Feuille d'Exercices 3

Séries numériques

Série donnée par terme simple positif

Critère d'Equivalent : Soit (u_n) une suite ***positive***.
On suppose $u_n \sim v_n$. Alors la série $\sum u_n$ converge ***si et seulement si*** la série $\sum v_n$ converge.
Note : ce critère ne « *marche pas* » pour les séries alternées.

Critère d'Alembert : Soit (u_n) une suite telle que la ***limite de la suite existe*** : $\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in [0, +\infty]$.
- Si $\ell > 1$, la ***série*** $\sum u_n$ ***diverge grossièrement***.
- Si $\ell < 1$, la ***série*** $\sum u_n$ ***converge absolument***.
- Si $\ell = 1$. On ne ***peut rien dire*** (par cette méthode) quant à la nature de la série.

Critère $\mathbf{n^a u_n}$ ***:*** Soit $\sum u_n$, une série réelle.
- S'il existe $a > 1$ tel que la ***suite*** $\mathbf{n^a u_n \longrightarrow 0}$, alors la ***série*** $\sum u_n$ ***converge***.
- S'il existe $a \leq 1$ tel que la ***suite*** $\mathbf{n^a u_n} \longrightarrow +\infty$, alors la ***série*** $\sum u_n$ ***diverge***.

Note : Dans les 2 ***autres*** cas :$a > 1$ et $\lim n^a u_n = \pm\infty$, ainsi que $a \leq 1$ et $\lim n^a u_n = 0$, on ***ne peut rien*** dire à priori.

Ex 1 Etudiez la nature des séries suivantes :

✌ $\sum \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ✌ $\sum \frac{\ln^2(n)}{n\sqrt{n}}$ ✍ $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n} n}$ $\sum \binom{n}{2} a^{2n} (a \in \mathbb{R})$ $\sum \frac{n!}{n^n}$ $\sum e^{-\sqrt{n^2-1}}$

✍ $\sum \left(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n}\right)^{-2}$ ✍ $\sum \left(\frac{\pi}{2}\right)^a - (\arctan n)^a \ (a \in \mathbb{R})$ $\sum \frac{1}{n \ln n}$

$\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ ✍ $\arccos\sqrt{\frac{\arctan n}{\pi}} - \arcsin\sqrt{\frac{\arctan n}{\pi}}$ ✍ $\sum \frac{1}{\sum_{k=2}^{n} \ln^2 k}$ $\sum \frac{1}{\ln n!}$ $\sum \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right)$

Ex 2 ✌✍ Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles positives convergentes. Montrez $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

IMT PSI 2023-2022 (équivalent somme) ✍

Ex 3 - 1331371 Trouvez un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ en utilisant **(i)** une comparaison série-intégrale **(ii)** les sommes de Riemann

RMS 134-1578 133-1371 *equivalent_somme_n_to_2n.RMS1331371.tex* ***1+1*** *concours*

$\sim (2\sqrt{2}-2)\sqrt{n} = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k/n+1}} \sim \sqrt{n}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

Note : si f ***continue*** sur $[0,1]$ et $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k f(\frac{k}{n})$ avec $|\sum_{k=1}^{n} u_k| \leq M$, alors $S_n \to 0$ (unif. continuité) (MonierMP* 3.12).

Note : Si f intégrable sur $]0,1]$ et monotone (int impropre), les sommes de Riemann tendent aussi vers $\int_0^1 f$ (OralMP*p341).

Ex 4 ✌✍ Etablir la convergence et calculez la somme de $\sum \frac{1}{n^2+3n+2}$

IMT PSI 2022 (nature série) ✌

Ex 5 - 1331369 Nature de $\sum_{n\geq 2} u_n$ où $u_n = \arctan\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - \frac{\pi}{4}$.

RMS 133-1369 *serie_numerique_arctan.RMS1321369.tex*

$\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3}$

Mines-Ponts PSI 2021 (somme et convergence d'une série)
Ex 6 - 132703 Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$. Déterminez les couples (a,b) pour lesquels la série de terme général u_n converge. Déterminez alors sa somme.

RMS 132-703 *serie_sqrt(n)+asqrt(n+1)+bsqrt(n+2).RMS132703.tex*
$u_n=(1+a+b)\sqrt{n}+(\frac{a}{2}+b)\frac{1}{\sqrt{n}}+O(\frac{1}{n^{3/2}})$. $\sum u_n$ cvg ssi $b=1 a=-2$. $\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=-1$ par télescopage.

CCP PC 2005
Ex 7 - 1151124 Soit $\sum_{n\geq 0}u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.
Etablir que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{u_n}}{n}$ et $\sum e^{-1/u_n}$ convergent.

RMS 116-1124 *exorecupere.1151124.tex*
$ab\leq 1/2(a^2+b^2)$ et ≥ 0 pour le premier. Par composition, $e^{-1/u_n}/u_n\to 0$ cad $e^{-1/u_n}=o(u_n)$

Mines-Ponts PSI 2022 (Comparaison séries indéterminées positives) ✷
Ex 8 - 133713 Soient (u_n) une suite dans $\mathbb{R}^{+*}$. On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*, v_n=\dfrac{u_n}{u_1+\cdots+u_n}$. Comparez les natures des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

RMS 133-713 *natures_series.RMS133713.tex*
$v_n\leq\frac{u_n}{u_1}$ Ok. si $\sum u_n$ dvg, $S_n\to+\infty$, $v_n=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n}$. si $v_n\to 0$, $S_n\sim S_{n-1}$ ps $v_n\sim\frac{S_n-S_{n-1}}{S_{n-1}}\geq\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{1}{x}$, $\sum v_n$ dvg et si $v_n\not\to 0$ Ok.
Note : $u_n>0$. si $\sum u_n$ dvg, $\sum\frac{u_n}{S_n^a}$ cvg ssi $a>1$. si $\sum u_n$ cvg, $\sum\frac{u_n}{R_n^a}$ cvg ssi $a<1$.

Mines-Ponts PC 2015 | Centrale PC 2008 (série de terme sous forme de somme) ✷
Ex 9 - 126569 Soit $\alpha>0$. Nature de la série de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha+(n-k)^\alpha}$? $[$**2008 :** $\alpha=2]$.

RMS 126-569 119-1038 *serie_terme_somme.RMS126569.tex* ***1+1 concours***
m1$(\alpha=2)$ **:** $(\frac{n}{2})^2\leq k^2+(n-k)^2\leq(k+n-k)^2$ dc $\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2}\leq u_n\leq\sum_{k=1}^n(\frac{2}{n})^2$ dc $u_n\to 0$ et $\sum u_n$ dvg. **m2** som. riemann $u_n\sim\frac{1}{n^{\alpha-1}}\int_0^1\frac{dx}{x^2+(1-x)^2}$ cvg ssi $\alpha>2$. **m3** **Cor. Pc-Psi 06-17** $\alpha=2$: etude de $f(x)=x^2+(n-x)^2$ pr maj./min.

IMT PSI 2021 | Centrale PSI 2015 (nature d'une série) ✷
Ex 10 - 126767 Nature de la série de terme général $\sin\left(\pi(1+\sqrt{2})^n\right)$?
Int. pas dans Oral originel : on pourra d'abord étudier la série $\sum\sin\left(\pi(\sqrt{2}-1)^n\right)$

RMS 132-1158 126-767 *serie_sin(pi(sqrt2+1)^n).RMS126767.tex* ***1+1 concours***
$\sin v_n=\sin(\pi(\sqrt{2}-1)^n)\sim(\pi(\sqrt{2}-1)^n)$ Ok. $v_n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(-1)^k(\sqrt{2})^k\pi$ $u_n=\pi(1+\sqrt{2})^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}(\sqrt{2})^k\pi$ dc $v_n+u_n=\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}2^k 2\pi=2N\pi$ dc $\sin u_n=\sin v_n$. Ok.

Ex 11 ✷ Nature de $\displaystyle\sum\frac{1}{p_n n^a}$ $(a\in\mathbb{R})$, p_n étant le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

Série donnée par terme de signe alterné

CSSA (Critère Spécial des Séries alternées) : Soit $\sum(-1)^n u_n$, une série ***alternée*** telle que
- La suite $|u_n|$ ***décroît***
- La suite a une limite nulle : $\lim u_n=0$, ce qui équivaut à $\lim|u_n|=0$

Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ ***converge***. De plus, le ***reste*** de la série vérifie : $|R_n|=\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k\right|\leq|u_{n+1}|$

Ex 12 Etudiez la nature des séries de terme général suivant :

$$\frac{(-1)^n}{n\ln n}\qquad\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+(-1)^n}}\qquad(-1)^n\sin\left(\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}\right)\qquad\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\qquad\frac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}\qquad\frac{(-1)^n}{n!^{1/n}}$$

Navale PSI 2021 (convergence série alternée)
Ex 13 - 1321160 Nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$?

RMS 132-1160 *convergence_serie_ln(1+(-1)^n_sur_sqrt(n(n+1)).RMS1321160.tex*
$u_n=\frac{(-1)^n}{n}+O(\frac{1}{n^2})$ $\sum u_n$ cvg.

Mines-Ponts PSI 2023 | Petites Mines PSI 2013 (autour de séries alternées) ✶✍

Ex 14 - 1241238 Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sqrt{k}$ et $T_n=S_n+S_{n+1}$.

1) Montrez $S_n\sim\dfrac{(-1)^{n+1}}{2}\sqrt{n}$.

2) Montrez que T_n admet une limite finie et que celle-ci est positive.

1) [**2013 :** Nature de $\sum(T_{n+1}-T_n)$.]

2) [**2013 :** En déduire que (T_n) converge vers une limite $\ell<0$ puis que $S_n\sim(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{2}$.]

3) [**2013 :** Nature de la série $\sum\frac{1}{S_n}$?]

RMS 134-954 124-1238 *exorecupere.1241238.tex* *1+1 concours*

Q1 apcr $S_{2n}\le S_{2n-1}\le S_{2n-1}\le S_{2N+1}$. $S_{2n+1}-S_{2n-1}\sim\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$ ps somm., $S_{2n+1}-S_1\sim\sqrt{2}2\sqrt{n}$. ok. id av. pairs. **Q2** (T_{2n},T_{2n+1}) adj. $T_{2n}\searrow$. **2013 Q1** $t_{n+1}-t_n=s_{n+2}-s_n=(-1)^{n+2}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})=(-1)^n(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{3}{8}\frac{1}{n^{3/2}}+\dots)$ ou $=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$ CSSA. $\sum$ cvg. **2013 Q2** CSSA et 1er terme $(t_2-t_1)=\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$, dc $S_n=t_{n+1}-t_1\to<0$ et $t_1=\sqrt{2}-2<0$, donc $t_{n+1}\to\ell<0$. $t_n=2s_n+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}\implies s_n=\frac{1}{2}(t_n+(-1)^n\sqrt{n})\sim(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{2}$ **2013 Q3** $\frac{1}{2s_n}=\frac{1}{t_n+(-1)^n\sqrt{n+1}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}-\frac{t_n}{n+1}+O(\frac{1}{n^{3/2}})$. $\sum$ dvg.

TPE PSI 2016 (série alternée) ✌✍

Ex 15 - 1271288 Que dire de la nature d'une série de terme général $v_n=\dfrac{(-1)^n}{n^{1/3}}+\dfrac{2}{n^{2/3}}+o(\dfrac{1}{n^{2/3}})$?

RMS 127-1288 *serie_alternee.RMS1271288.tex*

Cor. Pc-Psi 06-17

Mines-Ponts PSI 2021 (série fraction rationnelle complexe) ✶

Ex 16 - 132701 Soient $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ tels que Q ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$. Etudiez la convergence de la série $\sum(-1)^n\dfrac{P(n)}{Q(n)}$

RMS 132-701 *serie_alternee_fraction.RMS132701.tex*

$p=\deg Pq=\deg Q$. si $p\ge q u_n\not\to 0$. si $q\ge p+2$, $|u_n|\sim\frac{|a_p|}{|b_q|}\frac{1}{n^{q-p}}$. Ok. si $q=p+1$, $u_n=\frac{1}{b_{p+1}n}(a_p+O(\frac{1}{n}))(1+O(\frac{1}{n}))^{-1}=\frac{a_p}{b_{p+1}}\frac{(-1)^n}{n}+O(\frac{1}{n^2})$ Ok.

Mines-Ponts PSI 2021 -2019 (*nature série numérique*) ✍

Ex 17 - 130697 Soit $u_n=\left(\cosh(\dfrac{1}{n})-1\right)^{\sinh(1/n)}$.

1) Déterminez, si elle existe, la limite de u_n lorsque $n\to+\infty$, notée ℓ.

2) Déterminez la nature de la série $\sum(u_n-\ell)$.

3) Etudiez la convergence de la série $\sum(-1)^n(u_n-\ell)$. [Question absente en 2019]

Romain Desloges 2021 | RMS 130-697 *serie_(ch(1surn)-1)^(sinh(1surn).RMS130697.tex* *1+1 concours*

$u_n=\exp\left(-\frac{2\ln n}{n}-\frac{\ln 2}{n}+O(\frac{\ln n}{n^2})\right)=1-\frac{2\ln n}{n}-\frac{\ln 2}{n}+O(\frac{\ln^2 n}{n^2})$ $\sum(u_n-1)$ dvg. Bertrand. $\sum(-1)^n(u_n-1)$ cvg.

Mines-Ponts PSI 2023 (Permutation série harmonique) ✶✍

Ex 18 - 23070201 On admet $H_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=\ln n+\gamma+o(1)$. On définit aussi pour $k\in\mathbb{N}^*$, $u_k=\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$

1) Justifiez la convergence de $\sum_{k=1}^{+\infty}u_k$ et calculez sa somme.

2) On définit une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ de la manière suivante :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
$\sigma(k)$	1	3	2	5	7	4	9	11	6	13	15	…

Déterminez $\sigma(k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

3) Calculez $\sum_{k=1}^{+\infty}u_{\sigma(k)}$

pdf Michael Delafontaine *commutation_serie_harmonique.23070201.tex*

Q3 $3k\to 2k, 3k+1\to 4k+1, 3k+2\to 4k+3$ **Q3** $S_{3n}=-\frac{1}{2}H_n+H_{4n}-\frac{1}{2}H_{2n}\to\frac{3}{2}\ln 2$.

Série donnée par terme intégral

Critère de Majoration / Minoration : Soit (u_n) une suite ***positive***.

- On suppose il existe une série $\sum v_n$ ***convergente*** tq $u_n\le v_n$. Alors la série $\sum u_n$ ***converge***
- On suppose il existe une série $\sum w_n$ ***positive et divergente*** tq $u_n\ge w_n$. Alors la série $\sum u_n$ ***diverge***

Note : Dans les 2 cas « *plus petit que diverge* » et « *plus grand que converge* », on ne peut rien dire.

Ex 19 Etudiez la nature des séries suivantes de terme général :

$$\int_n^{+\infty}\frac{dx}{x^3-x^2}\qquad ✍\ \int_0^{1/n}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}\,dx\qquad ✍\ \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-\sqrt{t}}\sin t\,dt\qquad \int_n^{n+1}\frac{\cos(\pi x)}{1+x}\,dx\qquad \int_0^1\frac{x^n}{1+x+\dots+x^n}\,dx$$

CCP PC 2010 (série de terme intégral)

Ex 20 - 1211147 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t^2}\,dt$.

1) Montrer (a_n) décroissante. Calculez a_0 en utilisant le changement de variables $t=\sin u$. On donne $a_1=\frac{1}{3}$

2) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+4}a_n$. En déduire que $a_n\sim a_{n+1}$.

3) Montrer que la suite de terme général $(n+1)(n+2)(n+3)a_na_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de a_n. Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

RMS 121-1147 *serie_terme_integral.RMS1211147.tex*

Q1 $a_0=\frac{\pi}{2}$ $a_1=\frac{1}{3}$ **Cor. Pc-Psi 06-17**

Ex 21 On pose $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\,dx$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Déterminer la limite de (u_n). Étudier la monotonie de (u_n).

2) Donner une relation entre u_{n+1} et u_n. En déduire un équivalent de u_n.

3) Nature de la série de terme général u_n ? Nature de la série de terme général $(-1)^nu_n$?

Centrale PSI 2016 (série de terme intégral à indéterminée) ✷

Ex 22 - 1271029 Soient (u_n) une suite réelle à termes positifs et (v_n) la suite définie par $v_n=\displaystyle\int_0^{u_n}\frac{dt}{1+t^3}$.

1) Montrer que (u_n) converge vers 0 si et seulement si (v_n) converge vers 0.

2) Montrer que les séries de termes généraux u_n et v_n sont de même nature.

3) Le résultat de la question précédente reste-t-il valable si (u_n) est à valeurs dans $]-1,+\infty[$?

RMS 127-1029 *serie_terme_integral.RMS1271029.tex*

Q1 $F=\int_0^x$ .. bij. de $[0,+\infty[$ vs $[0,I[$ dc $F^{-1}(x)\to 0$ qd $x\to 0$ **Q2** u_n bornée dc $u_n\frac{1}{1+M^3}\le v_n\le u_n$ **Cor. Pc-Psi 06-17**

Mines-Ponts PSI 2022 (série intégrale) ✷

Ex 23 - 133717

1) Montrez que la fonction $F:x\longrightarrow\displaystyle\int_0^x(\pi|\sin t|-2)\,dt$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

2) Déterminez la nature de la série de terme général $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty}\frac{\pi|\sin t|-2}{t}\,dt$

RMS 133-717 *serie_integrale.RMS133717.tex*

Q1 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\dots=\int_0^{\pi}\dots=[-\pi\cos t-2x]=0$. $F(n\pi)=0$ ps si $k\pi\le x<(k+1)\pi, |F(x)|=|\int_{k\pi}^{x}\dots|\le\pi(2+\pi)$ **Q2** ipp.

Note : $F(\frac{\pi}{2})=0$ cr $\int_0^{\arcsin(2/\pi)}\dots=-\int_{\arcsin(2/\pi)}^{1}\dots$ $F(x)=\pi+(-1)^{k+1}\pi\cos x-2(x-k\pi)$ av $k\pi\le x<(k+1)\pi$. (vr fich. exo.RMS133717.mws).

CCINP PSI 2022, 2019 (série alternée avec terme intégral)

Ex 24 - 1301266 On pose $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n(t)\,dt$.

1) **5/2 :** calculez $\lim I_n$. **3/2 :** on admet $\lim I_n=0$

2) Calculez I_n+I_{n+2} [**2019 :** (on fera le changement de variables $u=\tan t$)] .

3) En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ *Ind :* faire apparaître un télescopage. [**2019 :** pas déduire, pas indication]

4) Montrez que la série de terme général $\sum(-1)^nI_n$ converge et calculez sa somme.

RMS 133-1383 130-1266 *serie_alternee_(-1)^n_int_0^pisur4_tan^(t).RMS1301266.tex* *1+1 concours*

Q1 $\lim I_n=0$. lebesque $|\tan^n t|\le 1$. **Q2** $I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$ **Q3** $\ln 2$ oar cont. de ln en 1. **Q4** on fait $S+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^nI_{n+2}$ d'où $S=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2$

Par paquets : Si série cvg, cvg pr paquets av. m. somme. Réc. ok si $u_n\ge 0$ ou lgr paquets majorée et $u_n\to 0$.

Mines-Ponts PC (série intégrale avec indéterminée) ✷

Ex 25 - 22091702 Soit f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $u_n=\displaystyle\int_0^1 f(x)x^n\,dx$

1) Montrez que si $\sum u_n$ converge, alors $f(1)=0$.

2) **5/2 :** ~~Ici f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrez que $\sum u_n$ converge ssi $f(1)=0$. Exprimez la somme avec une intégrale~~

OralPC p297* *int_0^1_f(x)x^n.220917.tex*

Mines-Ponts PSI 2022 (série intégrale) ✷

Ex 26 - 133726 Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n t\sin(nt)\,dt$

1) **5/2 :** Montrez que (u_n) converge. **3/2 :** On admet $\lim u_n=0$

2) Montrez que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}-u_{n+1}$

3) Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? Donnez un équivalent de la somme partielle de cette série.

RMS 133-726 *serie_integrale.RMS133726.tex*

Q2 $u_{n+1}-u_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n t\sin t\cos((n+1)t)$ et ipp **Q3** $u_{n+1}-u_0=H_{n+1}-S_{n+1}+u_0$ dc $S_n\sim\ln n$.

Série donnée par terme récurrent ou racine d'équation

Si f est ***continue***, la limite (« *éventuelle* ») d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ vérifie $\ell = f(\ell)$.
Quand on étudie une série à terme récurrent, on a en général $f(0) = 0$, et même, souvent, c'est la seule solution.

Si f est ***croissante*** sur un intervalle I ***et que*** les termes de u_n sont dans cet intervalle (à partir d'un certain rang N), alors (u_n) est ***monotone*** (à partir du rang N).

TPE PSI 2019 (série racine d'équation) ✷✍

Ex 27 - 1301233

1) Pour $n \geq 1$, montrez que l'équation $x^n + nx = 1$ possède une unique solution positive, que l'on note u_n.
2) La suite (u_n) converge t-elle?
3) Déterminez un équivalent simple de u_n.
4) Déterminez la nature de la série $\sum n!\,(\frac{1}{n} - u_n)$.

RMS 130-1233 *serie_racine_de_x^n+nx-1=0.RMS1301233.tex*

Q1 pair et impair; **Q2** par tvi $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}$. **Q3** $u_n^n \longrightarrow 0$ dc $nu_n - 1 \to 0$ dc $u_n \sim \frac{1}{n}$. **Q4** $x_n = \frac{1}{n} - u_n \geq 0$ et $nx_n \to 0$ puis $\exp(n\ln(\frac{1}{n} - x_n)) - nx_n = 0 = nx_n + \exp(-n\ln n) + o(\exp(-n\ln n))$ puis $nx_n \sim \frac{1}{n^n}$ enfin $|\frac{v_{n+1}}{v_n}| \sim (\frac{n}{n+1})^{n+1} \to e^{-1} < 1$. ok.

IMT PSI 2019 | Mines-Ponts PSI 2013 (sÃ©rie Ã terme dÃ©fini par rÃ©currence) ✍

Ex 28 - 124668 On s'intÃ©resse Ã la suite dÃ©finie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1) Etudiez la convergence de cette suite.
2) DÃ©terminer la nature de la sÃ©rie de terme gÃ©nÃ©ral $(-1)^n a_n$.
3) DÃ©terminez la nature de la sÃ©rie de terme gÃ©nÃ©ral a_n^2.
4) [✷ **2013 :** Etudiez la sÃ©rie de terme gÃ©nÃ©ral $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. En dÃ©duire la nature de la sÃ©rie $\sum a_n$] .

RMS 130-1235 124-668 *serie_a_terme_recurrent_u_n+1_equal_1-exp_moins_un.RMS124668.tex* ***1+1** concours*

Q1 $a_{n+1} = f(a_n)$ $f \nearrow$ $f(x) \leq x$ dc $a_n \searrow$ et $a_n \geq 0$ dc (a_n) cvg. $\ell = f(\ell) \implies \ell = 0$. **Q2** CSSA **Q3** **m1 :** $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2) \implies (a_{n+1} - a_n) \sim -\frac{1}{2}a_n^2$. Or $\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) \to -a_0$. $\sum a_n^2$ cvg. **m2 :** $a_{n+1}^\alpha = a_n^\alpha(1 - \frac{1}{2}a_n + \dots)^\alpha \implies a_{n+1}^\alpha - a_n^\alpha \sim \frac{-\alpha}{2}a_n^{\alpha+1}$ ps $\alpha = -1$ donne pr somm. $a_n^{-1} \sim \frac{n}{2}$ puis $a_n^2 \frac{4}{n^2}$. **Q4** $S_N = \ln a_{N+1} - \ln a_0 \to -\infty$. $\sum$ dvg. $\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln(1 - \frac{1}{2}a_n + o(a_n)) \sim -\frac{1}{2}a_n$. $\sum a_n$ dvg.

CCP PSI 2024[2] 2022-2021-2018-2016 | TPE PC 2019 (série à terme récurrent) ✍

Ex 29 - 127142 On s'intéresse à la suite définie par $u_0 \in]0, \pi/2[$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$. ✂ [**PC :** $u_0 \in \mathbb{R}$]

1) Etablir la convergence de cette suite et déterminer sa limite.
2) En considérant $u_{n+1} - u_n$, montrez que $\sum u_n^3$ converge. ✂ [**PC :** En considérant la limite de $\frac{u_{n+1} - u_n}{n^3}$]
3) (Question absente en 2024 du fait de la durée de 10mn) En considérant $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, montrez la série $\sum u_n^2$ diverge. ✂ [**2018 :** pas le résultat] . [**PC :** Donnez la nature de $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire la nature de $\sum u_n^2$]

Matteo Dussault 2024 | RMS 132-1161 130-1344 127-1294 | BEOS 7073 | Odlt 25-202 *serie_u(n+1)=sin(un).RMS127142.tex*
***1+5** concours*

Q1 $u_{n+1} \leq u_n$ et $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ $\searrow$ cvg vers ℓ. $\sin\ell = \ell \iff \ell = 0$. **Q2** série $\sum u_{n+1} - u_n$ cvg ssi suite u_n cvg. ok. et $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{6}u_n^3$. **Q3** série $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ cvg ssi suite $\ln u_n$ cvg. : non et $\ln(\frac{u_{n+1}}{u_n}) = \ln(1 - 1/6u_n^2 + o(u_n^2)) \sim -1/6u_n^2$.
Note : $u_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$ (par $u_{n+1}^a - u_n^a \longrightarrow \frac{1}{3}$ avec $a = -2$ et moyenne de Césaro).

Mines-Ponts PSI 2022 (séries à terme récurrent) ✷

Ex 30 - 133714

1) Etudiez la convergence et calculez la somme éventuelle de la série de terme général u_n définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n)$.
2) Etudiez la convergence et calculez la somme éventuelle de la série de terme général u_n définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = e^{v_n} - 1$

RMS 133-714 *serie_a_terme_recurrent.RMS133714.tex*

Q1 $x = f(x)$ dc $e^x = e^x - x$ dc $x = 0$ ps $e^{u_{n+1}} = e^{u_n} - u_n$ dc $S_n = e^{u_0} - e^{u_{n+1}} \to e - 1$. **Q2** $v_{n+1} \geq v_n$. si $v_0 > 0, v_n \nearrow +\infty$, si $v_0 < 0, v_n \nearrow 0$ et $v_{n+1}^a = v_n^a(1 - \frac{a}{2}v_n + \dots)$ ps $v_n \sim \frac{-2}{n}$.

IMT PSI 2013 (suite récurrente) ✌

Ex 31 - 1271292 Soient $u_0 \in]0, 1[$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

RMS 127-1292 *suite_recurrente.RMS1271292.tex*

$u_n \to 0$ **m1(me) :** $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{2}$. **m2 :** acc finis $|f'(x)| \leq k < 1$ apcr. **Cor. Pc-Psi 06-17**

Autres

Si la série $\sum u_n$ ***converge absolument***, cad $\sum |u_n|$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
si $\sum |u_n|$ diverge, on ne peut rien dire à priori. Réciproque fausse : exemple, la série harmonique alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$

Si la ***suite*** $u_n \not\to 0$, la ***série*** $\sum u_n$ diverge.

Produit de Cauchy : Soient 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, alors la série « ***produit de cauchy*** » des 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est définie par la série $\sum w_n$ avec $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum_{p+q=n} u_p v_q$
Si les 2 séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont ***absolument convergentes***, alors la série produit de Cauchy ***converge absolument*** et sa somme est le ***produit des sommes***, cad : $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Ex 32 ✍ Soit (u_n), décroissante tq la série $(\sum u_n)$ cvg. Etablir $u_n = o(\frac{1}{n})$. *Indication : Majorez* nu_{2n} *en util.* ↘

Ex 33 ✷✍ Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrez que les séries $\sum nu_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature. Comparez leur somme, le cas échéant.

Ex 34 Soit une suite (u_n) à termes strictements positifs tq $\sum u_n$ diverge.

1) Etablir que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge. *(On pourra raisonner par l'absurde et utilser le logarithme)*

2) ✷ Etablir que $\sum \frac{u_n}{S_n^a}$ converge ssi $a > 1$. *(On utilisera* $\frac{u_n}{S_n^a} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^a}$

Ex 35 Soit x tq $|x| < 1$. Montrez, en utilisant un produit de **Cauchy**[1] de deux séries que $(\sum (n+1)x^n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

Ex 36 ✍

1) On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$. Etablir $|A_n| \leq \frac{1}{|\sin 1/2|}$.

2) Utilisez ***la transformation d'Abel***[2] sur $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}$, cad montrez $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{A_n}{n}$.

3) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{\sin n}{n}$.

4) Montrez que la série $\sum \frac{\sin n}{n}$ ne converge pas absolument. (*On pourra utiliser* $|\sin n| \geq \sin^2 n$).

Ex 37 ✷✍ Etudiez la série complexe $\sum \frac{1}{1+z^n}$

Ex 38 ✍ ***Sommation des relations de comparaison***
On considère une série à termes réels $\sum u_n$ et une autre à termes positifs $\sum v_n$.

1) On suppose $\sum v_n$ convergente. Montrez

$$u_n = O(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right) \qquad u_n = o(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right) \qquad u_n \sim v_n \Longrightarrow \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

2) On suppose $\sum v_n$ divergente. Montrez

$$u_n = O(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \qquad u_n = o(v_n) \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \qquad u_n \sim v_n \Longrightarrow \sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$$