Classe de PSI

Feuille d'Exercices 3

☞ ***Thèmes des semaines du 10 Octobre et 17 Octobre 2016 :***

— Séries numériques positives, alternées et complexes. Critères. Produit de Cauchy de deux séries.

Ex 1 Etudiez la nature des séries suivantes :

✌ $\sum \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ✌ $\sum \frac{\ln^2(n)}{n\sqrt{n}}$ $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n} n}$ $\sum C_n^2 a^{2n} (a \in \mathbb{R})$ $\sum \frac{n!}{n^n}$ $\sum \left(\mathrm{ch}\sqrt{\ln n}\right)^{-2}$ $\sum e^{-\sqrt{n^2-1}}$

$\sum \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^3-x^2}$ $\sum \left(\frac{\pi}{2}\right)^a - (\arctan n)^a \ (a \in \mathbb{R})$ $\arccos\sqrt{\frac{\arctan n}{\pi}} - \arcsin\sqrt{\frac{\arctan n}{\pi}}$ ✌ $\sum \frac{(-1)^n}{n \ln n}$

$\sum \frac{1}{n \ln n_q} quad \sum \int_0^{1/n} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{1+x^2}}\, dx$ $\sum \frac{(-1)^n}{\ln n + (-1)^n}$ $\sum \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$ $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right)$

$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-\sqrt{t}} \sin t \,\mathrm{d}t$ $\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ $\sum \frac{1}{1+z^n}$ $\sum \frac{1}{\ln n!}$ $\sum \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right)$

✌ **Ex 2** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles positives convergentes. Montrez $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

✌ **Ex 3** Etablir la convergence et calculez la somme de $\sum \frac{1}{n^2+3n+2}$

✌ **Ex 4**

1) Soient $\sum u_n$ une série à termes complexes absolument convergente. Montrez $\sum u_n^2$ converge.

2) Montrez que ce résultat est en défaut si on enlève absolument.

Ex 5 $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Déterminez a, b réels tq la série $\sum u_n$ cvg et calculez sa somme.

Ex 6

1) On pose $A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$. Etablir $|A_n| \leq \frac{1}{|\sin 1/2|}$.

2) Utilisez ***la transformation d'Abel***[1] sur $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}$, cad montrez $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{A_n}{n}$.

3) En déduire la convergence de la série $\sum \frac{\sin n}{n}$.

4) Montrez que la série $\sum \frac{\sin n}{n}$ ne converge pas absolument. (*On pourra utiliser* $|\sin n| \geq \sin^2 n$).

Ex 7 Etudiez la convergence de $\sum u_n$ tel que u_n racine de $x^n + nx - 1 = 0$

✷ **Ex 8** Soit f continue sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $u_n = \int_0^1 f(x) x^n \,\mathrm{d}x$

1) Montrez que si $\sum u_n$ converge, alors $f(1) = 0$.

2) Ici f de classe $\mathscr{C}^1$. Montrez que $\sum u_n$ converge ssi $f(1) = 0$. Exprimez la somme avec une intégrale.

Ex 9 On considère la série harmonique $\zeta(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergente. On s'intéresse aux séries où l'on a « enlevé »quelques

1. **Niels Henrik Abel** : norvégien (1802-1829). Travaux sur équations algébriques, fonctions elliptiques et intégrales.

termes à la série harmonique.

✌ **1)** Etablir que la série $\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge. (on a « enlevé » les pairs)

2) On définit (u_n) par $u_n = \frac{1}{n}$ si $n = 2^k$ et $u_n = 0$ sinon. (on a « enlevé » ?). Nature et somme ?

✷ **3)** Montrez que la série $\sum \frac{1}{p_n}$, où p_n est le n^e nombre premier, diverge.

(*On montrera d'abord* $\sum_{k=1}^{p_n} \frac{1}{k} \leq \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-(1/p_k)}$ *et on utilisera* $\ln\left(\frac{1}{1-1/x}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$

✷ **4)** On ne considère ici que les termes « sans »le chiffre 9. Prouvez que la série $\sum x_n$ converge.

(*Montrez* S_n *majorée après avoir démontré* $S_n \leq \frac{1}{x_1} + \dots \frac{1}{x_8} + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{[x_9/10]} + \dots + \frac{1}{[x_n/10]}\right)$

ex 10 Montrez que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-8)^n}{(2n)!}$ est un réel strictement négatif.

ex 11

1) Etudiez la convergence de la série $\sum \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right)$?

✷ **2)** En déduire celle de $\sum \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$)

ex 12 Comment obtenir une valeur approchée de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ à 10^{-2} près ?

(Indication : écrire $S = S_n + R_n$ et majorer le reste)

ex 13 Soit x tq $|x| < 1$. Montrez, en utilisant un produit de **Cauchy**[2] de deux séries que $(\sum (n+1)x^n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

ex 14 ***Sommation des relations de comparaison***

On considère une série à termes réels $\sum u_n$ et une autre à termes positifs $\sum v_n$.

1) On suppose $\sum v_n$ convergente. Montrez

$$u_n = O(v_n) \implies \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right) \quad u_n = o(v_n) \implies \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} v_k\right) \quad u_n \sim v_n \implies \sum_{k=n}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} v_k$$

2) On suppose $\sum v_n$ divergente. Montrez

$$u_n = O(v_n) \implies \sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \quad u_n = o(v_n) \implies \sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right) \quad u_n \sim v_n \implies \sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$$

ex 15 Soit (u_n), décroissante tq la série $(\sum u_n)$ cvg. Etablir $u_n = o(\frac{1}{n})$. *Indication : Majorez nu_{2n} en utilisant* ↘

✷ **ex 16** Nature de $\sum \frac{1}{p_n n^a} (a \in \mathbb{R})$, p_n étant le nombre de chiffres de l'écriture décimale de n.

✷ **ex 17** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs convergente. Montrez que les séries $\sum n u_n$ et $\sum R_n$ sont de même nature. Comparez leur somme, le cas échéant.

ex 18 Soit une suite (u_n) à termes strictements positifs tq $\sum u_n$ diverge. *(On utilisera* $\frac{u_n}{S_n^a} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{dx}{S_n^a}$

1) Etablir que $\sum \frac{u_n}{S_n}$ diverge. *(On pourra raisonner par l'absurde et utilser le logarithme)*

✷ **2)** Etablir que $\sum \frac{u_n}{S_n^a}$ converge ssi $a > 1$.