Feuille d'Exercices 2

Etude Locale - Equivalents

Propriétés des Equivalents : Toutes les fonctions sont définies dans un voisinage de a, voire uniquement à droite (ou à gauche), ou privé de a. Dans certains cas on doit y supposer la fonction $\neq 0$ ou même >0.

- ***Négligeabilité :*** si $g(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\,(f(x))$, alors on « *néglige* » dans la somme : $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$
  mais pas dans un produit : $f(x)\times g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$ est, en général, ***faux***.
- ***Produit, Puissance, Rapport :*** si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$, alors
  $$\sqrt{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \sqrt{h(x)}, \qquad (f(x))^{\alpha} \underset{x\to a}{\sim} (h(x))^{\alpha}, \qquad f(x)g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)k(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{h(x)}{k(x)}$$
  mais on ne peut pas sommer des équivalents : $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)+k(x)$ est, en général, ***faux***.
- ***Composition à droite :*** si $f(x) \underset{x\to \mathbf{a}}{\sim} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to \mathbf{b}} u(x) = \mathbf{a}$, alors $f(u(x)) \underset{x\to \mathbf{b}}{\sim} h(u(x))$ (***Attention!*** en b).
  mais on ne peut pas composer à gauche $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow u(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} u(g(x))$ est, en général, ***faux***.
- ***Encadrement :*** si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} u(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} u(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} u(x)$.

Formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^{n}$

Donnez un équivalent (simple) des quantités suivantes au point indiqué : certains nécessitent aucun calcul (cela résulte immédiatement du cours), d'autres un petit calcul, d'autres sont plus difficiles :

$2x^3-7x^2-x \sim_{+\infty}$	$2x^3-7x^2-x \sim_{0}$	$2x^3-7x^2-x \sim_{1}$
$\sqrt{\lvert x^2+x-2\rvert} \sim_{-\infty}$	$\sqrt{\lvert x^2+x-2\rvert} \sim_{0}$	❶ $\sqrt{\lvert x^2+x-2\rvert} \sim_{1}$
$\dfrac{x+1}{x^2(x+1)^4} \sim_0$	$\dfrac{x+1}{x^2(x+1)^4} \sim_{+\infty}$	$x^2e^{-x^2} \sim_0$
$\dfrac{e^x-1}{\sin^2(x)} \sim_0$	$\dfrac{e^x-1}{\sin^2(x)} \sim_{+\infty}$	$\dfrac{e^x+1}{\tan(x)} \sim_0$
$\cosh x \sim_{+\infty}$	$\sinh x \sim_{+\infty}$	$\sinh x \sim_0$
① $x+2-\sqrt{x^2+4x+1} \sim_0$	② $x+2-\sqrt{x^2+4x+1} \sim_{+\infty}$	③ $\dfrac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}} \sim_0$
$\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) \sim_0$	$\arctan x \sim_{+\infty}$	$\arctan x \sim_0$
$\arctan\left(\dfrac{x-1}{x^2}\right) \sim_{+\infty}$	$\arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right) \sim_{+\infty}$	$\arctan\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right) \sim_0$
$x+\ln(x) \sim_{0_+}$	$x+\ln(x) \sim_{+\infty}$	$\dfrac{1}{x}+\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) \sim_{0_+}$
$e^x+x^2e^{-x} \sim_0$	$e^x+x^2e^{-x} \sim_{+\infty}$	$e^x+x^2e^{-x} \sim_{-\infty}$
❹ $\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2-(\arctan x)^2 \sim_{+\infty}$	$\dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} \sim_{+\infty}$	$\arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right) \sim_{+\infty}$
$x\ln(x)+\ln^2(x) \sim_{0_+}$	$x\ln(x)+\ln^2(x) \sim_{+\infty}$	$x\ln(x)+\ln^2(x) \sim_{1}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sim_0$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} \sim_1$	$\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} \sim_{+\infty}$
$\ln(x) \sim_0$	$\ln(x) \sim_{+\infty}$	$\ln(x) \sim_1$
$\dfrac{\ln\sqrt{t}}{\sqrt{t}-\sin t} \sim_{+\infty}$	$\dfrac{\ln x}{x+e^{-x}} \sim_{+\infty}$	❺ $\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt{x^2+1} \sim_{+\infty}$

❻ $\ln(x+x^2)\sim_{0_+}$	$\ln(x+x^2)\sim_{+\infty}$	$\ln(x)+\ln(x^2)\sim_{+\infty}$
❼ $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)\sim_{+\infty}$	$\ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)\sim_{0}$	$\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\sim_{0}$
$\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\sim_{0}$	$\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\sim_{1_-}$	❽ $\dfrac{\sinh(\sqrt{x})}{1-\cos x}\sim_{0_+}$
❾ $x^{\sin x}-\sin^x x\sim_{0_+}$	$\dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x-\sinh x}\sim_{0}$	❿ $\tan(x)\sim_{\pi/2_-}$
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-x^2}}\sim_{0}$	① $e^{x+2+\frac{1}{x}}\sim_{0}$	$e^{x+2+\frac{1}{x}}\sim_{+\infty}$
② $\cosh\left(\sqrt{\ln x}\right)\sim_{+\infty}$	③ $e^{-\sqrt{x^2-1}}\sim_{+\infty}$	④ $x^{\left(\frac{-x}{x+1}\right)}\sim_{+\infty}$
⑤ $\arccos(1-x)\sim_{0}$	$\arccos(1-x)\sim_{1}$	⑥ $e-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\sim_{+\infty}$

Développements Limités usuels en 0 :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}x^k+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2+\dots+(-1)^n x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+o(x^n)$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)$$

$$\cosh x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2n})$$

$$\sinh x=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n})=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n})$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\ln\left(1+x\right)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}x^k}{k}+o(x^n)$$

$$-\ln\left(1-x\right)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots+\frac{x^n}{n}+o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}+o(x^n)$$

$$\left(1+x\right)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\times 1}x^2+\dots+\frac{\alpha\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+o(x^n)$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\dots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}+o(x^{2n+1})$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

Equivalents et Limites de Suites

Centrale PSI 2009 (suite-produit) ✷

Ex 1 Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\dfrac{1}{n}\left(\prod_{k=1}^{n}(3k-1)\right)^{1/n}$

CCP PC 2011 (suite décroissante et équivalent) ✍

Ex 2 Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $u_n+u_{n+1}\sim\dfrac{1}{n}$. Montrer que u_n tend vers zéro. Trouver un équivalent de u_n.

(étude suite de coefficients binomiaux)

Ex 3 On considère la suite réelle (u_n) définie par $u_0=1, u_1=2$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=\dfrac{u_n u_{n+1}}{5u_n-6u_{n+1}}$. Calculez u_n en fonction de n puis déterminez sa limite.

TPE PSI 2007 | CCP PC 2009 (étude suite somme) ✍

Ex 4 Déterminer la limite de $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$. En déduire la limite de $v_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.

Centrale PSI 2009 (critères de d'Alembert et Cauchy) ✷✍

Ex 5 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to x$.

1) Montrer que si $x < 1$ alors u_n tend vers zéro et que si $x > 1$ alors u_n tend vers $+\infty$.

2) Étudier $v_n = \sqrt[n]{u_n}$.

Mines-Ponts PSi 2016 | Mines-Ponts PC 2014 (étude asymptotique suite) ✌

Ex 6 Limite de la suite de terme général $u_n = (\dfrac{n!}{n^n})^{1/n}$?

CCP PC 2005 (suite produit) ✍

Ex 7 Déterminer la limite de $P_n = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(n+k)\right)^{1/n}$.

Telecom Sud Paris PC 2009 (étude suite somme)

Ex 8 Déterminer la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(\frac{k}{n})\sin(\frac{k}{n^2})$.

Equivalents, Limites, Dls / DAs de Fonctions

IMT PSI 2022 | CCP PSI 2013 (développement limité d'une réciproque)

Ex 9 Soit $f : x \to x + \ln(1+x)$.

1) Montrez f est bijection de son ensemble de déf. sur un intervalle à préciser. On note g la réciproque.

2) Calculez $g(0)$ et $g'(0)$.

3) Montrez que g admet un dl à tout ordre en 0. [**2016 :** Montrez que g est de classe C^∞.]

4) Montrez que g admet un développement limité d'ordre 3 en 0 et le calculer.

Centrale PSI 2022 (développement asymptotique d'une réciproque en $+\infty$) ✷✍

Ex 10

1) Montrez $f : y \longrightarrow y^5 + y$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Soient v la réciproque de f et $u : x \longrightarrow (v(x))^5$.

2) Montrez que $u(x) = x + o(x)$ quand $x \longrightarrow +\infty$.

3) Montrez $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq $u(x) = x + ax^{1/5} + bx^{-3/5} + o(x^{-3/5})$ en $+\infty$. En déduire dév. asymptotique de v en $+\infty$.

CCP PSI 2007 (détermination limite fonction usuelle) ✍

Ex 11 Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.

Mines-Ponts PSI 2013 (développement limité) ✌

Ex 12 En trouvant deux manières de faire le développement limité de $(e^x-1)^n$, montrez que :

$$\forall m \leq n, \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m = \delta_{m,n}n!.$$

Mines-Ponts PC 2014 (détermination limite fonction usuelle) ✷

Ex 13 Déterminer la limite en 0^+ de $f\colon x \mapsto \dfrac{(1+x)^{(\ln x)/x} - x}{x(x^x-1)}$.

Petites Mines PC 2009 (détermination limite fonction usuelle)

Ex 14 Déterminer la limite de $(3^x - 3\times 2^x - v)^{\tan(\pi x/6)}$ quand x tend vers 3.

Mines-Ponts PC 2014 (détermination limite fonction usuelle) ✷✍

Ex 15 Déterminer la limite en $+\infty$ de $f\colon x \mapsto x^{(x+1)/x} - x^{x/(x-1)}$.