\leq u_n^n\leq(\frac{1}{2})^n$ donc $u_n^n\longrightarrow 0$ puis $nu_n-1\longrightarrow 0$, puis $nu_n\longrightarrow 1$ qui amène à $u_n\sim\frac{1}{n}$, donc $u_n\longrightarrow 0$.

3) Puisque $u_n\sim\frac{1}{n}$, la série $\sum u_n$ diverge par critère d'équivalent d'une série positive.

4) On écrit usuellement $u_n=\frac{1}{n}+y_n$, avec $y_n=o(\frac{1}{n}),y_n\leq 0$ et on injecte dans l'équation pour trouver un équivalent de u_n.

$$(y_n+\frac{1}{n})^n+n(y_n+\frac{1}{n})=1\quad\Longrightarrow\quad -ny_n=\exp\left(n\ln(y_n+\frac{1}{n})\right)=\exp\left(n\ln\frac{1}{n}+n\ln(1+ny_n)\right)$$

IMT PSI 2019 | Mines-Ponts PSI 2013 (sÃ©rie Ã terme dÃ©fini par rÃ©currence) ✍

Ex 28 On s'intÃ©resse Ã la suite dÃ©finie par $a_0>0$ et $a_{n+1}=1-e^{-a_n}$.

1) Etudiez la convergence de cette suite.

2) DÃ©terminer la nature de la sÃ©rie de terme gÃ©nÃ©ral $(-1)^n a_n$.

3) DÃ©terminez la nature de la sÃ©rie de terme gÃ©nÃ©ral a_n^2.

4) [✷ **2013 :** Etudiez la sÃ©rie de terme gÃ©nÃ©ral $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En dÃ©duire la nature de la sÃ©rie $\sum a_n$] .

La suite est dÃ©finie par une rÃ©currence ce qui rend plus difficile l'Ã©tude de la sÃ©rie.

1)
On se rappelle le thÃ©orÃ¨me de base sur les suites rÃ©currentes $a_{n+1}=f(a_n)$: si f est continue , alors les limites ***Ã©ventuelles*** ℓ de la suite (a_n) vÃ©rifient $f(\ell)=\ell$ (d'ailleurs mÃªme $\pm\infty$).

Dans cet exercice, $f(x)=1-e^{-x}$. On pose $g(x)=f(x)-x=-e^{-x}-x+1$ et on cherche ses racines par une Ã©tude des variations. g est dÃ©rivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=e^{-x}-1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

$g(x)=f(x)-x=0$ ayant donc comme seule solution 0, la suite (a_n) ne peut converger ***que vers*** 0 (tant mieux pour l'Ã©tude de la sÃ©rie...). ***Mais elle pourrait*** aussi diverger... Les critÃ¨res de convergence de suite , il n'y en a pas beaucoup Ã votre programme : croissant majorÃ© ou dÃ©croissant minorÃ©. On Ã©crit :

$$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n=g(a_n)\leq 0$$

La suite (a_n) est dÃ©croissante. Montrons par rÃ©currence que $a_n \geq 0$. Elle sera donc ***minorÃ©e***, donc convergera, donc ***convergera vers la seule limite possible*** qui est 0 comme on vient de le voir.

- $\mathcal{P}(0)$: $a_0 \geq 0$. Ok.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$ vrai, soit $a_n \geq 0$, alors $e^{-a_n} \leq 1$ d'oÃ¹ $u_{n+1} = f(a_n) \geq 0$. $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

2) Par la question Q1, dÃ©croissance de $|a_n| = a_n$ vers 0, et le critÃ¨re CSSA, la sÃ©rie alternÃ©e $\sum(-1)^n a_n$ est immÃ©diatement convergente.

3) Comme $a_n \to 0$, un petit dÃ©veloppement asymptotique amÃ¨ne :

$$a_{n+1} = 1 - e^{-a_n} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2) \Longrightarrow (a_{n+1} - a_n) \sim -\frac{1}{2}a_n^2$$

Or, la ***sÃ©rie*** $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge ssi la ***suite*** (a_n) converge (rÃ©sultat Ã retenir, c'est du cours). Ici, la suite (a_n) converge et vers 0. Par suite, critÃ¨re d'Ã©quivalent d'une sÃ©rie de ***signe constant***, la sÃ©rie $\sum a_n^2$ converge.

4)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}\right) = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_0}\right) \longrightarrow -\infty$$

La sÃ©rie de terme gÃ©nÃ©ral $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ diverge donc. En reprenant le dÃ©veloppement vu plus haut :

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}a_n + o(a_n)\right) \sim -\frac{1}{2}a_n$$

Du critÃ¨re d'Ã©quivalent appliquÃ© Ã une sÃ©rie de ***signe constant***, il rÃ©sulte que la sÃ©rie $\sum a_n$ diverge.

Remarques

- En fait, il est possible d'avoir un Ã©quivalent d'une suite rÃ©currente : il y a une mÃ©thode qui « *marche* » assez bien qui utilise la moyenne de CÃ©saro, que je suppose ici connue : si $a_n \to \ell$, $\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \to \ell$. La mÃ©thode est de chercher α tel que $a_{n+1}^{\alpha} - a_n^{\alpha} \longrightarrow \ell \neq 0$ (ce n'est pas toujours possible)

$$\begin{aligned} & a_{n+1} = 1 - e^{-a_n} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2) \\ \Longrightarrow & a_{n+1}^{\alpha} = a_n^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{2}a_n + o(a_n)\right)^{\alpha} = a_n^{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{2}a_n + o(a_n)\right) = a_n^{\alpha} - \frac{\alpha}{2}a_n^{\alpha+1} + o(a_n^{\alpha-1}) \end{aligned}$$

  On prend ***donc*** $\alpha = -1$ qui donne $a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1} \longrightarrow \frac{1}{2}$. On applique la ***moyenne de CÃ©saro*** :

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}(a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1})}{n} = \frac{a_n^{-1} - a_0^{-1}}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{a_n^{-1}}{n} \sim \frac{1}{2} \text{ car } a_0^{-1} = o(a_n^{-1}) \Longrightarrow \boxed{a_n \sim \frac{2}{n}}$$

- Pour avoir un 2ᵉ terme du dÃ©veloppement de a_n, en gÃ©nÃ©ral, on procÃ¨de comme suit : on pose $a_n = \frac{2}{n} + y_n$ avec $y_n = o(\frac{1}{n})$, on injecte et on se « *dÃ©brouille* » ...

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n+1} + y_{n+1} = 1 - \exp\left(-\frac{2}{n} - y_n\right) \\ & \frac{2}{n}\left(1 - \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})\right) = \frac{2}{n} + y_n - \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{n} + y_n\right)^2 + o(\frac{1}{n^2}) \\ & \frac{-2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) = y_n + \frac{2}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \Longrightarrow y_n \sim \frac{-4}{n^2} \Longrightarrow \boxed{a_n = \frac{2}{n} - \frac{4}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})} \end{aligned}$$

CCP PSI 2024[2] -2022-2021-2018-2016 | TPE PC 2019 (série à terme récurrent)

Ex 29 On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in \left]0, \pi/2\right[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1) Etablir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.

2) En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrez que $\sum u_n^3$ converge.

3) (Question absente en 2024 du fait de la durée de 10mn) En considérant $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrez la série $\sum u_n^2$ diverge.

1) Je rappelle un théorème de base sur les suites récurrentes : toute limite ***éventuelle*** ℓ de la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $\ell = f(\ell)$ (en supposant f continue ce qui est toujours le cas dans la pratique). ***Attention!*** à aussi prouver que la suite converge! Pour une étude de série, on a en général $f(0) = 0$ (vous voyez pourquoi?)

Pour résoudre $\sin x = x$, on étudie $g(x) = \sin x - x$: $g'(x) = \cos x - 1 \leq 0$. g décroit ***strictement et est continue*** de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, elle induit donc une ***bijection*** : 0 est « *atteint* » une et une seule fois. On constate que c'est en 0 : $g(0) = 0$. Conclusion : la seule limite possible de la suite (u_n) est 0. Reste à prouver qu'elle converge.

Pour prouver la convergence, on commence en général par s'orienter vers l'étude de la monotonie. On sait, inégalité de convexité usuelle, $|\sin x| \leq |x|$ mais la valeur absolue « *gêne* » un peu. Par contre, pour $x \geq 0, \sin x \leq x$. On démontre donc, par récurrence immédiate, $u_n \geq 0$ et même d'ailleurs $0 \leq u_n \leq 1$ (je ne le fais pas ici). Il en suit $u_{n+1} = \sin u_n \leq u_n$ d'où la décroissance et par la minoration (par 0) la convergence.

2) Comme $u_n \longrightarrow 0$, $u_{n+1} - u_n = \sin u_n - u_n \sim \frac{1}{6} u_n^3$, dl usuel en 0. On se rappelle le résultat important qu'une ***suite*** (v_n) converge ssi la ***série*** $\sum v_{n+1} - v_n$ converge, ce qui a le grand avantage de permettre d'utiliser tous les critères de séries pour prouver qu'une suite converge (où on a peu de critères).

Comme $u_n^3 \geq 0$, on peut appliquer le critère d'équivalent sur les séries ***positives*** : la série $\sum u_n^3$ converge ssi la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge ssi la suite (u_n) converge, ce qui est le cas.

3) On utilise le dl de $\sin u_n$ car $u_n \longrightarrow 0$:

$$\ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin u_n}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2)\right) \sim -\frac{1}{6}u_n^2$$

Un raisonnement analogue à plus haut nous donne que la série $\sum u_n^2$ diverge puisque la suite $\ln u_n \longrightarrow \ln 0 = -\infty$ diverge. Je vous laisse le reproduire.

Remarque : Pour les élèves ambitieux, il peut être utile de savoir qu'il est possible, dans certains cas, de trouver un équivalent d'une suite récurrente. C'est le cas ici. La méthode est la suivante et utilise la moyenne de Césaro que je vous rappelle (ce n'est pas au programme) : si la suite $u_n \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la moyenne $\dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \longrightarrow \ell$ aussi.

On prend une inconnue $a \in \mathbb{R}$ qu'on choisira ultérieurement, puis :

$$u_{n+1}^a - u_n^a = \left(u_n - \frac{1}{6}u_n^3 + o(u_n^3)\right)^a - u_n^a = u_n^a\Big(\left(1 - \frac{1}{6}u_n^2 + o(u_n^2)\right)^a - 1\Big) = u_n^a\left(-\frac{a}{6}u_n^2 + o(u_n^2)\right) \sim -\frac{a}{6}u_n^{a+2}$$

On choisit donc $a = -2$ pour que la ***suite*** $u_{n+1}^a - u_n^a$ converge (et alors vers $-\frac{a}{6} = \frac{1}{3}$). Le théorème de Césaro nous amène alors que la suite :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2} = \frac{u_{n+1}^{-2}}{n} - \frac{u_1^{-2}}{n} \longrightarrow \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1}^{-2} \sim \frac{n}{3} \sim \frac{n+1}{3} \quad \Longrightarrow \quad u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$$

Cet équivalent nous donne alors rapidement la réponse aux questions 2 et 3 (je vous laisse y réfléchir).

a

Mines-Ponts PSI 2022 (séries à terme récurrent) ✷

Ex 30

1) Etudiez la convergence et calculez la somme éventuelle de la série de terme général u_n définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n)$.

2) Etudiez la convergence et calculez la somme éventuelle de la série de terme général u_n définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = e^{v_n} - 1$

1) On vérifie d'abord que cette suite existe bien. Cela résulte de $e^x - x > 0$ sur tout $\mathbb{R}$ (par étude de $x \to e^x - x$ que je ne fais pas ici).

Posons $f(x) = \ln(e^x - x)$. Nous étudions la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$. Comme f est continue, là où elle est définie, la limite ***éventuelle*** ℓ de la suite u_n vérifie $\ell = \ln(e^\ell + \ell)$, soit $e^\ell = e^\ell + \ell$ et finalement $\ell = 0$ (ce qui était prévisible...).

On a $e^{u_{n+1}} = e^{u_n} - u_n$ ce qui donne l'idée de sommer pour télescoper :

$$\sum_{n=0}^{N} e^{u_{n+1}} - e^{u_n} = e^{u_{N+1}} - e^{u_0} = e^{u_{N+1}} - e = \sum_{n=0}^{N} u_n = -S_N$$

On en déduit, lorsque $N \to +\infty$, la suite des sommes partielles $(S_N)_N$ converge, et vers $-e^0 + e$. On en déduit que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme vaut $e - 1$

2)

Ex 32 Soit (u_n), décroissante tq la série $(\sum u_n)$ cvg. Etablir $u_n = o(\dfrac{1}{n})$. *Indication : Majorez nu_{2n} en utilisant* $\searrow$

La série $\sum u_n$ convergeant, on en déduit que la suite (u_n) converge vers 0. Comme par hypothèse cette suite est décroissante, et qu'une suite décroît vers sa limite, on en déduit que $u_n \geq 0$. On nous demande de majorer nu_{2n} :

$$n\, u_{2n} = \underbrace{u_{2n} + \cdots + u_{2n}}_{n \text{ termes}} \overset{\textbf{(1)}}{\lesssim} u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} \overset{\textbf{(2)}}{\lesssim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n$$

- **(1)** Résulte de la décroissance de u_n
- **(2)** Résulte de la positivité des termes et de la convergence de la série $\sum u_n$

Après avoir remarqué que $u_n = o(\frac{1}{n})$ équivaut à $\frac{u_n}{1/n} = nu_n \longrightarrow 0$, On va démontrer que les sous-suites paires et impaires convergent vers 0. Le reste d'une série convergente tendant vers 0 (cours), par encadrement :

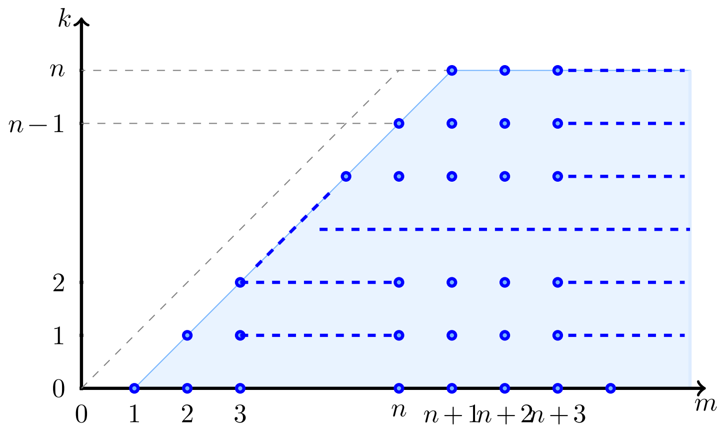
$$0 \leq 2nu_{2n} \leq \underbrace{2R_n}_{\to 0} \qquad \text{et} \qquad 0 \leq (2n+1)u_{2n+1} = 2n\, u_{2n+1} + u_{2n+1} \leq \underbrace{2n\, u_{2n}}_{\to 0} + \underbrace{u_{n+1}}_{\to 0}$$

Ex 33 ✷ Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrez que les séries $\sum nu_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature. Comparez leur somme, le cas échéant.

On rappelle, cas particulier dans les séries un peu plus difficiles, qu'une série à termes positifs converge ssi ses sommes partielles sont ***majorées***. Comparons donc les sommes partielles des 2 séries $\sum R_n$ et $\sum nu_n$:

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=k+1}^{+\infty} u_m \overset{(1)}{\hat{=}} \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=0}^{m-1} u_m + \sum_{m=n+1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_m = \sum_{m=1}^{n} mu_m + \sum_{m=n+1}^{+\infty}(n+1)u_m = \sum_{m=1}^{n} mu_m + (n+1)R_n$$

Pour comprendre l'interversion de (1), regardez le dessin !



$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons la série $\sum R_n$ convergente.

Donc la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} R_k$ est majorée (par M). De l'égalité plus haut ***et de la positivité*** de $(n+1)R_n$, il résulte que les sommes partielles de $\sum nu_n$ sont majorées : $\displaystyle\sum_{m=1}^{n} mu_m \le \sum_{k=0}^{n} R_k \le M$ donc la série $\sum nu_n$ converge.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons la série $\sum nu_n$ converge.

Donc ses sommes partielles sont majorées (par M'). Egalement, le reste de ***cette*** série converge vers 0, on réalise ensuite l'encadrement :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} ku_k \ge \sum_{k=n+1}^{+\infty}(n+1)u_k = (n+1)\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = (n+1)R_n \quad \ge 0$$

On en conclut que la ***suite*** $nR_n \longrightarrow 0$ donc est bornée (par N'). En reprenant la formule plus haut, on peut ***majorer*** les sommes partielles de la série $\sum R_n$:

$$\sum_{k=0}^{n} R_k = \sum_{m=1}^{n} mu_m + (n+1)R_n \le M' + N'$$

De la positivité de R_n, on en déduit la convergence de la série $\sum R_n$.

Ex 36

1) Utilisez ***la transformation d'Abel***[g] sur $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}$, cad montrez $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} A_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{A_n}{n}$.

2) En déduire la convergence de la série $\sum \dfrac{\sin n}{n}$.

3) Montrez que la série $\sum \dfrac{\sin n}{n}$ ne converge pas absolument. (*On pourra utiliser* $|\sin n| \ge \sin^2 n$).

g. **Niels Henrik Abel** : norvégien (1802-1829). Travaux sur équations algébriques, fonctions elliptiques et intégrales.

1) On calcule la somme $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$:

$$\begin{aligned}
A_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \sum_{k=1}^{n} \Im(e^{ikx}) = \Im\Big(\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\Big) = \Im\Big(\sum_{k=1}^{n} (e^{ix})^k\Big) \overset{(1)}{\widehat{=}} \Im\Big(e^{ix}\ \frac{1-e^{inx}}{1-e^{ix}}\Big) \\
&= \Im\Big(e^{ix}\ \frac{e^{inx/2}(e^{-inx/2}-e^{inx/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2}-e^{ix/2})}\Big) = \Im\Big(e^{i(n+1)x/2}\ \underbrace{\frac{-2i\sin(nx/2)}{-2i\sin(x/2)}}_{rel}\Big) \\
&\overset{(2)}{\widehat{=}} \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}\ \Im\Big(e^{i(n+1)x/2}\Big) = \frac{\sin(nx/2)\ \sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}
\end{aligned}$$

- **(1)** La formule sur la somme des termes d'une suite géométrique s'applique pour la raison $e^{ix} \neq 1$ (cad pour $x \neq 2k\pi$ sinon on aurait la somme égale à n et de partie imaginaire nulle). De toute façon, ici e^{ix} vaut $e^{i} = \frac{\pi}{2}$
- **(2)** $\operatorname{Im}(\alpha z) = \alpha \operatorname{Im} z$, lorsque α est réel. Pour être plus élégant, l'application $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ qui à z associe $\operatorname{Im} z$ est (une forme) linéaire sur le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$… (on dit $\mathbb{R}$-linéaire par opposition à $\mathbb{C}$-linéaire). Par contre, cette application Im n'est évidemment ***pas*** $\mathbb{C}$-linéaire (en considérant $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$-ev)

On en déduit immédiatement $|A_n(x)| \leq \dfrac{1}{|\sin(x/2)|}$ et en particulier $|A_n| \leq \dfrac{1}{|\sin(1/2)|}$

2)

Effectuons la transformation d'**Abel**[7] sur $\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k - A_{k-1}}{k}$:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} \overset{(1)}{\widehat{=}} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k - A_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} A_k\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) + \frac{A_n}{n} - \frac{A_0}{1} = \sum_{k=1}^{n-1} A_k\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big) + \frac{A_n}{n}
\end{aligned}$$

- **(1)** La formule est immédiate ***mais*** ne convient pas pour $n = 1$ car A_0 n'existe pas. On convient alors $A_0 = 0$…

Remarque : Le lecteur constatera que cette « *transformation* » marche aussi pour $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}$

3) La ***série*** $\sum \frac{\sin n}{n}$ converge ssi la ***suite de ses sommes partielles*** (S_n) converge (définition !). En se servant de la question précédente, comme $\left|\frac{A_n}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{|\sin 1/2\ n|}\right| \longrightarrow 0$, La ***série*** $\sum \frac{\sin n}{n}$ converge ssi la ***suite*** $\sum_{k=1}^{n-1} A_k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ converge. Or cette suite est elle-même la somme partielle de la série $\sum_{n \geq 1} A_n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ qui converge ***si elle converge absolument*** :

$$\Big|A_n\ (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})\Big| \leq \frac{1}{|\sin 1/2|}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{|\sin 1/2|}\ \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{|\sin 1/2|}\ \frac{1}{n^2}$$

On applique le critère de majoration et d'équivalence d'une ***série positive*** pour conclure

Remarque : Le lecteur constatera que ce raisonnement « *marche* » aussi pour la série $\displaystyle\sum \frac{\sin(nx)}{n}$.

4) Montrons que la série $\frac{\sin n}{n}$ ne converge pas absolument en utilisant $x^2 \leq |x|$ pour $|x| \leq 1$:

$$\frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{\sin^2 n}{n} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} - \frac{\cos(2n)}{n}\Big)$$

La conclusion résulte d'une formule de trigonométrie $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$, de la minoration d'une série ***positive*** par une série divergente car somme de la série $\sum \frac{1}{n}$ harmonique divergente et

7. **Niels Henrik Abel** : norvégien (1802-1829). Travaux sur équations algébriques, fonctions elliptiques et intégrales.

Ex 37 Etudiez la série complexe $\sum \frac{1}{1+z^n}$

Attention! Série complexe…

- Si $|z| \le 1$, $|1+z^n| \le 1+|z|^n \le 2$. Il vient $|\omega_n| \ge \frac{1}{2}$, le terme général ne pouvant converger vers 0, la série diverge.
- Si $|z| > 1$, $|1+z^n| \ge \left|1-|z|^n\right|$, d'où $\left|\omega_n\right| \le \frac{1}{\left|1-|z|^n\right|} \sim \frac{1}{|z|^n}$. Tous les critères sont ici dans $\mathbb{R}^+$ et la série géométrique $\sum \frac{1}{|z|^n}$ est convergente. La série complexe $\sum \omega_n$ est absolument convergente, donc convergente.

Ex 38 Sommation des relations de comparaison On considère une série à termes réels $\sum u_n$ et une autre à termes positifs $\sum v_n$.

1) On suppose $\sum v_n$ convergente. Montrez

$$u_n = O(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right) \quad u_n = o(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right) \quad u_n \sim v_n \Longrightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

2) On suppose $\sum v_n$ divergente. Montrez

$$u_n = O(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \quad u_n = o(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \quad u_n \sim v_n \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Soient $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries à termes positifs.

On suppose $\mathbf{u_n = o(v_n)}$ et $\sum \mathbf{v_n}$ **convergente** (donc $\sum u_n$). Montrons $\mathbf{R_{n+1}(u)} = \sum_{\mathbf{k=n+1}}^{+\infty} \mathbf{u_k} = \mathbf{o}\left(\sum_{\mathbf{k=n+1}}^{+\infty} \mathbf{v_k}\right) = \mathbf{o}\Big(\mathbf{R_{n+1}(v)}\Big)$

Soit $\varepsilon > 0$.

$u_n = o(v_n)$, donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \ge N_0$, $|u_n| = u_n < \varepsilon |v_n| = \varepsilon v_n$.

Par sommation, il vient $\forall p \ge n \ge N_0$, $\sum_{k=n+1}^{p} u_k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} v_k$

Par passage à la limite conservant l'inégalité, lorsque $p \longrightarrow +\infty$, pour $n \ge N_0$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

On suppose $\mathbf{u_n = o(v_n)}$ et $\sum \mathbf{u_n}$ **divergente** (donc $\sum v_n$). Montrons $\mathbf{S_n(u)} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{u_k} = \mathbf{o}\left(\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{v_k}\right) = \mathbf{o}\Big(\mathbf{S_n(v)}\Big)$

Soit $\varepsilon > 0$.

$u_n = o(v_n)$, donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \ge N_0$, $|u_n| = u_n < \varepsilon/2|v_n| = \varepsilon/2 v_n$.

La série $\sum v_n$ est divergente, donc $\sum_{k=0}^{n} v_k \longrightarrow +\infty$ (car la série est à termes positifs), en particulier on a $\sum_{k=0}^{N_0} u_k / \sum_{k=0}^{n} v_k \longrightarrow 0$. Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \ge N_1$, $\sum_{k=0}^{N_0} u_k < \varepsilon/2 \sum_{k=0}^{n} v_k$

Par sommation, pour $n \ge \max(N_0, N_1)$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N_0} u_k + \sum_{k=N_0+1}^{n} u_k < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k}_{\text{car } n \ge N_1} + \underbrace{\sum_{k=N_0+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} v_k}_{\text{car } k \ge N_0} = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=N_0+1}^{n} v_k \underbrace{<}_{v_k \ge 0} \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

On suppose $\mathbf{u_n \sim v_n}$ et $\sum \mathbf{v_n}$ **convergente** (donc $\sum u_n$). Montrons $\mathbf{R_{n+1}(u)} = \sum_{\mathbf{k=n+1}}^{+\infty} \mathbf{u_k} \sim \sum_{\mathbf{k=n+1}}^{+\infty} \mathbf{v_k} = \mathbf{R_{n+1}(v)}$

$u_n \sim v_n$, donc $u_n - v_n = o(v_n)$. Par application du premier résultat, il vient $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_n - v_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right)$, d'où le résultat.

Applications

- Comme première application, on peut donner une troisième méthode pour valider le résultat classique $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$. En effet $u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} = v_n$. Ces séries étant divergentes, on utilise le résultat précédent et, par sommation :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \sim \ln n$$

Rappel : On a plus précisément $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ où $\gamma \simeq 0.577$ est la constante d'**Euler**[8]-**Mascheroni**[9]

- Autre démonstration de la moyenne de **Cesaro**[10], cad si $u_n \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la moyenne $\dfrac{\sum_{k=0}^n u_k}{n+1} \longrightarrow \ell$.

  Pour $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ et (donc) la série $\sum u_n$ diverge. Par sommation, on obtient le résultat puisque :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} l = (n+1)\ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n+1} \sim \ell$$

8. **Leonhard Euler** : suisse (1707-1783). Le plus grand mathématicien du XVIII$^{\text{e}}$siècle.
9. **Lorenzo Mascheroni** : italien (1750-1800). Connu pour la construction à la règle et au compas.
10. **Ernesto Cesaro** : mathématicien italien (1859-1906)