Classe de PSI

Feuille d'Exercices 2

☞ ***Thèmes des semaines du 19 et 27 Septembre 2016 :***

— Valeurs propres, vecteurs propres, espaces propres. CNS de diagonalisabilité. Polynôme caractéristique.

— En 2^e^semaine : Polynomes d'endomorphismes. Th de Cayley-Hamilton.

✌ **Ex 1** CNS pour que que la matrice $\begin{pmatrix} c & 0 & a \\ 2 & b & -1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admette $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre ?

✌ **Ex 2** Soit A une matrice carrée complexe. Comparez les valeurs propres et espaces propres de A et $A+I$?

✌ **Ex 3** Donnez valeurs propres, vecteurs propres de l'endomorphisme D de $E = \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ défini par $D(f) = f'$

✌ **Ex 4** Soient $M, N \in M_n(\mathbb{K})$ tq $M = PNP^{-1}$. Exprimez les vecteurs prop. de M en fonction de ceux de N.

✌ **Ex 5** Soit u un endomorphisme nilpotent. Montrez $\operatorname{Sp} u = \{0\}$

Ex 6 On note $E = C^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ et φ l'application de E dans E qui à f associe g définie par $g(x) = f'(x) - xf(x)$.

1) Montrez φ endomorphisme.

2) Donnez valeurs propres et vecteurs propres de φ.

3) Donnez $\operatorname{Ker} \varphi^2$.

Ex 7 Soit $f : \mathbb{C}^\mathbb{N} \to \mathbb{C}^\mathbb{N}, u \to v$ où $u_0 = v_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1})$. On admet $f \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^\mathbb{N})$. Déterminez les valeurs propres et les espaces propres de f.

Ex 8 Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice réelle carrée d'ordre n qui a $1, 2, \dots, n$ sur la dernière ligne et dernière colonne et des 0 ailleurs.

✌ **Ex 9** Dire si les matrices sont diagonalisables, puis calculez valeurs propres, vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 \\ -4 & 9 & -2 \\ 6 & -3 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ex 10 Soit A=$\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$. A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Ex 11 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On suppose $f(e_1) = f(e_2) = \cdots = f(e_n) = v$ avec $v \in E$. Discutez la diagonalisabilité de f.

Ex 12 Montrez qu'une matrice de rang 1 est diagonalisable ssi sa trace est non nulle.

Ex 13 $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable ssi l'endomorphisme induit sur $\operatorname{Im} u$ est diagonalisable.

Ex 14 Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr}(A^2) = 0$. Montrez $\det(A^2 + I_3) = 1 + (\det A)^2$.

Ex 15 Cherchez tous les espaces vectoriels stables par la matrice du Q9b).

Ex 16 Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ et φ une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}^n$. On note H le noyau de φ. Montrez que H est stable par f ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \varphi \circ f = \lambda\varphi$. *Application :* cherchez tous les ev stables par la matrice du Q5a).

✷ **Ex 17** Soient une décomposition en somme directe $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n = E$, les projecteurs associés $\left(p_i\right)_{1\le i\le n}$ et n scalaires $a_1, \ldots, a_n$. Montrez que $f \in \mathscr{L}(E)$ défini par $f = a_1 p_1 + \cdots + a_n p_n$ est diagonalisable.
Précisez son polynôme caractéristique. (*On pourra considérer la restriction à E_i*)

Ex 18 On se donne $A = \begin{pmatrix} I_p & O_{p,n-p} \\ O_{n-p,p} & O_{n-p,n-p} \end{pmatrix}$ Diagonalisez $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Ex 19 Soit $A \in \mathscr{G}l_n(\mathbb{K})$. Exprimez $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.

Ex 20 Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. Quelles sont les valeurs possibles pour $\operatorname{tr} u$?

Ex 21 Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, $A \in E$ tel que $\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$ et $\varphi : P \in E \to A\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t - P\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrez $u \in \mathscr{L}(E)$ et déterminez ses éléments propres.

Ex 22 Soient A et B deux matrices carrées non nulles réelles d'ordre n. On définit φ sur $M_n(R)$ par $\varphi(M) = M + \operatorname{tr}(AM)B$. CNS pour que φ soit diagonalisable

Ex 23 **Disques de Gershgorin** [1]
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Etablir $\operatorname{Sp} A \subset \bigcup_{1\le i\le n} D\left(a_{ii}, \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\right)$, où $D(a,R)$ désigne le disque de centre a et de rayon R.
On pourra se servir de l'exercice 26 de la feuille d'exos d'algèbre linéaire.

✷ **Ex 24** Etablir que toute matrice stochastique (cad réelle telle que $\forall\, 1 \le i \le n \quad \sum_{j=1}^n M_{ij} = 1 \quad$ et $\quad M_{ij} \ge 0$) admet des valeurs propres complexes de module inférieur ou égal à 1.

Ex 25 Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels qu'il existe $a \neq 0$ vérifiant $uv - vu = av$.

1) Montrez que v n'est pas inversible.

2) Montrez, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $uv^k - v^k u = akv^k$.

3) Montrez que v est nilpotent en considérant l'endomorphisme φ de $\mathscr{L}(E)$ défini par $\varphi(w) = uw - wu$ ou en utilisante l'exercice de la feuille : si $\operatorname{tr} v^k = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors v est nilpotente.

✷ **Ex 26** On se donne deux endomorphismes diagonalisables u et v d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie tels que $u \circ v = v \circ u$ Prouvez qu'ils sont co-diagonalisables. *(On dit aussi diagonalisables dans une même base ou au travers d'une même matrice de passage)*

Ex 27 Diagonalisez la matrice A sans calcul. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 28 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 2. Montrez M diagonalisable ssi $\operatorname{tr}(u^2) \neq \operatorname{tr}^2(u)$ et $\Big(2\operatorname{tr}(u^2) \neq \operatorname{tr}^2(u)$ ou $2\operatorname{tr}(u^2) = \operatorname{tr}^2(u)$ et l'espace propre associé à la valeur propre $\frac{1}{2}\operatorname{tr}(u)$ est de dimension 2 $\Big)$.

1. **Semyon Gershgorin** : mathématicien biélorusse (1901-1933). Connu pour le théorème éponyme sur les valeurs propres.

Ex 29 Calculez A^n, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Ex 30 On se place dans un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie E

✌ **1)** On suppose f diagonalisable. Montrez f^2 diagonalisable. Montrez que la récirpoque est fausse.

✷ **2)** On considère ici un endomorphisme f tel que f^2 est diagonalisable. Etablir f est diagonalisable $\iff$ $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f^2)$ *(Indication : utilisez les polynômes annulateurs)*

Ex 31 Etablir que un endomorphisme laisse stables toutes les droites vectorielles (ce qui équivaut à tous les vecteurs sont vecteurs propres) ssi c'est une homothétie.

✷ **Ex 32** Soit V un ev de dimension n, $f \in \mathscr{L}(V)$ et φ l'endomorphisme de $\mathscr{L}(V)$ tel que : $u \to f \circ u$

1) Montrez $\operatorname{Sp} \varphi = \operatorname{Sp} f$

2) Dimension de $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda Id)$ en fonction de $\operatorname{Ker}(f - \lambda Id)$

3) Montrez φ diagonalisable ssi f diagonalisable.

Ex 33 Donnez 8 « racines-carrées réelles » de $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Ex 34 Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Etablir $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} \lambda_i \lambda_j = \sum\limits_{1 \le i < j \le n} (a_{ii} a_{jj} - a_{ij}^2)$.
On écrira le membre de gauche à l'aide de la trace.

Ex 35 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + 4I_n = 0$. Montrez que A n'a pas de valeur propre réelle, puis que n est nécessairement pair. Calculez le déterminant, la trace et le polynôme caractéristque de A.

✌ **Ex 36** Prouvez $A \in M_n(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable si elle vérifie $(A - 3I)^3 (A + 2I) = 0$ et $(A - 3I)^2 (A + 2I) \neq 0$

Ex 37 Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$ tq $A^4 = A^2$ et $\{-1, 1\} \subset Sp_{\mathbb{R}}(A)$. Montrez que A est diagonalisable.

Ex 38 Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ qui à $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Précisez valeurs propres et vecteurs propres.

Ex 39 Montrez que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ex 40 On se donne une matrice B par blocs égale à $B = \begin{pmatrix} A & O \\ A & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$

1) Explicitez B^n puis $P(B)$ pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

✷ **2)** Etablir B est diagonalisable $\iff$ $A = O$ *(Que remarque t-on dans la Q1 ?)*

✷ **Ex 41** Trouvez les $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ tq $M^3 - 2M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$

✷ **Ex 42** Soit A et B symétriques réelles tq $B = A^3$. Montrez qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(B)$

✷ **Ex 43** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique χ_A. Soit B une autre matrice.

1) Etablir : A et B n'ont pas de valeur propre commune ***si et seulement si*** $\chi_A(B)$ est inversible.

2) Montrez il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ non nulle tq $AM = MB$ ssi A et B ont une valeur propre en commun *Indication :* On pourra d'abord montrer $\forall P \in \mathbb{C}[X]$ $P(A)M = MP(B)$