# Quelques Corrections Exos Équivalents

## Ex 1

On prête particulièrement attention aux équivalents de somme car je rappelle que l'équivalent d'une somme n'est pas (en général) la somme des équivalents. On peut toujours commencer par regarder la « *valeur* » ou la limite au point en question. Si elle est non nulle, c'est « *gagné* », c'est l'équivalent. Ensuite, on peut regarder, si, tous les termes sont négligeables par rapport à un terme de la somme. Si oui, c'est « *gagné* » puisque $f+o_a(f)\sim_a f$. Sinon, on effectue un développement de la somme en utilisant les dls usuels en 0 et l'équivalent est le premier terme, à condition, bien sûr, que vous ayez correctement ordonné le développement. Si vous ne savez pas / devinez pas à quel ordre effectuer le dl, vous prenez 2 termes, c'est statistiquement une bonne « *moyenne* ».

① $x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\sim_0\ ?$

Ici, la valeur / limite en 0 est 1 donc a $\boxed{x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\sim_0\ 1}$

② $x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\sim_{+\infty}\ ?$

Ici, la limite est $+\infty-\infty$ indéterminé. Ensuite on a $\sqrt{x^2+4x+1}\sim_{+\infty}\sqrt{x^2}=|x|=x$ qui n'est pas négligeable par rapport à $x+2$ (ou le contraire). On cherche donc à développer.

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+4x+1}&\overset{(1)}{\hat{=}}\sqrt{x^2\left(1+4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}\overset{(2)}{\hat{=}}x\left(1+\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+o\left(4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right)\\&\overset{(3)}{\hat{=}}x\left(1+2\frac{1}{x}+o(x)\right)=x+2+o(1)\\&\overset{(4)}{\hat{=}}x\left(1+\frac{1}{2}\left(4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2+o\left(\left(4\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\right)\right)\\&=x\left(1+2\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=x+2-\frac{3}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

- **(1)** La quantité dans la racine n'est pas de la forme $1+\to 0$. On ne ***peut donc pas*** utiliser immédiatement le dl usuel en 0, on met alors facteur le « *plus fort* » en $+\infty$, soit $x^2$.
- **(2)** Ici, la quantité $u=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\to 0$, on utilise le dl en 0 à 2 termes $\sqrt{1+u}=1+\frac{1}{2}u+o(u)$
- **(3)** ***Attention!*** on ne peut pas utiliser le terme en $\frac{1}{x^2}$ car c'est un $o(\frac{1}{x})$.
- **(4)** Malheureusement, cette quantité ne va pas permettre de trouver l'équivalent car, soustraite au $x+2$ originel, on a 0! On revient au dl à 2 termes et on utilise 3 termes $\sqrt{1+u}=1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+o(u^2)$

On termine par $x+2-\sqrt{x^2+4x+1}=\frac{3}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{\sim_{+\infty}\frac{3}{2}\frac{1}{x}}$

③ $\dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}} \sim_0 ?$

Ici, la valeur en 0 est 0, donc inexploitable pour l'équivalent. On effectue un petit dl à 2 termes.

$$\sin(5x)-\sin(3x) = (5x - \frac{1}{6}(5x)^3 + o(x^3)) - (3x - \frac{1}{6}(3x)^3 + o(x^3)) = 2x - \frac{49}{3}x^3 + o(x^3) \sim_0 2x$$

On s'aperçoit que le dl à un teme suffisait. Le voyez-vous ? le terme en $x^3$ ne sert pas ...

L'équivalent d'un rapport est le rapport des équivalents $\dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}} \sim_0 \dfrac{2x}{x^{5/3}} \boxed{\sim_0 \dfrac{2}{x^{2/3}}}$

❶ $\sqrt{|x^2+x-2|} \sim_1 ?$

On effectue le changement de variables $u = x-1 \xrightarrow{x\to 1} 0$

$$\sqrt{|x^2+x-2|} = \sqrt{|(u+1)^2+(u+1)x-2|} = \sqrt{|u^2+3u|} \boxed{\sim_{u=0} \sqrt{3}\sqrt{|u|} = \sqrt{3}\sqrt{|x-1|}}$$

❹ $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\arctan x)^2 \sim_{+\infty} ?$

La limite en $+\infty$ est 0 (je rappelle $\lim_{+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$. On effectue un développement :

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\arctan x)^2 \overset{(1)}{\widehat{=}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 \overset{(2)}{\widehat{=}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^3})\right)\right)^2$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^3})\right)^2 \overset{(3)}{\widehat{=}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{\pi}{x} + o(\frac{1}{x})\right) \boxed{\sim_{+\infty} \frac{\pi}{x}}$$

- **(1)** On utilise la formule $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$ (pour $x>0$) car cela va permettre de développer.
- **(2)** $u = \frac{1}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, on effectue un dl à 2 termes de arctan en 0 : $\arctan u = u - \frac{1}{3}u^3 + o(u^3)$
- **(3)** Par efficacité, on ne « *retient* » que les 2 premiers du développement du carré

❺ $\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1} \sim_{+\infty} ?$

On a $\sqrt[3]{x^3+1} \sim_{+\infty} x \sim_{+\infty} \sqrt{x^2+1}$. Aucun des 2 termes n'est négligeable par rapport à l'autre : On effectue donc un petit développement.

$$\sqrt[3]{x^3+1} - \sqrt{x^2+1} \overset{(1)}{\widehat{=}} x\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} - x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(2)}{\widehat{=}} x\left(1+\frac{1}{3x^3}+o(\frac{1}{x^3})\right) - x\left(1+\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)$$
$$= x - x - \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}) \boxed{\sim_{+\infty} \frac{-1}{2x}}$$

- **(1)** On ne peut utiliser directement un dl des racines en 0 car elles sont de la forme $1+\to+\infty$. On met donc en facteur « *le plus fort* » dans chacune des 2 racines
- **(2)** Ici, $u = \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^2} \to 0$. On utilise un dl à 2 termes $(1+u)^a = 1 + au + o(u)$ pour $a = \frac{1}{3}$ et $a = \frac{1}{2}$.

❻ $\ln(x+x^2) \sim_{0_+} ?$

On ramène et on utilise le dl de $\ln(1+x) = x + o(x)$ en 0 en mettant en facteur le « *plus fort* »

$$\ln(x+x^2) = \ln\left(x\ (1+x)\ \right) = \ln(x) + \ln(1+\underbrace{x}_{\to 0}) = \ln(x) + x + o(x) \ \boxed{\sim_{0_+}\ \ln(x)}$$

❼ $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \sim_{+\infty}\ ?$

Méthode 1 :

On effectue un dl en $+\infty$ de la quantité à l'intérieur du ln en mettant en facteur le « *plus fort* »

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{1-1/x}{1+1/x}\right) = \ln\left((1-\frac{1}{x})(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\longrightarrow 0})^{-1}\right)$$

$$= \ln\left((1-\frac{1}{x})(1-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})\ )\right) = \ln\left(1-\frac{2}{x}+o(\frac{1}{x})\ \right) \ \boxed{\sim_{+\infty}\ \frac{-2}{x}}$$

Méthode 2 :

On remarque $\dfrac{x-1}{x+1} \sim_{+\infty} \dfrac{x}{x} = 1 \xrightarrow{x\to+\infty} 1$. On applique alors $\ln u \sim_1 u-1$ (si on connaît cet équivalent… :

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \sim_{+\infty} \frac{x-1}{x+1} - 1 = \frac{-2}{x+1} \ \boxed{\sim_{+\infty}\ \frac{-2}{x}}$$

❽ $\dfrac{\sinh(\sqrt{x})}{1-\cos x} \sim_{0_+}\ ?$

On utilise les dls usuels $\sinh u = u + o(u)$ et cos : $\cos(x) - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$, ceux-ci en 0.

$$\frac{\sinh(\sqrt{x})}{1-\cos x} = \frac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{1-\cos x} \sim_{0_+} \frac{\sqrt{x}}{1/2\,x^2} = \boxed{\frac{2}{x^{3/2}}}$$

❾ $x^{\sin x} - \sin^x x \sim_{0_+}\ ?$

On ramène ***d'abord*** à l'exponentielle du log

$$x^{\sin x} - \sin^x x = \exp\left(\sin x \ln x\right) - \exp\left(x \ln \sin x\right)$$

$$= \exp\left(\underbrace{\sin x \ln x}_{\sim_0 x\ln x \overset{0}{\to} 0}\right) \times \left(1 - \exp\left(x\ln\sin x - \sin x \ln x\right)\ \right)$$

Dls des 2 $\sin x$ en 0 à l'ordre 3

$$\sim_0 e^0 \times \left(1 - \exp\left(x\ \ln(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)) - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3))\ln x\right)\ \right)$$

On met le « *plus fort* » en facteur dans le log pour pouvoir utiliser $\ln(1+u)$ avec $u \to 0$

$$\sim_0\ 1 - \exp\left(x\ \ln\left(x(1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2))\right) - x\ln x + \frac{1}{6}x^3\ln x + o(x^3\ln x)\right)$$

$$\sim_0\ 1 - \exp\left(x\ (\ln x\ +\ \ln(1\underbrace{-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)}_{=u\to 0})\ )\ ) - x\ln x + \frac{1}{6}x^3\ln x + o(x^3\ln x)\right)$$

$$\sim_0\ 1 - \exp\left(x\ln x + x(-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)) - x\ln x + \frac{1}{6}x^3\ln x + o(x^3\ln x)\right)$$

On ne « *retient* » que les 2 premiers du développement dans l'ordre de négligeabilité décroissante

$$\sim_0 \ 1 - \exp\Big( \underbrace{\frac{1}{6}x^3 \ln x + o(x^3 \ln x)}_{=u\longrightarrow 0} \Big)$$

On peut appliquer l'équivalent usuel en 0 (issu du dl) $1 - e^u \sim_0 u$

$$\sim_0 -\Big(\frac{1}{6}x^3 \ln x + o(x^3 \ln x)\Big) \boxed{\sim_{0_+} -\frac{1}{6}x^3 \ln x}$$

⑩ $\tan(x) \sim_{\pi/2_-} \ ?$

On effectue le changement de variables $u = x - \frac{\pi}{2} \xrightarrow{x\to\frac{\pi}{2}} 0$ et on utilise les dls (équivalents) usuels de sin et cos

$$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(u+\frac{\pi}{2})}{\cos(u+\frac{\pi}{2})} = \frac{\cos u}{-\sin u} \boxed{\sim_{u=0} \frac{1}{-u} = \frac{1}{-(x-\frac{\pi}{2})}}$$

③ $e^{-\sqrt{x^2-1}} \sim_{+\infty} \ ?$

On utilise le dl de $(1+u)^{1/2}$ en 0 et $e^{o(1)} \sim e^0 = 1$ (c'est « *la valeur* »)

$$\exp\Big(-\sqrt{x^2-1}\Big) = \exp\Big( -x\,(1-\frac{1}{x^2})^{1/2} \Big) = \exp\Big( -x\,(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})) \Big)$$

$$= \exp\Big(-x+\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})\Big) = \exp\Big(-x+o(1)\Big) = e^{-x}\,e^{o(1)} \boxed{\sim_{+\infty} \ e^{-x}}$$

④ $x^{\left(\frac{-x}{x+1}\right)} \sim_{+\infty} \ ?$

On ramène ici à l'exponentielle du log puis un dl en 0 et $e^{o(1)} \sim e^0 = 1$ (c'est « *la valeur* »)

$$x^{\left(\frac{-x}{x+1}\right)} = \exp\Big(\frac{-x\ln x}{x+1}\Big) = \exp\Big(\frac{-\ln x}{1+\frac{1}{x}}\Big) = \exp\Big(-(1+\frac{1}{x})^{-1}\ln x\Big)$$

$$= \exp\Big(-(1-\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))\ln x\Big) = \exp\Big(-\ln x - \frac{\ln x}{x} + o\Big(\frac{\ln x}{x}\Big)\Big)$$

$$= \exp\Big(-\ln x + o(1)\Big) \boxed{\sim_{+\infty} \ \exp\Big(-\ln x\Big) = \frac{1}{x}}$$

***Remarque :*** Comme on le voit / comprend dans les 2 derniers dls, pour avoir un équivalent de $e^f$, il faut faire un développement de $f$ jusqu'à un $o(1)$ (et ***donc en général*** prendre un équivalent de $f$ et le mettre « *dans* » l'exponentielle $e^f$ donne un résultat faux).

⑤ $\arccos(1-x) \sim_0 \ ?$

La « *valeur* » de l'expression en 0 est 0, on, ne peut donc l'utiliser comme un équivalent. Une idée est de travailler avec la réciproque qui est cos : par le dl en 0, on sait $\cos u - 1 \sim_{u\to 0} -\frac{1}{2}u^2$. On peut « *remplacer* » $u$ par n'importe quelle quantité qui tend vers 0 (mais ***Attention où*** elle tend vers 0). On prend $\arccos(1-x)$ qui tend vers 0 en

$x=0$ :

$$-x=\cos\big(\arccos(1-x)\big)-1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{1}{2}\arccos^2(1-x) \implies \boxed{\arccos(1-x)\sim_0 \sqrt{2}\,\sqrt{x}}$$

On peut passer à la racine carrée « *sur* » des équivalents, rappelé en cours (sous réserve de $\geq 0$).

***Remarque :*** On retrouve que arccos ***n'est pas*** dérivable en 1. Je vous laisse y réfléchir…

⑥ $e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \sim_{+\infty}$ ?

$$e-\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e-\exp\left(x\ln\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to0}\right)\right)=e-\exp\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$$

$$=e-\exp\left(1-\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)=e-e^1\,\exp\Big(\underbrace{\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{=u\to0}\Big)=e-e\left(1+\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)+o\left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

$$=-\frac{e}{2}\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\ \boxed{\sim_{+\infty}\ -\frac{e}{2}\,\frac{1}{x}}$$

*CCP PC 2011 (suite décroissante et équivalent)* ✍

**Ex 2** Soit $(u_n)$ une suite réelle décroissante telle que $u_n+u_{n+1}\sim\dfrac{1}{n}$. Montrer que $u_n$ tend vers zéro. Trouver un équivalent de $u_n$.

La suite $(u_n)$ est décroissante donc admet une limite notée $\ell$. (dans $\overline{\mathbb{R}}$, infini possible). La condition $u_n+u_{n+1}\sim\frac{1}{n}$ amène même limite, soit $2\ell=0$.

La décroissance de $u_n$ et l'hypothèse permettent d'écrire :

$$\frac{1}{n}\sim u_n+u_{n+1}\ \leq\ u_n+u_n\ \leq\ u_n+u_{n-1}\sim\frac{1}{n-1}$$

Comme $\dfrac{1}{n-1}\sim\dfrac{1}{n}$, le théorème d'encadrement d'équivalents permet de conclure $2u_n\sim\dfrac{1}{n}$ puis $\boxed{u_n\sim\dfrac{1}{2n}}$

*TPE PSI 2007 | CCP PC 2009 (étude suite somme)* ✍

**Ex 4** Déterminer la limite de $u_n=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$. En déduire la limite de $v_n=\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.

***Attention!*** $u_n$ n'est pas une somme (partielle) de série, car il y a « *du* » $n$ à intérieur du sigma. Il faut plutôt penser à une somme de Riemann : on constate $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$ avec $f(x)=\ln(1+x)$. Comme $f$ est ***continue*** sur $[0,1]$ :

$$u_n \xrightarrow{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x \overset{(1)}{=} \Big[x\ln(1+x)\Big]_0^1-\int_0^1\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2-\int_0^1\frac{x+1-1\,\mathrm{d}x}{1+x}$$

$$=\ln 2-\int_0^1 1-\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2-\Big[x-\ln(1+x)\Big]_0^1=\boxed{2\ln 2-1}$$

- **(1)** On effectue une ipp avec $u'=1\quad v=\ln(1+x)\quad u=x\quad v'=\frac{1}{1+x}$

***Attention!*** Les sommes de Riemann sont avec $\sum_{k=1}^{n}$ ou $\sum_{k=0}^{n-1}$ ***mais pas*** $\sum_{k=0}^{n}$.

$$v_n = \left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ \ln\frac{(2n)!}{n!n^n}\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\ln((2n)!) - \ln n! - n\ln n\right)\right) \overset{(1)}{=} \exp\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{2n}\ln k - \sum_{k=1}^{n}\ln k - n\ln n\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln k - n\ln n\right)\right) \overset{(2)}{=} \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{n+k}{n}\right)\right) = \exp\left(u_n\right) \overset{(3)}{\longrightarrow} \exp(2\ln 2 - 1) = \boxed{\frac{4}{e}}$$

- **(1)** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ et $(2n)! = \prod_{k=1}^{2n} k$
- **(2)** $n\ln n = \ln n + \ln n + \cdots + \ln n$ ($n$ fois)
- **(3)** On utilise la ***continuité de l'exponentielle*** (précisément en la valeur de $2\ln 2 - 1$) et $u_n \longrightarrow 2\ln 2 - 1$

*Centrale PSI 2009 (critères de d'Alembert et Cauchy)* ✷✍

**Ex 5** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to x$.

**1 )** Montrer que si $x < 1$ alors $u_n$ tend vers zéro et que si $x > 1$ alors $u_n$ tend vers $+\infty$.

**2 )** Étudier $v_n = \sqrt[n]{u_n}$.

**1 )** Soit $x < 1$. On va montrer $\lim u_n = 0$ soit $\boxed{\forall \varepsilon > 0}$, $\boxed{\exists N_0 \in \mathbb{N}}$ tel que pour $n \geq N_0$, $|u_n| < \varepsilon$

On choisit $x < y < 1$. Alors, par propriété de limite, à partir d'un certain rang (noté $N_1$), on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} < y$ (on peut prendre $\varepsilon = y - x$ dans la définition de la limite). Il suit, par positivité de $u_n$ :

$$u_{n+1} < yu_n < y^2 u_{n-1} < \cdots < y^{n-N_1+1}u_{N_1}$$

$\boxed{\textbf{\textit{Soit}}\ \varepsilon > 0}$ fixé.

Comme $\lim_{n\to+\infty} y^{n-N_1+1}u_{N_1} = 0$, il vient qu'il existe un rang $N_2$ tq pour $n \geq N_2$, $y^{n-N_1+1}u_{N_1} < \varepsilon$

$\boxed{\textbf{\textit{On pose}}\ N_0 = \max(N_1, N_2)}$. Alors pour $n \geq N_0$, $0 < u_{n+1} < \varepsilon$, ce qui prouve $\lim u_n = 0$

Démo analogue pour $x > 1$ entraîne $\lim u_n = +\infty$. Laissé au lecteur à titre d'exercice.

**2 )** On va démontrer $\lim \sqrt[n]{u_n} = x$ « *par les* » $\varepsilon$. On a $|v_n - x| < \varepsilon$ ssi $x - \varepsilon < v_n < x + \varepsilon$

$\boxed{\textbf{\textit{Soit}}\ \varepsilon > 0}$ fixé.

A partir d'un certain rang $N_1$ on a par hypothèse $\frac{u_{n+1}}{u_n} < x + \varepsilon$.

Comme plus haut, on arrive (par positivité) à $u_n < (x+\varepsilon)^{n-N_1}u_{N_1}$ puis $\sqrt[n]{u_n} \leq (x+\varepsilon)^{1-N_1/n}(u_{N_1})^{1/n}$

Comme $(x+\varepsilon)^{1-N_1/n}(u_{N_1})^{1/n} \xrightarrow{n\to+\infty} (x+\varepsilon)\times 1$, à partir d'un certain rang $N_2$, cette quantité est inférieure à $(x+\varepsilon)+\varepsilon = x + 2\varepsilon$. Par un raisonnement analogue, on arrive à $\sqrt[n]{u_n} \geq x + 2\varepsilon$, pour $n \geq N_3$.

$\boxed{\textbf{\textit{On pose}}\ N_0 = \max(N_1, N_2, N_3)}$.

Alors pour $n \geq N_0$, $x - 2\varepsilon \leq \sqrt[n]{u_n} \leq x + 2\varepsilon$, ce qui n'est rien d'autre que $\lim \sqrt[n]{u_n} = x$.

***Remarque :*** Comme on travaille avec des $\varepsilon$ quelconques, arriver à la fin à $< 2\varepsilon$ ou $\leq \varepsilon$ ou $\alpha\varepsilon$, $\alpha$ constante indépendante de $n$, alors le résultat reste vrai pour la limite.

*CCP PC 2005 (suite produit)* ✍

**Ex 7** Déterminer la limite de $P_n = \dfrac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{1/n}$.

En général quand on a une suite-produit à étudier c'est une bonne idée de passer au ln qui la « *transforme* » en somme. Ensuite on peut faire appel aux séries (pas de $n$ dans la somme) ou aux sommes de Riemann (homogène en $k$ et$n$ dans la somme) ou …

$$\begin{aligned}\ln P_n &= \ln\frac{1}{n}+\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{1/n} = -\ln n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n+k) = -\ln n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(n(1+\frac{k}{n})\right)\\ &= -\ln n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln n+\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = -\ln n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{\textbf{(1)}} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x \overset{\textbf{(2)}}{\widehat{=}} 2\ln 2-1\end{aligned}$$

- **(1)** On reconnaît une somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$ avec $f(x)=\ln(1+x)$. Comme $f$ est ***continue*** sur $[0,1]$, la limite est l'intégrale (cours Sup).
- **(2)** Le calcul de cette intégrale est déjà effectué à l'exo 5 sur cette feuille (on fait une ipp).

On termine avec la ***continuité*** de l'exponentielle (pour appliquer $\lim\exp=\exp\lim$)

$$P_n=\exp(\ln P_n) \xrightarrow{n\to+\infty} \exp(2\ln 2-1)=e^{2\ln 2}e^{-1}=\frac{4}{e}$$

*Centrale PSI 2022 (développement asymptotique d'une réciproque en l'infini)* ✷✍

**Ex 10**

**1 )** Montrez $f : y \longrightarrow y^5+y$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soient $v$ la réciproque de $f$ et $u : x \longrightarrow (v(x))^5$.

**2 )** Montrez que $u(x)=x+o(x)$ quand $x\longrightarrow+\infty$.

**3 )** Montrez $\exists a,b\in\mathbb{R}$ tq $u(x)=x+ax^{1/5}+bx^{-3/5}+o(x^{-3/5})$ en $+\infty$. En déduire dév. asymptotique de $v$ en $+\infty$.

**1 )** Comme $f'(y)=5y^4+1>1>0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $f$ est ***continue*** et ***strictement croissante*** donc réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $f(]0,+\infty[)=]\lim_0 f,\lim_{+\infty} f[=]0,+\infty[$.
On note $v$ la réciproque, on a donc $(v(x))^5+v(x)=x$ et $v(x^5+x)=x$.

**2 )** On a $f(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} y^5$. Comme $y=v(x)\longrightarrow+\infty$ en $a=+\infty$, on peut remplacer dans l'équivalence et on obtient l'équivalent en $a$, soit $f(v(x))=x \underset{x\to+\infty}{\sim} v(x)^5=u(x)$. Ceci est strictement équivalent à $u(x)=x+o(x)$.

**3 )** Pour trouver le 2$^{\text{e}}$ terme du DA de $u(x)$, l'idée usuelle est de poser $u(x)=x+z$ de le réinjecter dans l'équation et de se « *débrouiller* » pour trouver un équivalent de $z$. on a $z=o(x)$, quand $x\to+\infty$ : tout se passe dans un voisinage de $+\infty$. Je ne le repréciserais pas à chaque fois.

On a $x-v(x)=v(x)^5$ ce qui s'écrit $x-u(x)^{1/5}=u(x)$ puis $x-(x+z)^{1/5}=x+z$. Comme $x+z\sim_{+\infty} x$, par passage à la puissance, il vient $z\sim_{+\infty} -x^{1/5}$.

Usuellement, on écrit $u(x)=x-x^{1/5}+z$, avec $z=o(x^{1/5})$ qu'on réinjecte :

$$x-(x-x^{1/5}-z)^{1/5}=x-x^{1/5}+z \quad\Longrightarrow\quad x^{1/5}\left(1-x^{-4/5}+o(x^{-4/5})\right)^{1/5}=x^{1/5}-z$$

Comme $x^{-4/5}\longrightarrow 0$, on peut utiliser le petit dl en 0 $(1+u)^{1/5}=1+\frac{1}{5}u+o(u)$. Ceci amène

$$x^{1/5}\,(1-\frac{1}{5}x^{-4/5}+o(x^{-4/5})=x^{1/5}-z \quad\Longrightarrow\quad z\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{5}x^{-3/5}$$

Finalement $u(x)x - x^{1/5} + \frac{1}{5}x^{-3/5} + o(x^{-3/5})$

*CCP PSI 2007 (détermination limite fonction usuelle)* ✍

**Ex 11** Calculer $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

On passe à l'exponentielle du log :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x} &= \exp\left(x\ln x \,\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) = \exp\left(x\ln x\,\ln\left(\frac{\ln\left(x(1+\frac{1}{x})\right)}{\ln x}\right)\right) = \exp\left(x\ln x\,\ln\left(\frac{\ln x + \ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right)\right)\\
&= \exp\left(x\ln x\,\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right)\right) \overset{(1)}{\widehat{=}} \exp\left(x\ln x\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} + o\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}\right)\right)\right)\\
&\overset{(2)}{\widehat{=}} \exp\left(x\ln x\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right) \overset{(3)}{\widehat{=}} \exp\left(x\left(\ln(1+\frac{1}{x}) + o(\frac{1}{x})\right)\right)\\
&\overset{(4)}{\widehat{=}} \exp\left(x\left(\frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})\right)\right) = \exp(1+o(1)) \xrightarrow{x\to+\infty} e^1 = e
\end{aligned}$$

- **(1)** Comme, lorsque $x\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$, on en déduit $\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \sim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$. Comme cette quantité tend vers 0, on peut utiliser le petit dl à 1 terme en 0 : $\ln(1+u) = u + o(u)$ avec $u = \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}$
- **(2)** Je rappelle si $u(x) \sim_a v(x)$, alors $o_a(u(x)) = o_a(v(x))$. Ici, comme déjà vu, $\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x} \sim_{+\infty} \frac{1}{x\ln x}$
- **(3)** On multiplie par $\ln x$ et on utilise $o(f(x)g(x)) = f(x)\,o(g(x)) = g(x)\,o(f(x)) = f(g)g(x)\,o(1)$
- **(4)** Lorsque $x\to+\infty$, $\frac{1}{x}\to 0$, donc on utilise encore une fois le dl en 0 de $\ln(1+u) = u + o(u)$

*Mines-Ponts PC 2014 (détermination limite fonction usuelle)* ✷✍

**Ex 15** Déterminer la limite en $+\infty$ de $f\colon x \mapsto x^{(x+1)/x} - x^{x/(x-1)}$.

$$\begin{aligned}
x^{(x+1)/x} - x^{x/(x-1)} &= \exp\left(\frac{x+1}{x}\ln x\right) - \exp\left(\frac{x}{x-1}\ln x\right) \overset{(1)}{\widehat{=}} \exp\left(\frac{x+1}{x}\ln x\right)\left(1-\exp\left(\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}\right)\ln x\right)\right.\\
&= \exp\left(\frac{x+1}{x}\ln x\right)\left(1-\exp\left(\frac{1}{x(x-1)}\ln x\right)\right.\\
&\underbrace{\sim}_{x\to+\infty}^{(2)} \exp\left(\frac{x+1}{x}\ln x\right)\frac{\ln x}{x(1-x)} = \exp\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right)\frac{\ln x}{x(1-x)} = x\exp\left(\frac{1}{x}\ln x\right)\frac{\ln x}{x(1-x)}\\
&\underbrace{\sim}_{x\to+\infty}^{(3)} \frac{\ln x}{1-x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x\to+\infty} 0
\end{aligned}$$

- **(1)** Lorsqu'on a une expression du type $e^{f(x)} - e^{g(x)}$, il peut être une bonne idée de mettre en facteur l'un des deux, surtout si $f-g \longrightarrow 0$ car alors $e^{f(x)}(1-e^{g(x)-f(x)}) \sim e^{f(x)}(f(x)-g(x))$
- **(2)** Equivalent usuel $e^u - 1 \sim_0 u$ car $u = \frac{1}{x(x-1)}\ln x \to 0$ en $+\infty$.
- **(3)** Comme $u = \frac{\ln x}{x} \to 0$, $e^u \sim_0 1$.