Quelques Corrections Algebre Linéaire

Ex 1 On considère l'ensemble H des polynômes de la forme $aX^3+(b-2a)X^2-2bX+3a$. (a, b réels). Montrez que c'est un plan. *(muni des lois usuelles)*. Précisez une base.

Il est clair que H est un sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$, qui est un $\mathbb{R}$-ev usuel. Par conséquent, pour démontrer H $\mathbb{R}$-ev, il ***faut et il suffit*** de démontrer sous-ev de $\mathbb{R}[X]$

Méthode 1 générale (plus générale mais moins efficace dans cet exo) :

• On a bien $O \in H$ en prenant $a = b = 0$.

• Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux scalaires et $P_{ab}, P_{a'b'}$ deux polynômes de H. Montrons $\alpha P_{ab} + \beta P_{a'b'} \in H$:

$$\begin{aligned}
\alpha P_{ab} + \beta P_{a'b'} &= \alpha\Big(aX^3+(b-2a)X^2-2bX+3a\Big)+\beta\Big(a'X^3+(b'-2a')X^2-2b'X+3a'\Big)\\
&= (\alpha a+\beta a')X^3+\Big((\alpha b+\beta b')-2(\alpha a+\beta a')\Big)X^2-2(\alpha b+\beta b')X+3(\alpha a+\beta a')\\
&= AX^3+(B-2A)X^2-2BX+3A \ = \ \boxed{P_{AB}\in H}
\end{aligned}$$

On a posé $A = \alpha a + \beta a'$ et $B = \alpha b + \beta b'$ qui sont bien réels. OK : on reconnaît bien la « *forme* » d'un élément de H.

Méthode 2 (plus efficace dans cet exo) :

On remarque :

$$P_{ab} = aX^3+(b-2a)X^2-2bX+3a = a\underbrace{\Big(X^3-2X^2+3\Big)}_{Q(X)}+b\underbrace{\Big(X^2-2X\Big)}_{R(X)} = \alpha Q+\beta R$$

Comme a, b ***parcourent tout*** $\mathbb{R}$, on en déduit que H est l'ensemble de ***toutes les combinaisons linéaires*** de la famille (Q, R). Par conséquent (cours), c'est un espace vectoriel, les sous-espace vectoriel ***engendré par*** cette famille. On note $H = \text{Vect}(Q,R) =< Q, R >$ et on en déduit $\dim H \leq 2$.

Pour démontrer que H est un plan, cad de dimension 2, on commence par chercher une base (il peut y a d'autres méthodes selon les exos). On reprend le « *fil* » de la méthode 2 (d'où son « *efficacité* ») : on a en fait démontré que (Q, R) est ***génératrice de*** H, et même $\dim H \leq 2$. Reste à regarder si la famille est ***libre*** : comme $\deg Q \neq \deg R$, la famille est libre, donc base de H, donc $\dim H = \text{Card}(Q,R) = 2$.

Remarques

- ***Attention au raisonnement!*** $E = \text{Vect}(u,v)$ ne donne pas dimension 2 mais $\dim E \leq 2$. Pensez au cas $u = v$ qui donne dimension 1 (et même dimension 0 si $u = 0$). Rappelons que $\text{Vect}(u,v)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\alpha u + \beta v$.

- Plus généralement, $E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ amène $\dim E \leq p$. Pour en savoir un peu plus, il faut regarder si la famille est libre ou liée et plus ***précisément*** le ***rang de la famille*** des $(x_i)_{1\leq i\leq p}$: $\dim E = \text{rg}(x_i)_{1\leq i\leq p}$.
- Une famille de polynômes de degrés tous distincts est ***libre*** (cours). On dit aussi une famille « *échelonnée en degrés* »

Ex 2

1) Montrez que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) En donner une base pour $n = 3$.

1) D'après le cours, on sait que l'application $\text{tr} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \text{tr}(M)$ est une forme linéaire (forme signifie à valeurs dans $\mathbb{K}$). Par conséquent son noyau, qui est l'ensemble des matrices de trace nulle, est un ***hyperplan.*** C'est un donc un sev de dimension $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1 = n^2 - 1$

2) On remarque que l'ensemble H des matrices de trace nulle d'ordre 3 (sev de dimension $3^2 - 1 = 8$) peut s'écrire sous la forme ***complètement générale*** $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & -a-e \end{pmatrix}$. On écrit alors :

$$\begin{pmatrix} a & b & bc \\ d & e & f \\ g & h & -a-e \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$+ f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a(E_{11} - E_{33}) + bE_{12} + cE_{13} + dE_{21} + e(E_{22} - E_{33}) + fE_{23} + gE_{31} + hE_{32}$$

Je vous laisse réfléchir au fait que ceci permettrait aussi (2e méthode donc) de démontrer que c'est un sev par un Vect, par contre, on obtiendrait seulement $\dim \leq n^2 - 1 = 8$. J'ai utilisé la base canonique $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que vous ***devez connaître*** : E_{ij} est la matrice constituée uniquement de 0 sauf un seul 1 en position (i, j) : intersection de la ligne i et colonne j.

On a donc démontré que $H = \text{Vect}((E_{11} - E_{33}), E_{12}, E_{13}, E_{21}, (E_{22} - E_{33}), E_{23}, E_{31}, E_{32})$. Ceci prouve que cette famille est ***génératrice de*** H (rappel F est un sev engendré par la famille $\mathcal{F}$ est ***exactement la même chose*** que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de F, c'est juste un autre vocabulaire). Comme elle est ***aussi*** de cardinal 8 ***égal*** à la dimension de H, c'est est une base.

Remarque : Si vous aviez utilisé la deuxième méthode, qui ne vous donne pas la dimension (seulement $\dim H \leq 8$ si vous avez bien suivi), vous auriez été contraint de démontrer que cette famille était ***libre***, d'où une méthode plus longue. Il est donc important, pour l'efficacité, de savoir repérer les noyaux des formes linéaires qui vous donnent en plus la dimension. Le noyau d'une application linéaire quelconque (qui n'est pas une forme) ne vous donne pas immédiatement la dimension : on a, par le théorème du rang, dim $\text{Ker} f = n - \text{rg} f$ et il faut calculer ensuite le rang… Pour terminer, en fait, le rang d'une forme linéaire non nulle est toujours 1.

Ex 3

1) Montrez l'ensemble F des matrices circulantes M_{abcd} défini par $M_{abcd} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ est un sev de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

2) On pose $J = M_{0100}$. Calculez J^k et ***en déduire*** que F est stable par $\times$.

1) On écrit

$$M_{abcd} = a\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_4} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{J} + c\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{K} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{L}$$

Comme a, b, c, d sont ***quelconques***, l'ensemble de tous les M_{abcd} est l'ensemble de ***toutes les combinaisons linéaires*** de la famille $\mathcal{E}(I, J, K, L)$. C'est un donc un sev de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de dimension ≤ 4 (rappelons dim $\mathcal{M}_4(\mathbb{R}) = 16$)

Remarques

- On a donc $F = \text{Vect}(\mathcal{E})$ $\mathcal{E}$ est génératrice de F et est même libre (cela se comprend mais il faudrait le démontrer, c'en est donc une base. Les I, J, K, L sont elles-même des matrices circulantes.
- Il serait bien de voir (de savoir) (avant la question 2…) que $K = J^2$ et $L = J^3$…
- Vous voyez pourquoi on les appelle matrice circulantes ? Par contre, ***Attention!*** , ces méthodes ne fonctionnent pas lorsque les coefficients « *circulent à l'envers* » (vous voyez ce que cela veut dire ?)

2) On calcule :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K \qquad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = L \qquad J^4 = I_4$$

donc $F = \text{Vect}((J^k)_{0 \leq k \leq 3})$. Comme les matrices J^k sont égales cycliquement (cycle de longueur 4), on peut même écrire $F = \text{Vect}((J^k)_{k \in \mathbb{Z}})$ (par contre, cette famille ne sera pas une base, vous suivez ?).

Un ensemble F est stable par $\times$, ssi pour tous M, N dans F, alors $M \times N$ est **aussi** dans F. On utilise qu'un élément ne peut s'exprimer qu'en fonction de J. On prend $M = M_{abcd}$ et $N = Ma'b'c'd'$ et on se rappelle le cycle d'ordre

4 sur les puissances de J : par exemple $J^3 = J^7, J^2 = J^{10}$ et même $J^{-1} = J^3 = J^7 = J^{-5} \ldots$

$$\begin{aligned} MN &= (aI_4 + bJ + cJ^2 + dJ^3)(a'I_4 + b'J + c'J^2 + d'J^3) = aa'I_4 + ab'J + ac'J^2 + ad'J^3 + ba'J + bb'J^2 + bc'J^3 + bd'J^4 \\ &= (aa' + bd' + db' + cc')I_2 + (ab' + a'b + cd' + d')J + (\ldots)J^2 + (\ldots)J^3 \end{aligned}$$

Je n'ai pas mis les détails du calcul ni terminé (je vous laisse le faire). On a bien $MN \in F$, comme combinaison linéaire de puissances de J.

Remarque : En fait si on écrit $F = \text{Vect}\left((J^k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$, il n'y a ***rien à démontrer***, on a nécessairement F stable par produit ! Vous suivez ? Alors, c'est très bien.

Ex 4 Pour $n \geq 2$, et $(E) : M + M^{\mathrm{T}} = 2(\operatorname{tr} M)I_n$,avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que l'ensemble des solutions de E (muni des opérations usuelles) est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminez sa dimension.

Méthode 1 (plus générale) : Sol(E) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- Sol(E)$\ni O$ car $O + O^{\mathrm{T}} = O = 2(\operatorname{tr} O)I = 0I = O$
- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $M, N \in$Sol(E). On a donc $M + M^{\mathrm{T}} = 2(\operatorname{tr} M)I_n$ et $N + N^{\mathrm{T}} = 2(\operatorname{tr} N)I_n$. Il s'ensuit $(\alpha M + \beta N) + ({}^{\mathrm{T}}\alpha M + \beta N) = \alpha(M + M^{\mathrm{T}}) + \beta(N + N^{\mathrm{T}}) = \alpha \operatorname{tr} M I_n + \beta \operatorname{tr} N I_n = \operatorname{tr}(\alpha M + \beta N)I_n$, d'où $\alpha M + \beta N \in$ Sol(E)

Méthode 2 : Considérons $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to M + M^{\mathrm{T}} - 2\operatorname{tr} M I_n$. ϕ est clairement linéaire (la transposition et la trace sont linéaires d'après le cours), et d'autre part, il est immédiat que Sol(E)= Ker ϕ. Il s'ensuit que Sol(E) est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour la dimension, c'est un peu plus compliqué… On peut commencer par remarquer que les matrices antisymétriques conviennent (eh oui, il faut le voir tout seul, mais à l'oral vous serez aidé, si vous ne l'avez pas vu…).Si $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, $M^{\mathrm{T}} = -M$, et donc $M + M^{\mathrm{T}} = 0$, et d'autre part, on sait que la diagonale de M est nulle d'où $2\operatorname{tr}(M)I_n = 0$. Pour la dimension, on peut déjà dire dimSol(E)$\geq$ dim $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

On « regarde » alors les matrices symétriques : Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $M + M^{\mathrm{T}} = 2M$. Il vient alors, que Si $M \in$Sol(E), alors $2M = 2\operatorname{tr}(M)I_n$, soit $M = \alpha I_n$ (Bien comprendre cette « ***technique*** ».
Réciproquement, si $M = \alpha I_n$, alors $M \in$Sol(E) $\iff \alpha I_n + \alpha I^{\mathrm{T}}{}_n = 2\operatorname{tr}(\alpha I_n)I_n \iff 2\alpha I_n = 2n\alpha I_n \iff n = 1$. (On « comprend » l'hypothèse $n \geq 2\ldots$). Aucune matrice symétrique ne convient (sauf O).

Pour terminer, il faut se rappeler la somme directe (c'est du cours) $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, on écrit $M = A + S$, avec $S^{\mathrm{T}} = S$ et $A^{\mathrm{T}} = -A$.

$$\begin{aligned} M + M^{\mathrm{T}} = 2\operatorname{tr} M I_n &\iff (A+S) + (A+S)^{\mathrm{T}} = 2\operatorname{tr}(A+S)I_n \iff A + A^{\mathrm{T}} + S + S^{\mathrm{T}} = 2(\operatorname{tr} A + \operatorname{tr} S)I_n \\ &\iff 2S = 2\operatorname{tr} S I_n \iff S = 0 \text{ vu plus haut} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que seules les matrices antisymétriques sont solutions d'où Sol(E)= $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, ou dimSol(E)= $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Mines-Ponts PSI 2021-2019-2018 (ev engendré par matrices nilpotentes) ✷

Ex 5

Soient $n \geq 2$, $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{N}$ celui des matrices nilpotentes.

1) Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Montrez que l'espace engendré par $\mathcal{N}$ est inclus dans $\mathcal{H}$.

3) Cette inclusion est-elle une égalité ?

1) L'ensemble des matrices de trace nulle est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ comme noyau de la forme linéaire non nulle tr. Les matrices nilpotentes complexes d'ordre n ne forment pas un sev puisque cet ensemble n'est pas stable par + : par exemple les 2 matrices de la base canonique E_{1n} et E_{n1}, visiblement nilpotentes d'indice 2, ont une somme M non nilpotente puisque pour tout entier p, $M^{2p}E_1 = E_1$ avec E_1, premier vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (je vous laisse y réfléchir)

2) Je rappelle que les matrices nilpotentes ont une seule valeur propre 0, de multiplicité n (Je ne le redémontre pas ici). On en déduit que leur trace, somme de toutes les valeurs propres complexes, est toujours nulle. (C'est plus délicat à démontrer pour un 3/2 qui n'a pas ce résultat). Comme $\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ et que $\mathcal{H}$ est un sev, on en déduit Vect $(\mathcal{N})$, sev engendré par $\mathcal{N}$ est inclus dans $\mathcal{H}$. ***Attention!*** , on n 'en déduit pas l'égalité. Le sev engendré pourrait être plus petit. C'est la question suivante…

3) On peut démontrer l'égalité par plusieurs méthodes : ***ou*** montrer que toute matrice de trace nulle peut s'écrire comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes, ***ou*** montrer qu'il existe une famille ***libre*** de matrices nilpotentes de cardinal $\geq \dim\mathcal{H}$: on aura alors égalité par un raisonnement de dimension. On choisit la 2e.

On dispose déjà des n^2-n matrices nilpotentes de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: les E_{ij} pour $i \neq j$ qui vérifient toutes $E_{ij}^2 = 0$. Reste à en trouver $n-1$ indépendantes de celles-ci : on considère, pour $i \neq 1$, les $M_i = E_{11} + E_{1i} - E_{i1} - E_{ii}$: la restriction de l'endomorphisme canoniquement associé à Vect(e_1, e_i) a pour matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. On a donc aussi $M_i^2 = 0$. On termine par la liberté : si une combinaison linéaire est nulle $A = \sum_{i\neq j} \alpha_{ij}E_{ij} + \sum_{i\neq 1} \beta_i M_i = 0$. La coordonnée de A sur E_{ij}, avec $i \neq j$ et $i, j \neq 1$, est α_{ij} d'oà[1] $\alpha_{ij} = 0$. Celle sur E_{ii}, avec $i \neq 1$, est β_i, soit $\beta_i = 0$. Celle sur E_{1i} (rp. sur E_{i1}) est $\alpha_{1i} + \beta_i = 0$ (rp. $\alpha_{i1} - \beta_i = 0$), d'oà[1] $\alpha_{i1} = \alpha_{1i} = 0$. Reste $\beta_1 = 0$ que l'on obtient par la coordonnée sur E_{11} (je vous laisse y réfléchir).

Remarque : En utilisant les matrices ci-dessus, les E_{ij} avec $i \neq j$ et les M_i, qui sont nilpotentes d'indice 2, le lecteur pourra essayer de montrer par lui-même que toute matrice de trace nulle s'écrit comme combinaison linéaire de ces matrices, d'oà[1] la preuve par la 1re méthode. Par exemple, pour $n=3$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & -a-e \end{pmatrix} = fE_{23}+hE_{32}-eM_2+(a+e)M_3+(e+d)E_{21}+(-e+b)E_{12}+(a+e+c)E_{13}+(-a-e+g)E_{31}$$

Ex 6

1) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrez $A_f = \{g \in \mathcal{L}(E) \ / \ f \circ g = 0\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2) Précisez sa dimension.

1) On démontre A_f sev de $\mathcal{L}(E)$. On suppose E de dimension n

Méthode 1 (plus simple) :

- $A_f \ni 0$, l'application nulle, car immédiatement $f \circ 0 = 0$.
- Soient α, β 2 scalaires de $\mathbb{K}$, et $g, g' \in A_f$. ***Il faut montrer*** $\alpha g + \beta g' \in A_f$, cad ***il faut montrer*** $f \circ (\alpha g + \beta g') = 0$. Une propriété de la loi $\circ$ ***due au fait*** que f est linéaire permet d'écrire :

$$f \circ (\alpha g + \beta g') = \alpha (f \circ g) + \beta (f \circ g') = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

Méthode 2 (un peu plus élégante) : On considère l'application $\phi : g \in \mathcal{L}(E) \longrightarrow g \circ f$. Cette application est linéaire (due à la linéarité de f,c'est très similaire à plus haut, je ne le démontre pas ici), et on remarque $A_f = \operatorname{Ker} \phi$. C'est donc un sev de $\mathcal{L}(E)$.

Remarque : Attention ! $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$ ne « *marche que* » parce que f est linéaire (par exemple : $\sin(\ln x + x)$ ***n'est pas égal à*** $\sin \ln x + \sin x$!. ***Par contre***, l'autre sens $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$ « *marche* » tout le temps ! Eh oui, c'est compliqué les maths. Rien de nouveau, vous avez vu cela en Sup, je ne fais que vous le rappeler.

2) La méthode 2 nous donne sa dimension par le théorème du rang : $\dim A_f = \dim \mathcal{L}(E) - \operatorname{rg} \phi = n^2 - \operatorname{rg} \phi$ sans la donner : c'est théorique ! Il faut calculer ce rang ce qui n'est pas simple... On va prendre une aute méthode.

On se rappelle une propriété élémentaire du cours, à bien retenir car utile, $\boxed{f \circ g = 0 \iff \operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f}$. Ceci va nous permettre de calculer la dimension : l'idée est de « *construire* » un isomorphisme de l'ensemble de ***toutes*** les applications g linéaires telles que leur image soit contenue dans le noyau de f (cet ensemble est A_f!) vers un autre ev dont la dimension est, elle, connue. Essayez de comprendre ce qui suit, ce n'est pas si dur en fait.

Le noyau de f est fixé, c'est un ev que l'on va noter $F = \operatorname{Ker} f$ pour simplifier. Soit g une application de $\mathcal{L}(E)$ telle que son image soit contenue dans F. Alors on lui associe g' linéaire de E dans F qui est telle que $g'(x) = g(x)$ (on le peut ***uniquement*** par ce que son image est dans F, je vous laisse y réfléchir). On note $\psi : g \in A_f \longrightarrow g'$. Elle est évidemment linéaire (c'est « *quasiment* » l'identité) et elle est de l'ev $A_f \subset \mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$ dans l'ev $\mathcal{L}(E,F)$.

Montrons que ψ est bijective : il y a bien une dizaine de méthodes que nous réviserons en cours. Ici, le plus simple est sans doute ***d'expliciter la réciproque*** qui est simple, si vous avez bien suivi. C'est l'application qui à h linéaire ***de*** E ***dans*** F associe l'application linéaire de E dans E « *égale* » à h ! Ce n'est pas, mathématiquement strictement égal à h, car l'ensemble d'arrivée est E, mais à part cela ,c'est « *la même* ». Comme ψ est un isomorphisme on conclut par l'égalité de dimensions : $\dim A_f = \dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \times \dim F = n \times \dim \operatorname{Ker} f$.

Mines-Ponts PSI 2022 (sev de matrices) ✷ ☜

Ex 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*, A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AMB = 0\}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dimension ?

Notons F cet ensemble immédiatement sev comme noyau de l'application linéaire $M \longrightarrow AMB$. Si $r = \operatorname{rg} B$, on sait $B = PJ_rQ^{-1}$ avec P, Q inversibles et $J_r = Diag(1,\dots,1,0,\dots,0)$. Ensuite :

$$AMB = 0 \iff AMPJ_rQ^{-1} = 0 \iff \underbrace{AP}_{A'}\ \underbrace{P^{-1}MP}_{M'}\ J_r = 0 \iff A'M'J_r = 0$$

$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad M' = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ $\quad M'J_r = \begin{pmatrix} X & 0 \\ Z & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ puis $A'M'J_r = 0 \iff A' \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} = 0$ et Y, T quelconques

On pose $r' = \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A$ car P inversible. Considérons $\phi : (X\ Z)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R}) \longrightarrow A'\ (X\ Z)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$. ϕ est linéaire et si on note les colonnes $C_1, \dots, C_r$, elle est isomorphe à $\psi : (C_1, \dots, C_r) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^r \longrightarrow (A'C_1, \dots, A'C_r) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^r$. Comme $C_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow A'C_i$ est de rang r', ψ est de rang $r\,r'$ puis, par le théorème du rang, son noyau est de dimension $nr - rr'$. De même pour $\operatorname{Ker} \phi$. Comme $Y \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R})$, il suit $\dim F = nr - rr' + r(n-r) + (n-r)^2 = n^2 - rr' = \boxed{n^2 - \operatorname{rg} A \ \operatorname{rg} B}$

Ex 8 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie n et V un sous-ev de E de dimension p. On pose $L_V = \{u \in \mathcal{L}(E)\ /\ V \supset \operatorname{Im} u\}$.

1) Montrez que L_V est un ev de dim. finie

2) ✷ Donnez sa dimension.

$L = \{u \in \mathcal{L}(E) / V \supset \operatorname{Im} u\}$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ puisque, clairement l'application nulle O appartient à L ($\operatorname{Im} O = \{0\} \subset V$) et si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $u, v \in L$, alors $\alpha u + \beta v \in L$: Soit $x \in \operatorname{Im}(\alpha u + \beta v)$, donc $x = \alpha u(y) + \beta v(y)$, avec $y \in E$. Par hypothèse, $u(y) \in \operatorname{Im} u \subset V$ et $v(y) \in \operatorname{Im} v \subset V$, et V étant stable par + et ., il vient $x \in V$. On a démontré $\operatorname{Im}(\alpha u + \beta v) \subset V$.

L'ensemble des endomorphismes de V est « exactement » (en fait, à un isomorphisme canonique près : voir remarque) l'ensemble des morphismes de E dans V ($\operatorname{Im} u \subset V$) et donc est de dimension $\mathcal{L}(E,V) = \dim E \times \dim V = np$.

Remarque : Comme mathématiquement, une aplication de E dans E à valeurs dans V n'est pas « exactement » une application de E dans V, on prend l'isomorphisme suivant (immédiat a démontrer), qui conserve donc les dimensions $\psi : L \longrightarrow \mathcal{L}(E,V)$ qui à $f : E \to E$ associe $\tilde{f} : E \to V$ défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$!

Ex 9

1) Montrez que $F = \{\, P \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ P(1) = 0 \,\}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

2) Etablir les familles suivantes sont des bases de F : $\left(X^i(X-1)\right)_{0\leq i\leq n-1}$, $\left((X-1)^i\right)_{1\leq i\leq n}$

3) Montrez il existe p, m entiers tels que $\left((X-1)^i(X-2)^{n-i}\right)_{p\leq i\leq m}$ soit une base de F.

4) Montrez ***directement*** que $\left(X^i(X-1)\right)_{0\leq i\leq n-1}$ est génératrice de F.

1) Il fallait voir un noyau d'une forme linéaire... Considérons l'application linéaire $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow P(1)$ (je ne démontre pas la linéarité immédiate $(\alpha P+\beta Q)(1) = \alpha P(1)+\beta Q(1)$). C'est une forme linéaire car à valeurs dans $\mathbb{R}$ et ***non nulle*** car il existe évidemment des polynômes tels que $P(1) \neq 0$! $F = \operatorname{Ker}\phi$ donc c'est un hyperplan soit un $\mathbb{R}$-ev de dimension $\dim \mathbb{R}_n[X] - 1 = (n+1) - 1 = n$.

2) Comme on connaît la dimension de F, la méthode la plus simple pour démontrer base est de démontrer libre et de cardinal égal à la dimension. Ne pas oublier de démontrer que les vecteurs sont bien dans le sous-ev en question ! On pose $P_i = X^i(X-1)$, pour $0 \leq i \leq n-1$ et $\mathcal{E} = (P_i)_{0\leq i\leq n-1}$ pour rédiger efficacement.

- $P_i \in F$ car clairement $P_i(1) = 0$.
- $\mathcal{E}$ est ***libre*** puisque constituée de polynômes de ***degrés distincts***. En effet $\deg P_i = i+1$.
- $\operatorname{Card} \mathcal{E} = \operatorname{Card}\ 0\,; n-1\ = n = \dim F$

$\mathcal{E}$ est donc une base de F. Méthode similaire pour l'autre famille.

3) Cette question est un peu différente : les polynômes $Q_i = (X-1)^i(X-2)^{n-i}$ sont tous de ***même degré*** n. ***Attention*** ! Ils peuvent former une famille libre quand même ! Par contre, c'est un peu plus dur à démontrer. On peut aussi, si on maîtrise bien cette notion, démontrer que la famille est génératrice de F à la place de la liberté. Ce qui rajoute (un peu) de difficulté, c'est qu'il y a des paramètres à trouver en plus.

On peut commencer par remarquer que $Q_i \in F$ ssi $Q_i(1) = 0$ qui se traduit par $i \geq 1$. Par conséquent, $p \geq 1$ est une ***condition nécessaire***. On peut en profiter pour remarquer aussi que $n-i \geq 0$ est nécessaire pour que ce soit un polynôme, soit $m \leq n$. Montrons la liberté en consdérant une combinaison linéaire nulle :

$$\alpha_p(X-1)^p(X-2)^{n-p} + \alpha_{p+1}(X-1)^{p+1}(X-2)^{n-p-1} + \cdots + \alpha_m(X-1)^m(X-2)^{n-m} = 0$$

Il faut maintenant une idée (ou plusieurs) pour prouver que les coefficients sont nuls. On divise par $(X-1)^p$: on arrive à

$$\alpha_p(X-2)^{n-p} + \alpha_{p+1}(X-1)^1(X-2)^{n-p-1} + \cdots + \alpha_m(X-1)^{m-p}(X-2)^{n-m} = 0$$

En prenant la valeur en 1, on arrive à $\alpha_p(-1)^{n-p} = 0$ soit $\alpha_p = 0$ qu'on réinjecte. On divise alors par $(X-1)^{p+1}$

et on arrive alors à :

$$\alpha_{p+1}(X-2)^{n-p-1}+\cdots+\alpha_m(X-1)^{m-p-1}(X-2)^{n-m}=0$$

La valeur en 1 donne à nouveau $\alpha_{p+1}=0$. Il n'y a plus qu'à répéter cette idée : on arrivera alors à la dernière étape à $\alpha_m(X-1)^m(X-2)^{n-m}=0$ qui amènera $\alpha_m=0$.

On a donc maintenant pour $p\geq 1$ et $m\leq n$:

- $Q_i\in F$
- Le famille $(Q_p,\dots,Q_m)$ est libre

Par conséquent, c'est une base ssi elle est de cardinal n ce qui nécessite $p=1$ et $m=n$.

4) Puisqu'on a déjà montré que la famille est une base, on a donc démontré qu'elle est bien génératrice de F mais c'est ***indirect!***. Montrer directement signifie de montrer qu'elle engendre, que son vect est bien F ou ***autrement dit*** que ***tout*** polynôme de F s'écrit (directement) comme combinaison linéaire des P_i. Il faut réfléchir un peu. Montrer qu'une famille engendre (directement) un sev est une question assez délicate en général.

L'idée est celle-ci : si $P\in F$, $\deg P\leq n$ et $P(1)=0$ donc, cours sur les polynômes, on peut écrire $X-1\ /\ P(X)$ ou encore $P(X)=(X-1)Q(X)$ avec $\deg Q\leq n-1$. Ensuite :

$$\begin{aligned}P&=(X-1)Q(X)=\left(X-1\right)\left(a_0+a_1X+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}\right)\\&=a_0\left(X-1\right)+a_1X\left(X-1\right)+\cdots+a_{n-1}X^{n-1}\left(X-1\right)\\&=a_0P_0+a_1P_1+\cdots+a_{n-1}P_{n-1}\end{aligned}$$

Ex 10 On se place dans le $\mathbb{R}$-ev des fonctions numériques réelles. Etablir que la famille $(x\to\cosh x, x\to e^x, x\to\sinh x)$ est liée.

On se place dans $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La famille $(x\to\cosh x, x\to e^x, x\to\sinh x)$ est liée car :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ e^x=1\ \cosh x+1\ \sinh x$$

CCP PSI 2011 (base de l'ev des matrices diagonales)

Ex 12 Soit $D\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts. Montrez que $(I_n,D,D^2,\dots,D^{n-1})$ est une base de l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On peut déjà constater 2 choses : ce sont bien des matrices diagonales et le cardinal de la famille est égal à n, la dimension de l'ev des matrices diagonales. Il ne reste plus qu'à démontrer en 3e point la liberté de la famille. Posons $D=\ \mathrm{Diag}(a_1,\dots,a_n)$ avec les a_i distincts par hypothèse. Soit une combinaison linéaire nulle de coefficients $\lambda_i\in\mathbb{K}$: $\lambda_0I_n+\lambda_1D+\cdots+\lambda_{n-1}D^{n-1}=0$

Ecrivons-le pour $n=3$, pour voir plus clair :

$$\lambda_0 I_3+\lambda_1 D+\lambda_2 D^2=\lambda_0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}a_0&0&0\\0&a_1&0\\0&0&a_2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}a_0^2&0&0\\0&a_1^2&0\\0&0&a_2^2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_0+\lambda_1 a_0+\lambda_2 a_0^2&0&0\\0&\lambda_0+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_1^2&0\\0&0&\lambda_2+\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

On « *arrive* » donc au système 3×3 d'inconnues les λ_i (ne vous trompez pas) $\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_0+\lambda_1 a_0+\lambda_2 a_0^2&=&0\\\lambda_0+\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_1^2&=&0\\\lambda_0+\lambda_1 a_2+\lambda_2 a_2^2&=&0\end{array}\right.$

Quand un système est un peu compliqué, ou théorique, une bonne idée est d'écrire la matrice associée.

Ici c'est $\begin{pmatrix}1&a_0&a_0^2\\1&a_1&a_1^2\\1&a_2&a_2^2\end{pmatrix}$. On ***doit reconnaître*** une matrice de Van der Monde !

Vous l'avez sûrement vue en Sup. Maintenant, on le reverra en cours de Spé, mais si vous la retenez maintenant c'est toujours çà de « *gagné* » ! Une matrice de Van der Monde est une matrice du type

$$\begin{pmatrix}1&1&1&\dots&1\\a_1&a_2&a_3&\dots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\dots&a_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\dots&a_n^{n-1}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Les coefficients s'écrivent a_j^{i-1} pour $1\leq i,j\leq n$. Le résultat principal du cours de PSI à retenir eqt qu'elle est inversible ssi les a_i sont tous distincts. Vous vous rappelez l'hypothèse de l'exo ? Terminons la résolution. Le système s'écrit matriciellement $MX=0$ et je rappelle, si la matrice est inversible, la seule solution est $X=(0,\dots,0)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Nous obtenons donc ici les $\lambda_i=0$ ce qu'il fallait démontrer.

Remarque : Si les coefficients ne sont pas distincts, la famille n'est pas libre : Je vous laisse le vérifier avec cet exemple (essayez de trouver un lien !)

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad D^2=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ex 13 Soient $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n$ des réels. Montrez que la famille de vecteurs $(U_1,\dots,U_n)$ de $\mathbb{R}^n$ définie par $U_i=(1+a_1b_i,1+a_2b_i,\dots,1+a_nb_i)$ est liée *Indication : montrez qu'elle est contenue dans un plan.*

Mathématiquement, une famille (x_i) est contenue dans un plan ssi, pour tout i, $x_i\in \mathrm{Vect}(u,v)$, avec à priori, (u,v) libre (sinon Le vect est une droite, mais bon, si c'est inclus dans une droite, c'est inclus dans n'importe quel plan qui contient la droite…). Ajoutons que $x_i\in\mathrm{Vect}(u,v)$ est ***exactement la même chose*** que $x_i=\alpha_iu+\beta_iv$. Dans cet exercice, il faut donc bien « *regarder* » le vecteur $X_i=(1+a_1b_i,1+a_2b_i,\dots,1+a_nb_i)$ et remarquer :

$$X_i=\begin{pmatrix}1+a_1b_i\\1+a_2b_i\\\vdots\\1+a_{n-1}b_i\\1+a_nb_i\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\\1\end{pmatrix}}_{U}+b_i\underbrace{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_{n-1}\\a_n\end{pmatrix}}_{V}=1\,U+b_i\,V \qquad \text{et c'est tout…}$$

Remarque : Si vous avez tout compris, essayez de procéder de manière identique avec $X_i=\big(\sin(a_i+b_j)\big)_{1\le j\le n}$ pour $1\le i\le n$ (c'est similaire mais un peu plus dur)

Mines-Ponts PSI 2018-2017-2016-2009 (base de polynômes) ✷

Ex 14 Soient $a_0,\dots,a_n$ des scalaires 2 à 2distincts et $P\in\mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n.
Montrez que la famille $(P(X+a_k))_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

On part d'une combinaison linéaire nulle $\sum_{i=0}^n \lambda_iP(X+a_i)=0$ avec λ_i réels

En dérivant j fois en 0 pour $0\le j\le n$, on obtient $\sum_{i=0}^n \lambda_iP^{(j)}(a_i)=0$. Ce système à $n+1$ inconnues (les λ_i) et $n+1$ lignes a pour matrice associée $A=\left(P^{(j)}(a_i)\right)_{0\le i,j\le n}$. Chaque colonne est le vecteur $\left(P^{(j)}(a_i)\right)_{0\le i\le n}$. Or si on se rappelle que les $Q(a_i)$ sont les coordonnées d'un polynôme $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $(L_0,\dots,L_n)$ des polynômes de Lagrange associée aux réels ***distincts*** $a_0,\dots,a_n$, A est donc la matrice de passage de la base de Lagrange à la base $(P,P',P'',\dots,P^{(n)})$ de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est bien une base car les polynômes sont de degrés échelonnés (et non nuls car P de degré n) et en nombre $n+1$. A est donc inversible et la solution du systeme ne peut être alors que la solution partout nulle.

Mines-Ponts PSI 2014 (coefficients d'une matrice comme intégrale) ☜ ✷

Ex 15 Soient $E=\mathcal{C}^0(\,[0,1]\,,\mathbb{R})$ et $(f_1,\dots,f_n)$ une famille libre de E.
Montrez que pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})=[m_{ij}]_{1\le i,j\le n}$, il existe une famille $(g_i)_{1\le i\le n}$ de E telle que pour tous $1\le i,j\le n$, $m_{ij}=\displaystyle\int_0^1 f_i(t)g_j(t)\,dt$. Etudiez la réciproque.

Posons ϕ_i la forme linéaire sur E définie par $\phi_i(g)=\int_0^1 f_i(t)g(t)\,dt$. Nous allons montrer que l'application ψ : $g\in E\longrightarrow(\phi_1(g),\dots,\phi_n(g))\in\mathbb{R}^n$ est surjective. Le résultat suivra (je vous laisse y réfléchir).

On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ qui est un sev de E de dimension n. Il suffit de démontrer que ψ « *restreint* » à F est surjective. On la notera ψ aussi. Par linéarité et même dimension n, il faut et il suffit de démontrer $\psi : g \in F \longrightarrow (\phi_1(g), \dots, \phi_n(g)) \in \mathbb{R}^n$ est injective.

On suppose $\phi_1(g) = \dots = \phi_n(g) = 0$. $g \in F$ donc s'écrit $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$. On écrit alors :

$$0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(g) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_0^1 f_i(t) g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)\Big) g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(t)\Big)^2 \mathrm{d}t$$

Par continuité et positivité du carré réel, la nullité de l'intégrale amène $\alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0$ (pour tout t) qui, par liberté des (f_i), amène tous les α_i nuls, soit $g(t) = 0$. Réciproque immédiate soit $\mathrm{Ker}\,\psi = \{0\}$.

La réciproque est vraie. Je ne le démontre pas ici, vous pouvez essayer en reprenant le fil. Lisez la remarque.

Remarque :

On montre que l'application $x \in E \longrightarrow (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$, avec les ϕ_i formes linéaires quelconques sur E, est surjective ***ssi*** la famille des ϕ_i est libre. Ici, on peut démontrer que la famille des ϕ_i dans $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ définis plus haut est libre ***ssi*** la famille des f_i dans E est libre, ce n'est pas très difficile.

Ex 16 ✷ Soit $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ tq $f(\mathbb{R})$ est infini. On pose $f^n = f \times \dots \times f$ (n fois) Montrez $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre.

Considérons, pour comprendre, des cas où $f(\mathbb{R})$ est fini. Par exemple une fonction constante k, $f(\mathbb{R})$ est alors le singleton $\{k\}$. Toutes les fonctions f^n étant des constantes, elles sont toutes colinéaires (je vous laisse y réfléchir). Deuxième exemple un peu plus compliqué, quand f prend 2 valeurs, par exemple f vaut a sur $\mathbb{R}^{+*}$ et b sur $\mathbb{R}^-$. Alors toutes les f^n sont dans un même plan. Vous le voyez ? je vous aide un peu : c'est le plan engendré par les deux fonctions, celle qui vaut 1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et 0 sur $\mathbb{R}^-$ et celle qui vaut 0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et 1 sur $\mathbb{R}^-$. (il faut faire l'effort de le comprendre).

Revenons à notre exo. Déjà on applique le fait qu'une famille ***infinie*** est libre ssi toute ***sous-famille finie*** est libre (c'est limite-cours mais on peut considérer que c'est du cours pour Mines-Centrale). Donc on prend une sous-famille finie quelconque $(f^{n_1}, \dots, f^{n_p})$ mais c'est guère pratique à manier. On applique alors le résultat(qui lui est bien du cours), qu'une sous-famille d'une famille libre est libre, donc on considère la sur-famille $(f^1, \dots, f^N)$ avec $N = \max(n_1, \dots, n_p)$. Et pour terminer, simplifier les écritures, on va poser $n = N$. Donc, pour la suite, soit n entier ***fixé***. Montrons $(f^1, \dots, f^n)$ libre.

Soit une combinaison linéaire nulle $\alpha_1 f + \alpha_2 f^2 + \dots + \alpha_n f^n = 0$. Il faut se servir de l'hypothèse $f(\mathbb{R})$ est infini.

Méthode 1 : Il existe des x_i, pour $1 \le i \le n$, tels que les $f(x_i)$ soient distincts 2 à 2 (notons que n étant quelconque, même fixé, on a besoin de l'hypothèse d'infinitude). On obtient alors un système à n inconnues (les α_j) et n lignes, la i^e ligne étant $\alpha_1 f(x_i) + \alpha_2 (f(x_i))^2 + \dots + \alpha_n (f(x_i))^n = 0$. Avez-vous reconnu ? Le système est donc un système de Van der Monde ! Les $f(x_i)$ étant tous distincts entre eux, la matrice de Vander monde (en les $f(x_i)$) associée au système est inversible, donc la seule solution est la solution nulle, soit $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Méthode 2 : On considère le polynôme $P(X) = \alpha_1 X + \alpha_2 X^2 + \cdots + \alpha_n X^n$. ce polynôme a pour racines tous les $f(x)$ qui sont en nombre infini, c'est donc le polynôme nul. Par conséquent ses coefficients sont nuls $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Remarque : Ce n'est pas tout à fait une matrice de Van der Monde puisqu'il n'y a a pas de 1 ! Pour justifier proprement, il faut revenir au déterminant. La (vraie) matrice de vandermonde $\left[f(x_i)^{j-1}\right]_{1\leq i,j\leq n}$ a pour déterminant (c'est du cours) $\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(f(x_j)-f(x_i))$. La matrice associée à notre système, qui est $\left[f(x_i)^j\right]_{1\leq i,j\leq n}$, par n-linéarité, a donc pour déterminant $\prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i) \times \prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(f(x_j)-f(x_i))$. On voit donc qu'il ***faut en plus prendre des*** $f(x_i)$ non nuls, ce qui ne pose pas de problème avec l'hypothèse. Pour ceux qui ne comprennent pas bien cette « *histoire* » de déterminant (cours de révision en décembre sur la n-linéarité), je vous l'explicite pour $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = abc(c-a)(b-a)(c-b)$$

Ex 18

Calculez noyau et image de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ donné dans la base canonique par $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Quand on demande le noyau et l'image d'une matrice 3×3, une bonne idée peut être de calculer son déterminant, d'où d'ailleurs l'importance de savoir calculer un det 3×3 en quelques secondes par Sarrus. On alors ***immédiatement son rang***. (ce qui n'est pas vrai si la taille ≥ 4), ce qui aide toujours. En effet :

- Si $\det M \neq 0$, M est inversible ($\operatorname{rg} M = 3$), et donc $\operatorname{Ker} M = \{0\}$ et $\operatorname{Im} M = \mathbb{R}^3$.
- Si $\det M = 0$, $\operatorname{rg} M < 3$, donc vaut $0, 1, 2$. 0 est exclus (en général) car c'est la matrice nulle ! et rang 1 se voit. Donc , on sait si c'est rang 1 ou rang 2.

Ici, on a, par Sarrus, $\det M = 3+1+0-2-0-2 = 0$. Comme on voit que ce n'est pas le rang 1 (C_1 n'est pas colinéaire à C_2), $\operatorname{rg} M = 2$. ***Donc*** l'image est un plan et le noyau est une droite (théorème du rang).

Pour le noyau d'une matrice, le « *management* » est toujours le même : on cherche à partir du système, à écrire ***toutes*** les variables (ici 3 : x, y, z) en fonction d'1 variable, puisque c'est une droite. Si vous avez bien assimilé la méthode du pivot, vous pouvez l'utiliser, mais c'est souvent plus long :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \in \operatorname{Ker} M \iff MX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x-y+2z & = & 0 \\ y-z & = & 0 \\ x+2y-3z & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \\ z & = & z \end{array}\right.$$

On ***reconnait*** la ***droite*** dirigée (engendrée) par $(1,1,1)$. $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}(1,1,1)$.

Attention! , ce n'est pas, stricto-sensu, $\operatorname{Ker} f$: $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1e_1+1e_2+1e_3)$ où (e_1,e_2,e_3) est la base donnée dans l'énoncé. Or ici, il nous parle de la ***base canonique*** de $\mathbb{R}_2[X]$. On a donc $e_1 = 1$ $e_2 = X$ $e_3 = X^2$ et finalement $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1+X+X^2)$

Le cours nous donne $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1,C_2,C_3)$, ce qui d'ailleurs signifie aussi que (C_1,C_2,C_3) est ***génératrice*** de $\operatorname{Im} M$. Cette famille ne peut pas être une base (il y en « *un de trop* »), une colonne est liée aux autres. Où vous trouvez la combinaison (ce n'est pas très difficile ici) où vous utilisez une astuce : le noyau : une combinaison est $(1,1,1)$. On a bien $C_1+C_2+C_3 = 0$! Par conséquent $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1,C_2,C_3) = \operatorname{Vect}(C_1,C_2)$. La famille (C_1,C_2) est donc ***génératrice de*** l'image et est de ***cardinal 2***. C'est donc ***une base*** de $\operatorname{Im} M$. Terminé.
On « *revient* » au morphisme f pour donner $\operatorname{Im} f$ qui en fait est la question posée : $C_1 = (-1,0,1)$ et $C_2 = (-1,1,2)$. on utilise la base $(1,X,X^2)$, soit une base de $\operatorname{Im} f$ est $(-1+X^2, -1+X+2X^2)$

Ex 19 ✌On pose $f : P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]) \longrightarrow 2XP'(X) - (1-X^2)P''(X)$

1) Montrez f endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Calculez le noyau de f.

---

1) f est linéaire car pour tous scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous polynômes P, Q (***Attention!*** au 1^er égal) :

$$\begin{aligned} f(\alpha P+\beta Q) &= 2X(\alpha P(X)+\beta Q(X))' - (1-X^2)(\alpha P+\beta Q(X))''(X) \\ &= \alpha(2XP'(X)-(1-X^2)P''(X)) + \beta(2XQ'(X)-(1-X^2)Q''(X)) = \alpha f(P)+\beta f(Q) \end{aligned}$$

Pour vérifier f **endo**-morphisme, on vérifie ***clairement*** que $f(P)$ est bien $\in \mathbb{R}_n[X]$, cad un polynôme de degré $\leq n$. Polynôme étant immédiat, on vérifie ***l'inégalité sur le degré*** en appliquant ***proprement*** les formules sur le degré que je vous rappelle :

$$\deg(P\times Q) = \deg(P)+\deg(Q) \qquad \deg(P^{(k)}) \leq \deg(P)-k \qquad \deg(P+Q) \leq \max(\deg(P),\deg(Q))$$

Attention! à la formule du degré de la somme, il ne faut pas oublier que les termes de plus haut degré peuvent se télescoper (ce qui n'arrive pas pour le produit), d'où pas de égal mais un $\leq$.***Attention!*** aussi à la dérivée! $\deg(P') = \deg(P)-1$ et, en généralisant, $\deg(P^{(k)} = \deg(P)-k$ ***est faux*** : en effet la 1^re formule ne marche pas pour les polynômes constants (je vous laisse y réfléchir) et la 2^e ne marche pas pour tous les polynômes de degré $< k$ (parce que, en fait, $\deg(P^{(k)}) = -\infty\ldots$). On applique ces formules à l'exo :

$$\deg(XP'(X)) = \deg(X)+\deg(P') \leq 1+n-1 = n$$
$$\deg((1-X^2)P''(X)) = \deg(1-X^2)+\deg(P'') \leq 2+n-2 = n$$

On termine, avec le degré de $f(P)$, qui est leur somme, soit plus petit que $\max(n,n)=n$. Ok.

2)

$$P\in \operatorname{Ker} f \iff f(P)=0 \iff 2XP'(X)-(1-X^2)P''(X)=0$$

Pour résoudre, il faut reconnaître une équation différentielle. Du 2e ordre, mais en fait du 1er ordre « *déguisée* ». Donc, vous pouvez la résoudre avec le programme de Sup. On pose $y=P'$ qui donne $2xy-(1-x^2)y'=0$ qui s'intègre en (c'est du cours!)

$$P'=y=C\exp\Big(\int \frac{2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x\Big)=C\exp\Big(-\ln\big|1-x^2\big|\Big)=\frac{C}{\big|1-x^2\big|}$$

On peut enlever la valeur absolue si on se place sur un des intervalles $]-\infty,-1[\,,\,]-1,1[\,,\,]1,+\infty[$. Sur chacun de ces intervalles, on obtient la primitive en décomposant en élément simples $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1/2}{1-x}+\dfrac{1/2}{1+x}$, puis

$$P(x)=\frac{C}{2}\Big(-\ln(1-x)+\ln(1+x)\Big)+D$$

Attention! à ne pas oublier la constante de primitivation! Les seules fonctions polynomiales correspondent à $C=0$; Le noyau est donc l'ensemble des polynômes constants (le D) qui est un bien un ev et même une droite vectorielle, la droite dirigée par 1. $\operatorname{Ker} f=\operatorname{Vect}(1)=\mathbb{R}_0[X]$

Ex 20 Soit $A\neq 0\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et ϕ tq $\phi(M)=M-\operatorname{tr}(M)A$.

1) Montrez ϕ est automorphisme ssi $\operatorname{tr} A\neq 1$.

2) Calculez $\phi^2(M)$.

---

1) Je vous démontre que c'est un morphisme (d'ev), ou une application linéaire :

$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R},\quad \forall M,N\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en appliquant la ***linéarité*** de la trace (cours) :

$$\begin{aligned}\phi(\alpha M+\beta N)&=(\alpha M+\beta N)-\operatorname{tr}(\alpha M+\beta N)A=\alpha M+\beta N-(\alpha\operatorname{tr} M+\beta\operatorname{tr} N)A\\&=\alpha(M-\operatorname{tr} MA)+\beta(N-\operatorname{tr} NA)=\alpha\phi(M)+\beta\phi(N)\end{aligned}$$

Il y a beaucoup de méthodes pour démontrer ***automorphisme*** (cad ***bijectif***, une fois montré endomorphisme). Comme ici, on a un ***endomorphisme de dimension finie***, le plus simple et le « *plus usuel* » est de démontrer $\operatorname{Ker}\phi=\{0\}$, ce qui équivaut à montrer ϕ injective et équivaut d'ailleurs aussi à démontrer $\operatorname{Ker}\phi\subset\{0\}$ (puisque $\{0\}\subset \operatorname{Ker}\phi$ est évident). On démontre donc les 2 implications de $\operatorname{tr} A\neq 1 \iff \operatorname{Ker}\phi=\{0\}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ ***Hypothèse*** $\operatorname{tr} A\neq 1$.

Montrons $\operatorname{Ker}\phi=\{0\}$. Soit $M\in \operatorname{Ker}\phi$, donc $\phi(M)=M-\operatorname{tr}(M)A=0$. On passe à la trace :

$$0=\operatorname{tr}(M-\operatorname{tr}(M)A)=\operatorname{tr}(M)-\operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(M)(1-\operatorname{tr}(A))$$

De l'hypothèse, et du produit de 2 réels qui est nul, il vient $\operatorname{tr}(M)=0$ que l'on réinjecte dans $M-\operatorname{tr}(M)A=0$ et qui nous donne $M=0$, donc $\operatorname{Ker}\phi\subset\{0\}$ puis, remarque plus haut, $\operatorname{Ker}\phi=\{0\}$.

Remarque : Attention! $\phi(M)=0 \Longrightarrow M=0$ ***ne démontre pas*** $\operatorname{Ker}\phi=\{0\}$. C'est même une ***grave*** erreur de ***raisonnement mathématique***. Cela démontre seulement $\operatorname{Ker}\phi\subset\{0\}$

$\boxed{\Longleftarrow}$ On le démontre ***par la contraposée*** de $\operatorname{Ker}\phi=\{0\} \Longrightarrow \operatorname{tr}(A)\neq 1$ qui est $\operatorname{tr}(A)=1 \Longrightarrow \operatorname{Ker}\phi\neq\{0\}$.
Hypothèse $\operatorname{tr}A=1$. On doit montrer $\operatorname{Ker}\phi\neq\{0\}$. L'idée est de considérer $M=A\neq 0\in \operatorname{Ker}\phi$. On écrit :

$$\phi(A)=A-\operatorname{tr}(A)A=A-A=0$$

Je vous rappelle les propriétés sur la trace :

Remarques

- La trace est la sommme des coefficients diagonaux d'une matrice $\operatorname{tr}(M)=\sum_{i=1}^{n} M_{ii}$
- la trace est linéaire : $\operatorname{tr}(\alpha M+\beta N)=\alpha\operatorname{tr}(M)+\beta\operatorname{tr}(N)$.
- $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$. ***Propriété importante*** (qu'il faudrait savoir redémontrer : allez voir votre cours de Sup) d'autant plus que, ***en général, on a*** $AB\neq BA$. Je vous rappelle qu'on a aussi $\det(AB)=\det(BA)$.

  On peut en déduire, par exemple $\operatorname{tr}(ABC)=\operatorname{tr}(BCA)=\operatorname{tr}(CAB)$. **mais attention! pas** $=\operatorname{tr}(BAC)$ (je vous laisse y réfléchir).
- (5/2) La trace est la somme des n valeurs propres (à condition qu'il y en ait n, autrement dit, il vaut mieux « *raisonner* » dans $\mathbb{C}$.

2) On calcule $\phi^2(M)$ qui, ***Attention!***, n'est pas le carré de $\phi(M)$:

$$\begin{aligned}\phi^2(M)&=\phi(\phi(M))=\phi(\underbrace{M}_{\text{vecteur}}-\underbrace{\operatorname{tr}(M)}_{\text{scalaire}}\underbrace{A}_{\text{vecteur}})=\phi(M)-\operatorname{tr}(M)\,\phi(A)\\&=(M-\operatorname{tr}(M)A)-\operatorname{tr}(M)\,(A-\operatorname{tr}(A)A)=\boxed{M-\operatorname{tr}(M)(2-\operatorname{tr}(A))\,A}\end{aligned}$$

Remarque : On peut remarquer que ***si*** $\operatorname{tr}(A)=2$, alors $\phi^2(M)=M$, soit $\phi^2=\mathrm{Id}$, ce qui donne ϕ est une ***symétrie***. Si on se rappelle que le « *par rapport* » d'une symétrie (c'est du cours!) est donnné par l'ensemble des vecteurs invariants (c'est un ev car c'est $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}-f)=E(1)$, espace propre associé à 1 (5/2)). Alors en considérant ϕ (allez regarder), on voit immédiatement que $\phi(M)=M \Longleftrightarrow \operatorname{tr}(M)=0$. ***si*** $\operatorname{tr}(A)=2$, ϕ est donc la symétrie par rapport à l'hyperplan des matrices de trace nulle.

Ex 16bis Soit D matrice diagonale à coef diagonaux distincts et $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow MD - DM$. Donnez $\operatorname{Ker}\phi$ et $\operatorname{Im}\phi$.

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \in \operatorname{Ker}\phi \iff \phi(M) = MD - DM = 0 \iff MD = DM$. (Le noyau de ϕ est donc l'ensemble des matrices qui commutent avec D, qu'on appelle le ***commutant*** de D et qui est un ev, puisque c'est un noyau ...).

Cet exo ressemble un peu au précédent, sauf que c'est une matrice $n \times n$. c'est donc plus difficile à « gérer ».

On écrit $M = (M_{ij})$ et $D = (d_{ij})$ avec d_{ii} distincts entre eux et $\forall i \neq j, d_{ij} = 0$ et on applique la formule-produit : pour tous $1 \leq i, j \leq n$

$$[MD - DM]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj} - \sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{kj} \stackrel{*}{=} m_{ij} d_{jj} - d_{ii} m_{ij} = m_{ij}(d_{jj} - d_{ii})$$

* on a appliqué, pour la première somme, $d_{kj} = 0$ sauf (peut-être) pour $k = j$ et pour la deuxième, $d_{ik} = 0$, sauf pour $k = i$. De l'hypothèse, fondamentale donc, les coefficients d_{ii} sont tous distincts, il vient, que si $MD - DM = 0$, alors pour $i \neq j$, $d_{ii} - d_{jj} \neq 0$, donc $m_{ij} = 0$, cad on vient de démontrer que M est diagonale. La réciproque étant immédiate, on a $\operatorname{Ker}\phi = D_n(\mathbb{C})$. Les élèves ambitieux peuvent retenir ce résultat : les matrices commutant avec les matrices diagonales à ***coefficients diagonaux tous distincts*** sont toutes les matrices diagonales. Rappelons aussi ce résultat : les matrices commutant avec toutes les matrices, sont seulement les matrices scalaires, cad les matrices d'homothétie, cad les αI_n.

Ex 22 Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle $f^k = f \circ \ldots \circ f$.

1) Montrez $\operatorname{Ker}(g \circ f) \supset \operatorname{Ker} f$. Trouvez une égalité similaire avec $\operatorname{Im}(g \circ f)$. La démontrer.

2) Montrez $f(\operatorname{Im} f^k) = \operatorname{Im} f^{k+1}$, $f^{-1}(\operatorname{Ker} f^k) = \operatorname{Ker} f^{k+1}$, $f(\operatorname{Ker} f^k) \subset \operatorname{Ker} f^{k-1}$.

On se rappelle $\operatorname{Im} f = f(E)$ et $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$, mais ceci sur le noyau ne sert pas trop. Par contre bien retenir :

$$x \in \operatorname{Ker} f \iff f(x) = 0 \qquad x \in \operatorname{Im} f = f(E) \iff \exists y \in E, x = f(y)$$

En fait plus généralement (regardez bien et comparez, car cela sert !) $x \in f(H) \iff \exists h \in H, x = f(h)$. Il y a aussi celui-là, qui sert un peu moins, surtout pour les élèves « *ambitieux* » (mais qui est bien au programme) :

$$x \in f^{-1}(K) \iff f(x) \in K \qquad \text{il « \textit{marche à l'envers} »}$$

Je rappelle aussi les propriétés de puissance $f^{p+q} = (f^p)^q = (f^q)^p$ avec p et q entiers de $\mathbb{N}$. On peut prendre p et q ***entiers négatifs*** si f est inversible (ou bijective ou isomorphisme ou ...).

1) Je rappelle que la ***méthode générale*** pour démontrer une inclusion $A \subset B$ est de partir de $x \in A$ et de « *se débrouiller* » pour démontrer $x \in B$.

Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, donc $f(x)=0$ puis $g(f(x))=g(0)=0$ car g linéaire, ce qui s'écrit $(g\circ f)(x)=0$, soit $x \in \operatorname{Ker}(g\circ f)$. On a donc bien démontré $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker}(g\circ f)$.

Les propriétés de l'image sont en général « *à l'envers* » de celles du noyau... Ici on va démontrer $\operatorname{Im}(g\circ f) \subset \operatorname{Im} g$ (regardez bien cette inclusion et comparez-la avec l'inclusion du noyau vue plus haut) :
Soit $x \in \operatorname{Im}(g\circ f)$ donc on a $x=(g\circ f)(y)$ avec $y \in E$. Il suit que $x=g(\ f(y)\ )$. Si vous voulez, $x=g(z)$ avec $z=f(y)$; si vous avez bien compris l'image, on en déduit $x \in \operatorname{Im} g$.

Remarque : Ces deux propriétés peuvent être considérées comme du cours, notamment par les élèves « *ambitieux* ».

2) ***Méthode 1 (plus élégante mais plus théorique) :***

$\operatorname{Im} f^{k+1} = f^{k+1}(E) = f(f^k(E)) = f(\operatorname{Im} f^k)$ $\qquad$ $\operatorname{Ker} f^{k+1} = \left(f^{k+1}\right)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}((f^k)^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\operatorname{Ker} f^k)$

Méthode 2 (par les doubles inclusions, plus simple)

$\boxed{f(\operatorname{Im} f^k) \subset \operatorname{Im} f^{k+1}}$

Soit $x \in f(\operatorname{Im} f^k)$ donc $x=f(y)$ avec $y \in \operatorname{Im} f^k$, cad $y=f^k(z)$ et finalement $x=f(f^k(z))=f^{k+1}(z) \in \operatorname{Im} f^{k+1}$

$\boxed{\operatorname{Im} f^{k+1} \subset f(\operatorname{Im} f^k)}$

Soit $x \in \operatorname{Im} f^{k+1}$ donc $x=f^{k+1}(y)=f(f^k(y))=f(z)$ avec $z=f^k(y) \in \operatorname{Im} f^k$, donc $x \in f(\operatorname{Im} f^k)$

$\boxed{f^{-1}(\operatorname{Ker} f^k) \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}}$

Soit $x \in f^{-1}(\operatorname{Ker} f^k)$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f^k$, soit $f^k(f(x)=0$ puis $f^{k+1}(x)=0$ qui amène $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$

$\boxed{\operatorname{Ker} f^{k+1} \subset f^{-1}(\operatorname{Ker} f^k)}$

Soit $x \in \operatorname{Ker} f^{k+1}$ donc $f^{k+1}(x)=0=f^k(f(x))$ donc $f(x) \in \operatorname{Ker} f^k$ qui s'écrit $x \in f^{-1}(\operatorname{Ker} f^k)$

$\boxed{f(\operatorname{Ker} f^k) \subset \operatorname{Ker} f^{k-1}}$

Soit $x \in f(\operatorname{Ker} f^k)$ donc $x=f(y)$ avec $y \in \operatorname{Ker} f^k$ qui s'écrit $f^k(y)=0$ donc $f^{k-1}(f(y))=f^{k-1}(x)=0$ qui s'écrit $x \in \operatorname{Ker} f^{k-1}$

a

Mines-Ponts PSI 2023 | Centrale PSI 2012 (inversibilité d'une matrice par blocs)

Ex 23 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M=\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$. [**2012 :** dans $\mathbb{K}$]

1) [**2012 :** Exprimez le rang de M en fonction de A et B.]

2) Donnez une CNS Pour que M soit inversible ; Déterminez M^{-1} dans ce cas.

1) Je rappelle, cours, que toute matrice (carrée) de rang r est ***équivalente*** (***Attention !*** ce n'est pas semblable)à une matrice $J_r = Diag(1,\dots,1,0,\dots,0)$ (r 1 sur la diagonale et $n-r$ 0), soit $= PJ_rQ^{-1}$, avec P,Q inversibles. Une idée est d' utiliser ce résultat. Une autre idée peut être de la multiplier par 1 (ou plusieurs), à gauche (ou à droite), matrices par blocs inversibles qui la ramènent à une matrice par blocs plus simple dont on saura le rang.

$$KMJ = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A-B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-B \end{pmatrix} = N$$

On a $\text{rg}(KMJ) = \text{rg}(N) = \text{rg}(A) + \text{rg}(A-B)$, car matrice diagonale par blocs et $\text{rg}(KMJ) = \text{rg}(M)$ car J, K inversible, c'est du cours.

Remarque : On peut redémontrer rapidement que $\text{rg}\, D = \text{rg}\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right) = \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$. On utilise $A = PJ_rQ^{-1}$ et $C = P'J_pQ''^{-1}$ avec $r = \text{rg}(A), p = \text{rg}(C)$, puis on effectue le produit par les deux matrices inversibles par blocs qui ne changent donc pas le rang :

$$\begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P'^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & 0 \\ 0 & J_p \end{pmatrix}$$

Le rang de la dernière matrice est immédiatement $r + p = \text{rg}(A) + \text{rg}(C)$ puisqu'on reconnaît dans les colonnes (comme dans les lignes), un famille libre extraite de la base canonique de $\mathbb{R}^{2n}$

2) M est inversible ssi $\text{rg}(M) = \text{rg}(A) + \text{rg}(A-B) = 2n$, et considérant $\text{rg}(A) \leq n$, $\text{rg}(A-B) \leq n$, ssi $\text{rg}(A) = \text{rg}(A-B) = n$, cad ssi A et $A-B$ inversible.

Méthode 1 : On reprend la question 1

$$M^{-1} = J \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (A-B)^{-1} \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & -I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & (A-B)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} - (A-B)^{-1} & (A-B)^{-1} \\ (A-B)^{-1} & -(A-B)^{-1} \end{pmatrix}$$

Méthode 2 : On inverse le système par blocs associé, comme pour une matrice simple :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} AX + AY & = & U \\ AX + BY & = & V \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (A-B)Y & = & U - V \\ AX + BY & = & V \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} X & = & A^{-1}V - A^{-1}BY = \ldots \text{terminez} \ldots \\ Y & = & (A-B)^{-1}U - (A-B)^{-1}V \end{array} \right.$$

Ex 24 Montrez ϕ endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{C})$ puis calculez noyau et image de $\phi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f$

C'est une application d'applications, il faut être prudent. ***Attention!*** aussi, c'est un $\mathbb{C}$-ev. Même la linéarité est plus difficile à gérer. ϕ s'applique 2 fois : ϕ est une application d'applications, $\phi(f)$ est une application et $\phi(f)(x)$ est un réel. ***Attention!*** : écrire $\phi(f(x))$ est une « *erreur* » puisque vous appliquez ϕ au ***réel*** $f(x)$**.**

ϕ est linéaire car pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, f et g continues sur [0,1], et pour tout x réel :

$$\phi(\alpha f + \beta g)(x) = \int_0^x \alpha f + \beta g = \alpha \int_0^x f + \int_0^x g = \alpha\phi(f)(x) + \beta\phi(g)(x) = [\alpha\phi(f) + \beta\phi(g)](x)$$

Attention! aussi à ne pas faire de confusions en utilisant $\alpha x + \beta y$, qui « *correspondrait* » à $\phi(f)$ linéaire.

Pour montrer ϕ ***endo***morphisme il faut bien vérifier que $\phi(f) \in E$, pour $f \in E$, cad que si f est ***continue*** sur [0,1], alors ***il faut vérifier*** $x \to \int_0^x f$ est aussi ***continue*** sur [0,1].

Je rappelle le ***théorème fondamental de l'analyse*** (à savoir absolument) : si f est ***continue*** sur un intervalle I, alors la fonction $x \to \int_a^x$ est la primitive sur I de f qui s'annule en a, elle est même de classe C^1. Sa dérivée sur I vaut $f(x)$. Il vient ici que $x \to \int_0^x$ est dérivable sur $I = [0,1]$, donc ***continue***, ce que l'on voulait.

Cherchons le noyau de ϕ :

$$f \in \operatorname{Ker}\phi \iff \phi(f)=0 \iff \forall x\in[0,1], \phi(f)(x)=\int_0^x f=0$$

En utilisant le théorème plus haut, il vient par dérivation de cette dernière égalité que pour tout x de $[0,1]$, $f(x)=0$. ***Réciproquement***, la fonction nulle est bien élément du noyau. On a donc démontré $\operatorname{Ker}\phi=\{0\}$.

Pour trouver l'image de ϕ, on ne peut pas s'aider ici du théorème du rang car la dimension est infinie. Il faut essayer de « *reconnaitre* » cet ev et ***donc on analyse les*** « *images* » $\phi(f)$. On a déjà vu que $\phi(f)(x)=\int_0^x f$ est la primitive de f sur [0,1] qui ***s'annule en 0 et est de classe*** C^1. Or on sait que les fonctions réelles C^1 sur [0,1] est un ev (comme les fonctions continues, on peut considérer que c'est du cours), de même que l'ensemble des fonctions s'annulant en 0 (noyau d'une forme linéaire). Par suite, leur intersection est un ev, notons le G. Si vous avez bien suivi, on a montré $\operatorname{Im}\phi\subset G$…

Après il faut « *deviner* » que cette inclusion est bien une égalité. Comme on ne peut s'aider des dimensions, il faut démontrer l'inclusion contraire. Il faut d'abord bien comprendre ce qu'il faut démontrer, c'est cela qui est difficile : si une fonction (notons la g) est C^1 et s'annule en 0, ***alors*** elle s'écrit sous la forme $g(x)=\int_0^x f$, avec f ***continue*** (à trouver ou, au moins, prouver que ce f existe). C'est de l'Analyse : $f=g'$ convient, car ***continue*** et :

$$\phi(g')(x)=\int_0^x g'=g(x)-g(0)=g(x)$$

Centrale PC 2013 (noyau image endomorphismes de fonctions) ✷

Ex 25 Soient $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\Phi\colon E\to E$ qui à f associe $x\mapsto f'(x)-xf(x)$.

1) Montrer que Φ est linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

2) Déterminer le noyau de Φ^2, de Φ^3 puis de Φ^n pour $n\in\mathbb{N}^*$.

3) Soit $g\in E$. Déterminer les $f\in E$ telles que $\Phi(f)=g$.

4) On note φ la restriction de Φ aux fonctions polynomiales. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

1) La linéarité est immédiate et résulte de la linéarité de la dérivation. $f\in E\in\operatorname{Ker}\Phi$ ssi $\phi(f)=f'(x)-xf(x)=0$. Cette équation différentielle s'intègre immédiatement ***sur*** $\mathbb{R}$ en $f(x)=Ce^{x^2/2}$. Cette fonction est bien C^∞ sur $\mathbb{R}$, soit $\operatorname{Ker}\Phi=\operatorname{Vect}(x\to e^{x^2/2})$. C'est une droite.

Pour déterminer l'image, on cherche à savoir quelles fonctions gC^∞ peuvent s'écrire sous la forme $g(x)=\Phi(f)(x)=f'(x)-xf(x)$. On est encore ramené à une équation différentielle $y'-xy=g(x)$ qui s'intégre en

- ***Equation homogène :*** vu plus haut $y=Ce^{x^2/2}$.
- ***Solution particulière :*** La méthode de la variation de la constante amène $C'(x)e^{x^2/2}+C(x)\times 0=g(x)$ soit $C(x)=\int_0^x e^{-t^2/2}g(t)\,dt$.

Finalement, la solution générale est $f(x)=Ce^{x^2/2}+e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}g(t)\,dt$. Toutes ces solutions sont C^∞, soit $\in E$, par le théorème fondamental de l'analyse et l'exponentielle, elles conviennent donc. Tout $g\in E$ possède une infinité d'antécédents par ϕ (un suffit…), par conséquent $\operatorname{Im}\Phi=E$

Remarque : Pour une équation $f(x)=y$ (E), d'inconnue x avec f linéaire. ***Si*** $y\in\operatorname{Im}f$, soit $y=f(x_0)$, on a que l'ensemble des solutions de (E) est le translaté du sev $\operatorname{Ker}f$ par x_0. Soit $Sol(E)=x_0+\operatorname{Ker}f$. C'est facile à démontrer, je vous laisse le comprendre et vérifier que c'est bien le cas aussi dans notre exo. Pour le dire autrement (et moins bien), le « *cardinal* » de l'ensemble des antécédents (de y) par une application linéaire (s'il y en a, cad si $y \in \operatorname{Im} f$) est toujours le « *cardinal* » du noyau.

2) On remarque que $f \in \operatorname{Ker}\Phi^2$ ssi $\phi(\phi(f)) = 0$ ssi $\phi(f) \in \operatorname{Ker}\phi$, ce qui s'écrit $f'(x) - xf(x) = Ce^{x^2/2}$. Encore une équation différentielle à résoudre. Résolution identique à plus haut : la solution générale est $f(x) = De^{x^2/2} + e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}Ce^{t^2/2}\,dt = De^{^2/2} + Cxe^{x^2/2}$. $\operatorname{Ker}\phi^2 = \operatorname{Vect}(x \to e^{x^2/2}, x \to xe^{x^2/2})$. C'est un plan.

$f \in \operatorname{Ker}\phi^3$ ssi $f \in \operatorname{Ker}\Phi^2$ ssi $f'(x) - xf(x) = (D + Cx)e^{cx^2/2}$. On arrive à $f(x) = (Ax^2 + Cx + D)e^{x^2/2}$.

Une récurrence immédiate, que je ne traite pas ici, amène $\operatorname{Ker}\phi^n = \operatorname{Vect}\left(x \to x^k e^{x^2/2}\right)_{0 \le k \le n-1}$

3) On l'a déterminé au 1), c'est le translaté du sev $\operatorname{Ker}\Phi$ par $e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}g(t)\,dt$, cad les $e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}g(t)\,dt + Ce^{x^2/2}$

4) On restreint Φ à $\mathbb{R}[X]$. C'est bien un endomorphisme (par contre, ce ne serait pas un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, je vous laisse y réfléchir). On a donc immédiatement $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Ker}\Phi \cap \mathbb{R}[X] = \{0\}$.

Pour l'image c'est un peu plus compliqué. Si vous avez compris la remarque, en tous cas si un polynôme $Q(X)$ a un antécédent par ϕ, il n'en a qu'un! (le cardinal du noyau). Mais ce n'est pas la question ici. Néanmoins cela peut nous aider un peu. D'après Q1, les antécédents de $Q(X)$ par Φ sont les $Ce^{x^2/2} + e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}Q(t)\,dt$. Les $Q(X) \in \operatorname{Im}\phi$ sont exactement les Q tels qu'un C de cette expression nous « *donne* » un polynôme. Mais c'est plus simple de reprendre le calcul directement avec un polynôme, sans passer par l'équation différentielle.

On commence par constater que $\deg\phi(P) = \deg P'(X) - XP(X) = \deg P + 1$. Par conséquent les constantes n'ont pas d'antécédent par ϕ. On pourrait essayer utiliser $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, mais il est plus malin d'utiliser la linéarité et de considérer X^k en « *solo* », pour $k \ge 1$. On cherche $P(X)$ tel que $P'(X) - XP(X) = X^k$. Via $P(X) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^i$ (un degré de moins), on arrive à :

$$\sum_{i=0}^{k-1} i a_i X^{i-1} - \sum_{i=0}^{k-1} a_i X^{i+1} = a_1 + \sum_{i=1}^{k-2}\left((i+1)a_{i+1} - a_{i-1}\right)X^i + a_{k-2}X^{k-1} + a_{k-1}X^k = X^k$$

Ce qui amène à $a_{k-1} = 1, a_{k-2} = 0, a_1 = 0, a_{i-1} = (i+1)a_{i+1}$ pour $1 \le i \le k-2$. En remarquant que la relation de récurrence amène une incompatibilité avec $a_1 = 0$ si k est pair, il n'y a donc des solutions que ssi k est impair. $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect}\left(X^{2k+1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$

Remarque : En vous rappelant que $e^{-t^2/2}$ n'a pas de primitive s'exprimant avec des fonction usuelles (donc pas de polynôme, si vous suivez…), plus généralement, il en est de même pour tous les $t^{2k}e^{-t^2/2}$. Par contre, immédiatement, $te^{-t^2/2}$ a une primitive usuelle, ainsi que tous les $t^{2k+1}e^{-t^2/2}$. On « *retrouve* » un peu le résultat. Par le changement de variables $u = t^2$, $2t\,dt = du$:

$$e^{x^2/2}\int_0^x e^{-t^2/2}\sum_{k=0}^n a_k t^{2k+1}\,dt = e^{x^2/2}\int_0^{x^2} e^{-u/2}\sum_{k=0}^n a_k u^k \frac{1}{2}\,du = e^{x^2/2}\left[e^{-u/2}R(u)\right]_0^{x^2} = R(X^2) - R(0)e^{x^2/2}$$

On prendra $C = R(0)$ pour avoir un polynôme…

CCINP PSI 2022 (endomorphisme de polynômes) ✷

Ex 27 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\phi : P \in \mathbb{R}[X] \longrightarrow (X-a)(P'-P'(a))-2(P-P(a))$.

1) Montrez ϕ endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrez il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tq $(X-a)^k$ divise $\phi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Trouvez le plus grand k vérifiant cette condition.

3) Déterminez le noyau et l'image de ϕ.

1) Aucune difficulté pour la linéarité, je ne le traite pas ici. Quant à endo, on peut ajouter que l'expression de $\phi(P)$ est bien un polynôme qui est d'un degré inférieur ou égal à celui du polynôme entrant.

2) Je rappelle que $(X-a)^p$ divise un polynôme Q ssi $Q(a) = Q'(a) = \cdots = Q^{(p-1)}(a) = 0$ (***Attention!*** au décalage). a est racine de multiplicité p ssi on a en plus $Q^{(p)}(a) \neq 0$. On calcule donc les différentes dérivées de $\phi(P)$ en remarquant qu'on a déjà $\phi(P)(a) = 0$:

$$\phi(P)'(X) = P'(X) - P'(a) + (X-a)P''(X) - 2P'(X) \qquad \phi(P)'(a) = -2P'(a)$$

On a donc $X-a$ divise $\phi(P)$ et comme on n 'a pas, pour tout polynôme, $P'(a) = 0$ (pour un a fixé), le plus grand k vérifiant la condition de l'énoncé ***pour tout*** polynôme P est $k = 1$.

3) On commence par le noyau : $P \in \operatorname{Ker}\phi \iff (X-a)(P'(X)-P'(a)) = 2(P-P(a))$ (E).

Méthode 1 : On va procéder par analyse-synthèse :

Analyse : ***Si*** $\phi(P) = 0$, alors $\phi(P)'(X) = 0$, donc $\phi(P)'(a) = 0$, donc $P'(a) = 0$. a est racine de $P(X) - P(a)$. Notons p sa multiplicité, soit $P(X) - P(a) = (X-a)^p Q(X)$ avec $Q(a) \neq 0$. Alors l'équation (E) s'écrit :

$$(X-a)(p(X-a)^{p-1}Q(X) + (X-a)^p Q'(X)) = 2(X-a)^p Q(X) \quad \Longrightarrow \quad (X-a)Q'(X) = (2-p)Q(X)$$

$X = a$ amène $p = 2$ ou $Q = 0$. Ces 2 cas amenant, en réinjectant, $Q'(X) = 0$ dc $Q = cste$. Finalement $P(X) = P(a) + k(X-a)^2 \in \operatorname{Vect}(1, (X-a)^2)$

Synthèse : Par linéarité, il suffit d'essayer le polynôme constante-1 et $(X-a)^2$, s'ils conviennent bien dans l'équation (E). Je vous laisse effectuer ce calcul élémentaire. Finalement $\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Vect}(1, (X-a)^2)$.

Méthode 2 : On raisonne dans la base $\mathscr{F} = \left((X-a)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$. On note les coordonnées a_n de P. Ce qui signifie $P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (X-a)^n$ et d'ailleurs, par la formule de Taylor pour les polynômes, on sait $a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}$.
L'équation (E) s'écrit alors simplement :

$$(X-a)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (X-a)^{n-1} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (X-a)^n \iff \forall n \geq 1,\ n a_n = 2a_n \iff \forall n \neq 0, 2\ a_n = 0$$

On notera ici l'équivalence. Par conséquent $\operatorname{Ker}\phi$ est le plan $\operatorname{Vect}(1, (X-a)^2)$

Pour l'image, le théorème du rang ne peut s'utiliser car la dimension est infinie. En fait on a que l'image est de codimension 2 mais cette notion n'est pas du tout au programme (un « *déficit* » de 2 dans la dimension infinie de $\mathbb{R}[X]$). Cà peut quand même aider un peu ...

Méthode 1 : Comme on a $\phi(P)(a)=0$, on a $\operatorname{Im}\phi \subset \{P; P(a)=0\} = (X-a)\mathbb{R}[X] = \text{Vect}\left((X-a)_{n\geq 1}\right)$ mais cette inclusion est stricte : on peut le comprendre en comprenant qu'il y a seulement un « *déficit* » de 1 (regardez le vect). On calcule une dérivée successive de $\phi(P)$:

$$\phi(P)''(X) = P''(X) + P''(X) + (X-a)P'''(X) - 2P''(X) = (X-a)P'''(X)$$

Par conséquent, a est racine de $\phi(P)$, comme déjà vu, mais ne peut pas être racine double car sinon $\phi(P)''(a) \neq 0$. On en déduit $(X-a)^2$ n'est pas dans l'image de ϕ, d'oà[1] $\operatorname{Im}\phi \subset \text{Vect}\left((X-a)^n\right)_{n\neq 0,2}$. Reste à prouver que cette inclusion est une égalité. Par linéarité, il suffit de prouver que chaque $(X-a)^n$ est bien dans l'image, pour $n \neq 0,2$. Par « *intuition* », on calcule, les $\phi((X-a)^k)$. Pour $k \geq 3$, $P'(a)=0$ puis $\phi((X-a)^k) = (k-2)(X-a)^k$ et pour $k=1$, $\phi(X-a) = -2(X-a)$. On en déduit :

$$\forall n \geq 3,\ (X-a)^n = \phi\left(\frac{1}{n-2}(X-a)^n\right) \qquad (X-a) = \phi\left(-\frac{1}{2}(X-a)\right)$$

Méthode 2 : On reprend la base $\mathcal{F}$:

$$\phi(P)(X) = (X-a)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (X-a)^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (X-a)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (n-2)(X-a)^n$$

Un polynôme $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n (X-a)^n$ est dans l'image ssi il existe une suite (a_n) telle que $(n-2)a_n = b_n$ pour $n \geq 1$ et $b_0 = 0$ (à§à on le savait déjà). la CNS est donc $b_0 = b_2 = 0$ et $\operatorname{Im}\phi = \text{Vect}\left((X-a)^n\right)_{n\neq 0,2}$.
On notera aussi qu'on peut déterminer un antécédent d'un polynôme de l'image par cette méthode.

Remarque : $\operatorname{Ker}\phi$ et $\operatorname{Im}\phi$ sont supplémentaires : $\operatorname{Ker}\phi \oplus \operatorname{Im}\phi = \mathbb{R}[X]$

IMT PSI 2017 | CCP BGMP 2023->11 (morphisme de matrices)

Ex 28 Soit la Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

1) Déterminez une base de $\operatorname{Ker} f$.

2) f est-il surjectif?

3) Trouvez une base de $\operatorname{Im} f$.

4) ~~Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires ?~~

1) Méthode 1 (plus simple) :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \iff AM = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+2c &=& 0 \\ b+2d &=& 0 \\ 2a+4c &=& 0 \\ 2b+4d &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -2c \\ b &=& -2d \end{array}\right. \overset{(*)}{\iff} \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -2c+0d \\ b &=& 0c-2d \\ c &=& c+0d \\ d &=& 0c+d \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V}$$

Pour réussir à résoudre un système linéaire, comme déjà dit, je vous conseille d'utiliser cette idée : écrire ***toutes*** les variables (ici a, b, c, d) en fonction d'1 ou 2 ou 3 variables. Le système d'avant (*) vous montre qu'on peut écrire en fonction de c et d d'oà[1] le système ensuite à 4 lignes qui permet de bien comprendre que $\text{Ker} f$ est un plan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\text{Ker} f = < U, V >$. (U, V) est génératrice de $\text{Ker} f$. Comme (U, V) est clairement libre, puisque, visiblement, U et V ne sont pas colinéaires, donc (U, V) est une base de $\text{Ker} f$.

Méthode 2 (plus élégante) :

$$M \in \text{Ker} f \iff AM = 0 \iff \text{Im} M \subset \text{Ker} A$$

C'est un rappel expliqué en cours. On calcule très vite le noyau de A :

$$M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker} A \iff \begin{cases} x + 2y &= 0 \\ 2x + 4y &= 0 \end{cases} \iff x + 2y = 0$$

Les 2 équations sont colinéaires, la matrice est de rang 1 ! $\text{Ker} A = \text{Vect}(-2, 1)$. 2 cas de $\text{Im} M \subset \text{Ker} A$:

- $\text{Im} M = \{0\}$, donc M est la matrice nulle. Evidemment qu'elle est solution…
- $\text{Im} M = \text{Vect}(-2, 1)$ équivaut les 2 colonnes lui sont colinéaires soit $M = \begin{pmatrix} -2a & -2b \\ a & b \end{pmatrix}$.

C'est bien le même sev que la méthode 1. Vérifiez-le !

2) Comme $\text{Ker} f \neq 0$, f n'est pas injective et comme f est ***un endomorphisme de*** $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$***, de dimension finie*** (4), alors f n'est pas non plus surjective (il ya équivalence ici). On aurait pu aussi le retrouver par le théorème du rang qui nous donne $\dim \text{Im} f = 4 - 2 = 2$. Or f est surjective ssi $\text{Im} f = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \iff \dim \text{Im} f = 4$.

3)

Pour l'image, plusieurs méthodes. Essayez de comprendre les 3. La 3e est un peu plus dure.

Méthode 1 :

Méthode traitée en TD, je ne m'attarderais donc pas dans les détails. Par Analyse-Synthèse.

Analyse : Si $N \in \text{Im}\phi$, $N = AM$ ***donc*** $\text{Im} N \subset \text{Im} A$ (expliqué en cours). On a immédiatement $\text{Im} A = \text{Vect}((1, 2))$, soit $\text{Im} N \subset \text{Vect}((1, 2))$ qui amène que N est une matrice du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$

Réciproque : L'analyse vient de démontrer que $\text{Im}\phi \subset \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\} = G$. ***Attention!*** seulement l'inclusion. On démontre l'inclusion réciproque par l'égalité de dimension : $\dim G$: expliqué en cours par un vect, $\dim G = 2$. Le théorème du rang amène $\dim \text{Im}\phi = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \text{Ker}\phi = 4 - 2 = 2$. Ok.

On a, explicité en TD, $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)$ Cette famille est donc génératrice et comme ***ici on sait*** $\dim G = 2$, on en déduit que c'est une base (pas nécessaire ici de démontrer libre, vu ?)

Méthode 2 :

Le théorème du rang nous amène $\dim\ \mathrm{Im}\, f = \dim\ \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim\ \mathrm{Ker}\, f = 4-2 = 2$. Il s'ensuit que toute base de $\mathrm{Im}\, f$ contient deux matrices « libres » . On commence donc par en prendre deux « au hasard » et on verra bien : Par définition $\mathrm{Im}\, f$ est l'ensemble des matrices AM. Le plus simple est de commencer par prendre l'image de 2 matrices de la base canonique, donc on calcule :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = U' \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(E_{12}) = AE_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = V'$$

Visiblement (***on ne peut le dire que pour deux vecteurs!! sinon il faut le démontrer proprement)*** U' et V' ne sont pas colinéaires, donc (U', V') est une famille libre à deux éléments de $\mathrm{Im}\, f$, donc une base de $\mathrm{Im}\, f$. On retrouve d'ailleurs la même base que plus haut.

Méthode 3 :

Comme l'image d'une matrice est plus facile à traiter, on décide d'écrire la matrice de ϕ dans ***une*** base : quelle base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ choisir? Ici, on ne vas pas trop réfléchir. On va prendre la base canonique. Une autre chose à comprendre c'est que, en fait, d'un point de vue pratique, on peut considérer qu'il y a ***deux*** bases canoniques : celle oà[1] on prend les coordonnées dans l'ordre des lignes et celle dans l'ordre des colonnes et cela peut changer pas mal de choses comme vous allez le voir :

$$\mathcal{E}_1 = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \Big) \qquad \mathcal{E}_2 = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \Big)$$

On calcule aisément :

$$f(E_{11}) = AE_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(E_{12}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad f(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad f(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}\,(\phi, \mathcal{E}_1) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ \hline 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} I & 2I \\ 2I & 4I \end{pmatrix} = C \qquad \mathrm{Mat}\,(\phi, \mathcal{E}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = D$$

Il est important de savoir remarquer les ***écritures par blocs***. Maintenant, étudier l'une seule des deux suffit pour déterminer l'image. On traite quand même les 2 par intérêt pédagogique, donc en fait deux méthodes dans cette méthode ...

$$\mathrm{Im}\, C = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, C_3, C_4) = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2) \text{ car } C_3 = 2C_1,\ C_4 = 2C_2$$

$$\mathrm{Im}\, D = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_2, C_3, C_4) = \mathrm{Vect}\,(C_1, C_3) \text{ car } C_2 = 2C_1,\ C_4 = 2C_3$$

On revient à $\operatorname{Im}\phi$ en nà¢â‚¬â„¢oubliant pas de ***revenir à la base***. On traite aussi, par pédagogie les 2 cas oà[1] ***l'ordre de la base canonique*** est différent.

La colonne C_1 de la matrice C « *donne* » $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et la colonne C_1 de la matrice D aussi !

La colonne C_2 de la matrice C « *donne* » $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et la colonne C_3 de la matrice D aussi !

Finalement $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Remarque : Juste pour information, pour les élèves « *ambitieux* », un peu de culture mathématique qui ***n'est pas*** au programme : on appelle produit extérieur ou tensoriel des matrices A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et on note $A \otimes B$ la matrice par blocs

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

On constate alors : $\operatorname{Mat}(\phi, \mathcal{E}_1) = C = A \otimes I$ et $\operatorname{Mat}(\phi, \mathcal{E}_2) = D = I \otimes A$. ***Allez regarder...*** « *Marrant* », non ?

Ex 28bis Soit u, v deux endomorphismes. Etablir $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle $\operatorname{Im} u = u(E)$ et $\operatorname{rg} u = \dim \operatorname{Im} u$. On écrit :

$$\operatorname{rg}(u+v) = \dim \operatorname{Im}(u+v) = \dim((u+v)(E)) \overset{\textbf{(1)}}{\leq} \dim(u(E)+v(E)) \overset{\textbf{(2)}}{\leq} \dim u(E) + \dim v(E) = \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$$

- **(1)** On a $(u+v)(E) = \{(u+v)(x), \ x \in E\} = \{u(x)+v(x), \ x \in E\}$ tandis que $u(E)+v(E) = \{u(x), \ x \in E\} + \{v(x), \ x \in E\} = \{u(x)+v(y), \ x, y \in E\}$. ***Attention*** il ne faut pas reprendre le ***même*** x, c'est une erreur de raisonnement ! C'est pour cela qu'on l'a « *renommé* » en y. Je vous laisse y réfléchir. On a donc $(u+v)(E) \subset u(E)+v(E)$.
- **(2)** Pour tous sev F, G, $\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) \leq \dim F + \dim G$.

On termine avec la ***même astuce*** qui permet de démontrer $\big||x|-|y|\big| \leq |x+y| \leq |x|+|y|$: en considérant les morphismes $u+v$ et $-v$: $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}((u+v)-v) \leq \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(-v) = \operatorname{rg}(u+v) + \operatorname{rg}(v)$. Par suite $\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v \leq \operatorname{rg}(u+v)$. Par indifférence du choix du nom des lettres, on a aussi (on échange u et v !) : $\operatorname{rg} v - \operatorname{rg} u \leq \operatorname{rg}(v+u)$. Les deux donnent $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \leq \operatorname{rg}(u+v)$ (on a utilisé que $|a| \leq b \iff a \leq b$ et $-a \leq b$).

Remarque : Donc on ***n'a pas en général*** $(u+v)(E)=u(E)+v(E)$. Par contre, on a bien $u(E+F)=u(E)+u(F)$

Mines-Ponts PSI 2022 (dérivation discrète de polynômes) ✷

Ex 29

Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrez il existe un unique $Q\in\mathbb{R}[X]$ tq $Q(0)=0$ et $Q(X+1)-Q(X)=P(X)$

On considère l'endomorphisme $\Delta: Q(X)\in\mathbb{R}[X]\longrightarrow Q(X+1)-Q(X)$ (on l'appelle « *dérivation discrète* »).

Calculons son noyau : $Q\in\ \mathrm{Ker}\,\Delta$ vérifie $Q(X+1)=Q(X)$. En raisonnant dans $\mathbb{C}$, si α est une racine complexe de Q, alors $Q(\alpha+1)=0$, donc $\alpha+1$ racine puis, par récurrence immédiate, $\alpha+n$ (avec $n\in\mathbb{Z}$) est aussi racine de Q. Q ayant une infinité de racines, est le polynôme nul. ***Attention!*** on n'en déduit pas que c'est le polynôme nul ***car*** on est « *parti* » de si le polynôme a une racine, ce qui équivaut, dans $\mathbb{C}$, à $\deg Q\geq 1$. Donc, on en déduit que les seules possiblités sont : soit Q de degré ≥ 1 n'a pas de racines, impossible dans $\mathbb{C}$, soit Q de degré 0 ou constant. Réciproque immédiate. $\mathrm{Ker}\,\Delta=\mathrm{Vect}\,(1)$, qui est la droite des polynômes constants (on voit l'analogie avec la dérivation)

Soit n le degré de P. On cherche donc à prouver qu'il existe un unique Q vérifiant $Q(0)=0$ et $\Delta(Q)=P$. Soit $p\geq 1$ le degré de Q. Les formules du cours donnent $\deg\Delta(Q)\leq p$ mais en regardant le coefficient dominant, on sâ€™aperà§oit que $\deg\Delta(Q)=p-1$ (je ne mets pas les détails ici). Il suit que tout polynôme vérifiant $\Delta(Q)=P$ est dans $\mathbb{R}_{p+1}[X]$. Considérons alors la co-restriction de Δ à $\mathbb{R}_{p+1}[X]$, notée δ. C'est ***donc un endomorphisme***. Le théorème du rang (qu'on ne peut appliquer dans $\mathbb{R}[X]$ d'oà¹ cette idée) amène $\dim\ \mathrm{Im}\,\delta=p+2-1=p+1$ et comme $\mathrm{Im}\,\delta\subset\mathbb{R}_p[X]$, il vient $\mathrm{Im}\,\delta=\mathbb{R}_p[X]$. Il ***existe donc*** un polynôme Q tel que $\delta(Q)=P$. Ce polynôme étant ***unique à une constante près*** (voir remarque), il est unique si l'on suppose $Q(0)=0$.

Remarque : Un résultat du cours, pas stricto-sensu du cours, mais que tout élève « *ambitieux* » devrait savoir est que si f est une application linéaire de E dans F et que $y\in\ \mathrm{Im}\,f$, cad il existe $x\in E$ tq $y=f(x)$, alors ***tous les autres antécédents*** sont les $x+u$ oà¹ $u\in\ \mathrm{Ker}\,f$. Ce n'est pas très difficile à démontrer, je vous laisse y réfléchir.

Ex 32 Suite des noyaux itérés Soit $f\in\mathcal{L}(E)$. E de dimension finie.

1) Montrez $\mathrm{Ker}\,f\subset\ \mathrm{Ker}\,f^2$, puis $\dim\ \mathrm{Ker}\,f\leq\dim\ \mathrm{Ker}\,f^2\leq 2\dim\ \mathrm{Ker}\,f$.

2) ✌Montrez $\mathrm{Im}\,f^{p+1}\subset\ \mathrm{Im}\,f^p$ et $\mathrm{Ker}\,f^p\subset\ \mathrm{Ker}\,f^{p+1}$, pour p entier naturel.

3) Montrez il existe q entier tels que $\mathrm{Ker}\,f^q=\ \mathrm{Ker}\,f^{q+1}$. En déduire $\mathrm{Im}\,f^{q+1}=\ \mathrm{Im}\,f^q$

Etablir qu'alors, $\forall p\geq q$, $\mathrm{Ker}\,f^p=\ \mathrm{Ker}\,f^{p+1}$. Montrez on peut prendre $q=n$

4) Montrez, pour tout f, $\mathrm{Ker}\,f^n\oplus\ \mathrm{Im}\,f^n=E$

1) $\mathrm{Ker}\,f\subset\ \mathrm{Ker}\,f^2$ résulte de : si $x\in\ \mathrm{Ker}\,f$, $f(x)=0$ puis $f^2(x)=f(f(x))=f(0)=0$, soit $x\in\ \mathrm{Ker}\,f^2$

On a donc $\dim\ \mathrm{Ker}\,f\leq\dim\ \mathrm{Ker}\,f^2$. Pour la 2ᵉ inégalité, difficile, l'idée générale est d'utiliser une application linéaire auxiliaire judicieusement choisie, à laquelle on applique le théorème du rang. Considérons l'application

ϕ définie de $\text{Ker}\, f^2$ dans E qui à x associe $f(x)$ (une sorte de f « *restreint* » à l'ev $\text{Ker}\, f^2$). On applique maintenant le théorème du rang à ϕ; ***Attention!*** Il faut prendre l'ev de départ lorsque ce n'est pas un endomorphisme :

$$\dim\,\text{Ker}\, f^2 = \dim\,\text{Ker}\,\phi + \dim\,\text{Im}\,\phi \overset{(1)}{\hat{=}} \dim\,\text{Ker}\, f + \dim\,\text{Im}\,\phi \overset{(2)}{\tilde{\leq}} \dim\,\text{Ker}\, f + \dim\,\text{Ker}\, f = 2\dim\,\text{Ker}\, f$$

- **(1)** On prouve par $\text{Ker}\,\phi = \text{Ker}\, f$. On peut savoir que, pour une application linéaire u qui « *part* » de l'ev E, si on la restreint en « *partant* » de l'ev F, sous-ev de E, alors son noyau est $F \cap \text{Ker}\, u$; je vous laisse y réfléchir, c'est assez immédiat. Ici, cela amène $\text{Ker}\,\phi = \text{Ker}\, f \cap \text{Ker}\, f^2 = \text{Ker}\, f$, d'après la question précédente.
- **(2)** Par définition, ***ici***, $\text{Im}\,\phi = f(\text{Ker}\, f^2)$ puis $f(\text{Ker}\, f^2) \subset \text{Ker}\, f$: en effet :

$$x \in f(\text{Ker}\, f^2) \implies x = f(y) \text{ avec } y \in \text{Ker}\, f^2 \text{ soit } f^2(y) = 0 \implies f(x) = f^2(y) = 0$$

On en tire $\dim\,\text{Im}\,\phi \leq \dim\,\text{Ker}\, f$.

2) $\boxed{\text{Im}\, f^{p+1} \subset \text{Im}\, f^p}$

Soit $x \in \text{Im}\, f^{p+1}$, donc $x = f^{p+1}(y)$ (avec $y \in E$), donc $x = f^p(f(x))$, soit $x \in \text{Im}\, f^p$.

$\boxed{\text{Ker}\, f^p \subset \text{Ker}\, f^{p+1}}$

Soit $x \in \text{Ker}\, f^p$, donc $f^p(x) = 0$ puis $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0$, soit $x \in \text{Ker}\, f^{p+1}$

3) On a la « *suite* » suivante :

$$\{0\} = \text{Ker Id} = \text{Ker}\, f^0 \subset \text{Ker}\, f \subset \text{Ker}\, f^2 \subset \text{Ker}\, f^3 \subset \cdots \subset \text{Ker}\, f^k \subset \text{Ker}\, f^{k+1} \subset \ldots$$

Il faut déjà comprendre que cette suite de noyaux ne peut-être « *indéfiniment croissante* » pour des raisons de dimension finie. Après il est mieux de le démontrer « *proprement* ». Voilà une méthode : considérons la suite $(\dim\,\text{Ker}\, f^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Elle est donc ***croissante***. Elle est aussi ***majorée*** par la dimension de l'ev , ici n. Elle converge donc. ***Mais*** c'est une suite d'entiers, elle est alors nécessairement ***stationnaire*** à partir d'un certain rang. C'est un exo que vous avez certainement traité en Sup, je ne le refais pas ici. J'espère que vous comprenez ce résultat. Pour terminer, donc, à partir d'un certain rang (on le note q), $\dim\,\text{Ker}\, f^q = \dim\,\text{Ker}\, f^{q+1}$. Par l'inclusion, on a donc l'égalité des noyaux : $\text{Ker}\, f^q = \text{Ker}\, f^{q+1}$.

Pour passer à l'image, on utilise le théorème du rang, deux fois :

$$\dim E = \dim\,\text{Ker}\, f^q + \dim\,\text{Im}\, f^q$$

$$\dim E = \dim\,\text{Ker}\, f^{q+1} + \dim\,\text{Im}\, f^{q+1}$$

De $\dim\,\text{Ker}\, f^q = \dim\,\text{Ker}\, f^{q+1}$, il suit $\dim\,\text{Im}\, f^q = \dim\,\text{Im}\, f^{q+1}$ et, de même, par l'inclusion $\text{Im}\, f^{q+1} \subset \text{Im}\, f^q$, on obtient l'égalité des 2 sous-evs.

A priori, après q, il se pourrait qu'il n'y ait pas égalité (donc inclusion stricte). Le raisonnement sur la suite fait comprendre que non, mais on va le démontrer directement car c'est intéressant. Soit $k > q$. Montrons $\text{Ker}\, f^k =$

$\text{Ker}\, f^{k+1}$. Notons qu'il suffit de démontrer l'inclusion contraire $\text{Ker}\, f^{k+1} \subset \text{Ker}\, f^k$.

$$\begin{aligned}
x \in \text{Ker}\, f^{k+1} &\Longrightarrow f^{k+1}(x) = 0 \text{ puis } f^{k+1}(x) = f^{q+1}(f^{k-q}(x)) = 0 \\
&\Longrightarrow f^{k-q}(x) \in \text{Ker}\, f^{q+1} = \text{Ker}\, f^q \text{ d'où } f^q(f^{k-q}(x)) = f^k(x) = 0 \\
&\Longrightarrow x \in \text{Ker}\, f^k
\end{aligned}$$

Si on reprend la suite d'entiers $u_k = \dim \text{Ker}\, f^k$ elle est strictement croissante jusqu'au moment où elle est stationnaire. Je ne vais pas tout démontrer : tant qu'elle croit strictement, comme ce sont des entiers, on a nécessairement $\dim \text{Ker}\, f^k \geq k$ (on peut faire une récurrence pour une démo « *propre* »). A un moment, on atteint la dimension de l'ev qui est n. Je vous laisse réfléchir au fait que ceci arrive nécessairement ***avant*** n, soit $q \leq n$. Par suite on a nécessairement $\text{Ker}\, f^n = \text{Ker}\, f^{n+1}$. on peut donc « *prendre* » $q = n$ (ce n'est pas très bien dit d'ailleurs).

4) $\text{Ker}\, f^n \oplus \text{Im}\, f^n = E$ vient de :

- $\dim \text{Ker}\, f^n + \dim \text{Im}\, f^n = \dim E = n$, théorème du rang appliqué à f^n.
- $\text{Ker}\, f^n \cap \text{Im}\, f^n = \{0\}$

  Si on avait $x \neq 0 \in \text{Ker}\, f^n \cap \text{Im}\, f^n$, on aurait $f^n(x) = 0$ et $x = f^n(y) \neq 0$. Il viendrait $f^{2n}(y) = 0$, puis $y \in \text{Ker}\, f^{2n}$ ***mais*** $y \notin \text{Ker}\, f^n$. ***Or*** $\text{Ker}\, f^n = \text{Ker}\, f^{2n}$. ***Absurde!***

Remarque : Pour une application f linéaire quelconque, on n'a pas toujours $\text{Ker}\, f \oplus \text{Im}\, f = E$, ni même $\text{Ker}\, f^2 \oplus \text{Im}\, f^2 = E$, mais on a ***toujours*** $\text{Ker}\, f^n \oplus \text{Im}\, f^n = E$ (pour le n égal à la dimension de l'ev). Curieux, non? Essayez de comprendre pourquoi, pour un endomorphisme nilpotent, c'est assez évident…

Ex 36 Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $M = (a^{i-j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in M_n(\mathbb{R})$.

1) Montrez M de rang 1.

2) Calculez et reconnaître M^2.

1) il faut prouver que toutes les lignes (ou colonnes) sont colinéaires. On en écrit une ligne en extension, en faisant bouger le j et on écrit au moins 4 termes! En fait il faut trouver $L_i = \lambda_i U$ avec U vecteur ***constant*** :

$$L_i = (a^{i-1}, a^{i-2}, \ldots, a^{i-n+1}, a^{i-n}) = a^i \; (a^{-1}, a^{-2}, \ldots, a^{-(n-1)}, a^{-n})$$

Toutes les lignes sont colinéaires au vecteur (on « *enlève* » les puissances négatives, c'est mieux car c'est des fractions) $(a^{n-1}, a^{n-2}, \ldots, a, 1)$.

2) Ici, la seule façon d'effecteur le produit correctement est d'utiliser la formule-produit : pour tous $1 \leq i, j \leq n$,

$$[M^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik} M_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a^{i-k} a^{k-j} = \sum_{k=1}^{n} a^{i-j} = n\, a^{i-j}$$

Il faut reconnaître la matrice A, nA en fait, soit $A^2 = nA$.

Remarque : En fait, ***toute matrice de rang 1*** vérifie $A^2 = \text{tr}(A)\, A$. Un élève « *ambitieux* » devrait retenir ce résultat. Vérifiez-le ici : n est bien la trace de A.

Ex 37

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tq $\text{Im}\, B = \text{Ker}\, A$, $\text{Ker}\, B = \text{Im}\, A$ et $\text{tr}\, B = \text{tr}\, A$.

Il faut commencer par calculer $\text{Ker}\, A$ et $\text{Im}\, A$. On fait un petit det : $\det A = 28 + 54 + 50 - 60 - 42 - 30 = 0$. Le rang vaut 0 ou 1 ou 2. Comme ce n'est visiblement ni 0 ni 1 (C_2 n'est pas colinéaire à C_1), c'est 2. L'image est un plan et le noyau est une droite.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \in \text{Ker}\, A \iff \begin{cases} x + 3y + 5z &= 0 \\ 2x + 4y + 6z &= 0 \\ 3x + 5y + 7z &= 0 \end{cases}$$

On peut échelonner, appliquer la méthode du pivot de Gauss, ..., mais cela va plus vite en procédant comme suit : on remarque $L_3 = L_1 + L_2$, donc ligne 3 « *inutile* ». On écrit alors tout (cad les 3 variables x, y, z) en fonction de z :

$$x \in \text{Ker}\, A \iff \begin{cases} x + 3y + 5z &= 0 \\ 2x + 4y + 6z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= z \\ y &= -2z \\ z &= z \end{cases} \qquad \text{Ker}\, A = \text{Vect}\,(1, -2, 1)$$

Pour l'image on écrit $\text{Im}\, A = \text{Vect}\,(C_1, C_2, C_3)$ (c'est du cours). Evidemment cette famille n'est pas libre car de rang 2. Il faut « *enlever* » une colonne inutile du point de vue des combinaisons linéaires. On remarque ***ou***, je vous ai expliqué l'astuce qui marche à tous « *les coups* », on prend la combinaison linéaire « *issue* » du noyau : $1C_1 - 2C_2 + 1C_3 = 0$! Par conséquent, on a aussi $\text{Im}\, A = \text{Vect}\,(C_1, C_2)$ mais ici la famille est libre (et génératrice) c'est donc une base, vous avez terminé la question.

Comme $\text{Im}\, B = \text{Vect}\,(C_1, C_2, C_3)$, $\text{Im}\, B = \text{Ker}\, A = \text{Vect}\,(1, -2, 1)$ ***ssi*** les 3 colonnes sont colinéaires à ce vecteur ***ssi*** B est de la forme $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ -2a & -2b & -2c \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

Ensuite ***ce*** B vérifie $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}((1,2,3),(3,4,5))$. Pour ce calcul il est préférable de mettre ce plan sous forme d'équation. Il y a 2 méthodes :

Méthode 1 Vous utilisez que les 3 vecteurs sont liés : (x,y,z) et $(1,2,3),(3,4,5)$ par un petit det=0 :

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 2 & 4 \\ z & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10x+4z+9y-6z-5y-12x = -2x-2z+4y = 0 \quad \Longrightarrow \quad x-2y+z=0\,(P)$$

Méthode 2 Vous utilisez que le plan recherché est orthogonal, à l'orthogonal des 2vecteurs, cad orthogonal à leur produit vectoriel. C'est plus compliqué à comprendre mais cela va un peu plus vite :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ colinéaire à } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = w \perp P \quad \Longrightarrow \quad 1x-2y+1z=0\,(P)$$

En revenant à l'exo, ***ce*** B vérifie $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Im} A : x-2y+z=0$ ssi $a-2b+c=0 \iff a=2b-c$:

$$\begin{pmatrix} 2b-c & b & c \\ -4b+2c & -2b & -2c \\ 2b-c & b & c \end{pmatrix}$$

On termine avec la condition sur la trace s'écrit $\operatorname{tr} B = (2b-c)-2b+c = 0 = \operatorname{tr} A = 12$. ***Impossible*** !

CCP PC 2016 (polynôme annulateur matrice nxn)

Ex 37 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3+A^2+A+I_n=0$.

1) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

2) ~~Montrer que $\operatorname{tr}(A) \leqslant 0$~~

1) On écrit l'égalité sous la forme $A(-A^2-A-I) = I = (-A^2-A-I)A$ ce qui prouve A inversible et $A^{-1} = -A^2-A-I$.

2) Cette question est pour les 5/2 puisqu'elle se sert du cours de Spé mais je vous la traite pour lorsque / si vous relisez l'exo en fin d'année.

$Q(X) = X^3+X^2+X+1 = (X+1)(X^2+1) = (X+1)(X+i)(X-i)$ est un polynôme annulateur de A. Comme il est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, on en déduit A diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Ensuite on a aussi $\operatorname{Sp} A \subset \{-1, i, -i\}$. Notons μ, ν les multiplicités respectives de -1 et i. Celle de $-i$ est ***la même*** que celle de i puisque la matrice est ***réelle***. On utilise la convention usuelle : la multiplicité de la racine (ou de la valeur propre) est considérée nulle si le nombre n'est pas racine (par définition, stricto-sensu, une multiplicité ne peut être nulle). Comme la trace d'une matrice est la somme de toutes les valeurs propres, en raisonnant dans $\mathbb{C}$ et en les comptant avec la multiplicité, il suit :

$$\operatorname{tr}(A) = \mu(-1)+\nu(i)+\nu(-i) = -\mu \leq 0 \quad \textbf{car } \mu \textbf{ entier naturel}$$

Ex 41 On considère l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui envoie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$. Ecrire sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Attention! , il y a un (petit) piège, je vous rappelle qu'il y a 2 bases canoniques dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: les 1 dans l'ordre des lignes ou les 1 dans l'ordre des colonnes, et l'énoncé ne précise pas laquelle.

$$\mathcal{E} = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \Big) \qquad \mathcal{F} = \Big(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{21}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{12}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_{22}} \Big)$$

On prend $\mathcal{E}$. Pour calculer la matrice de f dans cette base :

- ***On calcule d'abord*** l'image de chaque vecteur de la base :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right.$$

- ***On calcule / écrit*** les ***coordonnées*** de chaque image dans cette base et on les dispose en colonnes (dans le bon ordre!) :

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0E_{11} + 1E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0E_{11} + 0E_{12} + 1E_{21} + 0E_{22}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 1E_{22} \qquad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

Il n'a plus qu'à écrire la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le lecteur pourra vérifier que dans la base $\mathcal{F}$ c'est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex 42 Montrez une matrice M est de rang 1 ssi il existe 2 matrices colonnes $X, Y \neq 0$ tels que $M = XY^{\mathrm{T}}$.

Attention! à la différence entre $X^{\mathrm{T}}Y$ et XY^{T}, pour $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Déjà $X^{\mathrm{T}}Y \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $XY^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

La 1re forme $X^{\mathrm{T}}Y = (X|Y)_{can}$ est le produit scalaire canonique ***sur*** $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et c'est du cours, et d'ailleurs $X^{\mathrm{T}}Y = Y^{\mathrm{T}}X$ (on révisera les produits scalaires et l'orthogonalité dans les evs euclidiens en janvier/février).

La 2e forme $XY^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice où toutes les colonnes sont colinéaires à X, $C_i = y_i X$. Ici, $XY^{\mathrm{T}} \neq YX^{\mathrm{T}}$ ***mais*** $(XY^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = YX^{\mathrm{T}}$; ce n'est pas du cours, mais « *tombe* » fréquemment aux concours, d'où cet exo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & \dots & \dots & x_n \end{pmatrix}}_{X^{\mathrm{T}}} & \underbrace{\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix}}_{X^{\mathrm{T}}Y} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} & \underbrace{\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{pmatrix}}_{XY^{\mathrm{T}}} \end{array}$$

On a donc $\operatorname{rg} XY^{\mathrm{T}} = 1$ car toutes les colonnes sont colinéaires à X ***et aussi*** $X \neq 0$, sauf dans les 2 cas $X = 0$ ou $Y = 0$, où $M = XY^{\mathrm{T}} = 0$ et le rang est 0.

Il reste à démontrer la réciproque : si M est de rang 1, elle peut s'écrire sous la forme XY^{T}. Il suffit de regarder plus haut XY^{T} pour comprendre. Si M est de rang 1, toutes les colonnes sont colinéaires à un vecteur non nul que l'on notera Y, $C_j = a_j Y$. Notons alors $X = (a_1 \quad a_n)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a clairement $M = XY^{\mathrm{T}}$. les a_i sont non tous nuls sinon la matrice M serait nulle et de rang 0.

Remarque : Je rappelle, ce n'était pas demandé, que le noyau est alors un hyperplan par le théorème du rang. C'est le sev de $\mathbb{R}^n$ défini par l'équation : $y_1X_1 + \dots y_2X_2 + \dots + y_nX_n = 0$ (les variables sont $X_1, \dots, X_n$, on ne peut utiliser les usuels $x_1, \dots, x_n$ qui sont déjà utilisés)

Ex 43 Montrez que l'inverse d'une matrice symétrique (inversible!) est aussi symétrique. et que l'inverse d'une matrice triangulaire (inversible!) est aussi triangulaire.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, soit $S^{\mathrm{T}} = S$. On en déduit $(S^{\mathrm{T}})^{-1} = S^{-1}$. Puis comme $S \times S^{-1} = I_n$ amène $S^{\mathrm{T}} \times (S^{-1})^{\mathrm{T}} = I^{\mathrm{T}}{}_n = I_n$, on en déduit $(S^{-1})^{\mathrm{T}} = (S^{\mathrm{T}})^{-1}$, d'où finalement $(S^{-1})^{\mathrm{T}} = S^{-1}$, soit $S^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Mines-Ponts PSI 2013 (inverse d'une matrice par blocs) ☜ ✷

Ex 47 Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}$.

Trouvez une condition nécessaire et suffisante sur B pour que A soit inversible. Explicitez alors l'inverse de A.

Juste une info au passage, hors programme, mais bien utile ici, est de savoir que ***si*** les matrices A, B, C, D commutent 2 à 2 $\det\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(AD - CB)$ ***Attention!*** ce sont des blocs. ***Ici*** cela donne $\det(A) = \det(I^2 - B^2)$ ce qui permet de comprendre (et trouver!) que la CNS est $I - B^2$ inversible. Vous voyez que savoir un peu plus que le programme aide! On a trouvé la condition! On démontre alors ***proprement***, par le programme, condition nécessaire et condition suffisante.

Une autre méthode serait aussi de regarder le noyau, en prenant soin de chercher le vecteur X sous forme de bloc lui-aussi $X = \left(\begin{smallmatrix} Y \\ Z \end{smallmatrix}\right)$. Le noyau est alors obtenu en considérant les matrices $Y, Z \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y+BZ \\ BY+Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} Y+BZ &= 0 \\ BY+Z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} Y &= -BZ \\ Z &= B^2 Z \end{cases} \iff \begin{cases} Y &= -BZ \\ (I-B^2)Z &= 0 \end{cases}$$

Si $I - B^2$ n'est pas inversible, il existe $Z \neq 0$ tq $(I - B^2)Z = 0$ et par suite $X \neq 0$ tel que $AX = 0$. Si vous avez suivi, on vient de démontrer que $I - B^2$ inversible est une ***condition nécessaire***.

Pour prouver que c'est une ***condition suffisante*** et vu la question qui demande d'expliciter l'inverse, on essaye de trouver, au brouillon une matrice par 4 blocs C telle que $AC = I_{2n} = \left(\begin{smallmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{smallmatrix}\right)$. Je ne mets pas les détails (de la « *recherche expérimentale* »), on peut procéder par analyse-synthèse. Je ne présente que la synthèse en fait (on peut). Il est astucieux d'introduire la matrice auxiliaire D tel que $D(I - B^2) = I = (I - B^2)D$ qui s'écrit $D - DB^2 = I = D - B^2D$. Evidemment $D = (I - B^2)^{-1}$. On trouve :

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & -BD \\ -BD & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ID - B^2D & -BD + BD \\ BD - BD & -B^2D + ID \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} (I-B^2)^{-1} & -B(I-B^2)^{-1} \\ -B(I-B^2)^{-1} & (I-B^2)^{-1} \end{pmatrix}$$

Si vous avez bien lu, la matrice $\left(\begin{smallmatrix} D & -BD \\ -BD & D \end{smallmatrix}\right)$ a été trouvée par analyse / bidouille au brouillon. On ne peut pas vraiment procéder autrement !

Centrale PSI 2022 (endomorphisme de polynômes) ✷

Ex 49

1) Soit $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow P' \in \mathbb{R}_n[X]$. Exhibez une base dans laquelle la matrice de u n'a que des coefficients égaux à 0 ou 1.

2) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrez il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $P - P' = Q$. Montrez que si Q est à valeurs ≥ 0, il e nest de même pour P.

1) Si une telle base $(Q_0, \ldots, Q_n)$ existe, le plus simple est d'abord d'essayer un seul 1. La j-ième colonne donnerait $Q'_j = 1Q_j$? ce n'est pas possible (un polynôme ne vérifie pas cela, intégrez l'équation différentielle !). Alors $Q'_j = 1Q_{j-1}$? Cela donnerait $Q''_j = Q_{j-2}$, donc une base du genre $(Q^{(n)}, Q^{(n-1)}, \ldots, Q', Q)$. $Q = X^n$ semble convenir, cela amène la base $(n!, n(n-1) \times 2X, n(n-1) \times 3X^2, \ldots, nX^{n-1}, X^n)$. Il est plus « *classique* » de prendre $Q_n = \frac{1}{n!}X^n$, puisque $Q'_n = Q_{n-1}$ immédiatement. La matrice est triangulaire stricte, avec que des 0 et uniquement des 1 sur la sur-diagonale, donc nilpotente, ce qui est clair puisque $u^{n+1} = 0$, $n+1$-dérivation d'un polynôme de degré $\leq n$.

2) Considérons $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow P - P'$. Il est immédiat que c'est un endomorphisme. Son noyau est nul puisque la résolution de l'équation différentielle $y - y' = 0$ amène à des exponentielles. C'est donc un automorphisme, une bijection, puisqu'on est en dimension finie. Par suite, pour tout $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, il ***existe un unique*** P tel que $\phi(P) = Q$. C'est d'ailleurs $\phi^{-1}(Q)$.

On essaye d'expliciter ϕ^{-1}. $P - P' = Q$ puis $P' - P'' = Q'$ puis on dérive jusqu'à $P^{(n)} - P^{(n+1)} = Q^{(n)}$, et en sommant ces égalités, $P - P^{(n+1)} = P = \sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$. On en tire $\phi^{-1} : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$. Il y a une autre expression, moins « *polynomiale* », mais plus pratique « *analytiquement* ». En effet, l'équation différentielle $y-y'=Q(x)$ s'intègre en $y=Ce^x-e^x\int_0^x e^{-t}Q(t)\,dt$ (je ne vous mets pas les détails). Il faut regarder quel C « *donne* » un polynôme. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}Q(t)\,dt$ convergeant (les 3/2, il faut attendre un cours prochain, pour comprendre ce mot mais ce n'est pas essentiel pour la compréhension générale), on écrit alors plutôt la solution générale sous la forme $y=De^t+e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}Q(t)\,dt$. Ici,on « *voit bien* » que $e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}Q(t)\,dt$ est un polynôme et, par suite $D=0$ (et donc C valait ?). Finalement, 2e expression de $\phi^{-1}: P\in\mathbb{R}_n[X]\longrightarrow e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}P(t)\,dt$.

On doit démontrer si $Q\geq 0$, alors $P=\phi^{-1}(Q)=\sum_{k=0}^n Q^{(k)}=Q+Q'+Q''+\cdots+Q^{(n)}=e^x\int_x^{+\infty} e^{-t}Q(t)\,dt\geq 0$. La forme intégrale le donne immédiatement.

Remarque : Si un polynôme P a des valeurs positives sur tout $\mathbb{R}$, ses racines réelles sont de multiplicité paire (sinon $P(X)=(X-a)^{2p+1}Q(X)$, avec $Q(a)\neq 0$, change de signe localement autour de a). Notons aussi que si une racine ω est (vraie) complexe (donc 2 à 2 conjuguées), alors on peut écrire $(X-\omega)(X-\overline{\omega})=(X-\Re\omega)^2+(|\omega|^2-(\Re\omega)^2)$ avec, je vous rappelle, $|\Re\omega|\leq|\omega|$. Il existe un théorème qui affirme d'ailleurs que si un polynôme P a des valeurs positives sur tout $\mathbb{R}$, alors il s'écrit nécessairement sous la forme $P(X)=A(X)^2+B(X)^2$ avec $A(X),B(X)$ polynômes.

Ex 52 Soit f un endomorphisme de rang 1.

1) Montrez $f^2=\text{tr}(f)\,f$.

2) Trouvez α pour que l'endomorphisme αf soit un projecteur. Donnez alors les éléments caractéristiques

1) Pour calculer ou utiliser la trace (et le déterminant) d'un endomorphisme, à votre programme, il n'y a guère d'autre méthode que d'utiliser une matrice de f. N'oubliez pas le « *réflexe* » : quelle judicieuse base choisir ? Ici, le noyau est un hyperplan : on prend donc une base $(e_1,\dots,e_{n-1})$ du $\operatorname{Ker} f$ que l'on ***complète*** en une base $\mathcal{E}=(e_1,\dots,e_n)$ de E (c'est une ellipse qui signifie utiliser le théorème de la base incomplète). On a :

$$M=\text{Mat}(f,\mathcal{E})=\begin{pmatrix}0&\dots&0&a_1\\ \vdots&&\vdots&a_2\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&\dots&0&a_n\end{pmatrix}$$

La dernière colonne vient de $f(a_n)=\sum_{i=1}^n a_ie_i$ (vecteur quelconque) et la nullité des $n-1$ premières colonnes de $f(e_i)=0$ pour $1\leq i\leq n-1$. On constate $\operatorname{tr} f = a_n$. On effectue alors le calcul de f^2 par celui de M^2 :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \\ M^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1a_n \\ \vdots & & \vdots & a_2a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_na_n \end{pmatrix} = a_n \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} = a_n\, M = \operatorname{tr}(f)\, M \end{array}$$

2) αf est un projecteur ssi $(\alpha f)^2 = \alpha^2 f^2 = \alpha^2 \operatorname{tr} f\, f = \alpha f$ ssi $\alpha^2 \operatorname{tr} f = \alpha$ (***car*** f n'est pas l'application nulle car de rang 1) ssi $\alpha = 0$ ou $\alpha = \frac{1}{\operatorname{tr} f}$.

Dans le cas $\alpha = 0$, l'application nulle, c'est la projection sur $\{0\}$ parallèlement à l'ev tout entier E et dans l'autre cas, c'est la projection sur la droite $\operatorname{Im} f$ (qui est d'ailleurs $\operatorname{Vect}(e_n)$ je vous laisse y réfléchir) parallèlement à l'hyperplan $\operatorname{Ker} f$. On ne peut rien « *calculer* » de plus.

Ex 55 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et ϕ une forme linéaire sur E. On définit $f(x) = \phi(x)u$ où u est un vecteur de E. C.N.S. pour que f soit un projecteur ? Précisez ses éléments caractéristiques

f est un projecteur ssi $f^2 = f$ (***Attention !*** ce n'est pas un carré !). On calcule :

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(\underbrace{\phi(x)}_{\text{scalaire}}\ u) = \phi(x)\, f(u) = \phi(x)\phi(u)u$$

Si $u \neq 0$, f est donc un projecteur ssi $\phi(x)\phi(u) = \phi(x)$, ***pour tout*** x. ***Si*** ϕ n'est pas la forme linéaire nulle, il existe des x tels que $\phi(x) \neq 0$ et donc ceci équivaut à $\boxed{\phi(u) = 1}$.

On cherche alors les éléments caractéristiques : le « *sur quoi on projette* » est $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - f)$ et le « *parallèlement à quoi on projette* » est $\operatorname{Ker} f$. on a immédiatement $f(x) = 0 \iff \phi(x) = 0$, donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} \phi$ est un hyperplan. $\operatorname{Im} f$ est alors une droite par le théorème du rang. je vous laisse réfléchir au fait que ce ne peut alors être que $\operatorname{Vect}(u)$. f est donc la projection sur la droite $\operatorname{Vect}(u)$ parallèlement à l'hyperplan $\operatorname{Ker} \phi$.

Remarque : Si $u = 0$ ou $\phi = 0$ f est l'application nulle. C'est bien une projection mais sans intérêt : la projection sur $\{0\}$ parallèlement à l'ev tout entier E

Ex 56 Soit $M=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ \frac{1}{2} & 1 & 3\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$ montrez matrice de projection. Donnez ses éléments caractéristiques.

C'est une (matrice de) projection car on calcule :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ \frac{1}{2} & 1 & 3\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$M^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ \frac{1}{2} & 1 & 3\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}^2=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ \frac{1}{2} & 1 & 3\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3 & 6 & 18\\ \frac{2}{3} & 3 & 9\\ \frac{1}{2} & 1 & 3\end{pmatrix}=M$$

On cherche alors les éléments caractéristiques : le « *sur quoi on projette* » est $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Ker}(\operatorname{Id}-f)$ et le « *parallèlement à quoi on projette* » est $\operatorname{Ker} f$. On peut remarquer que les 3 colonnes sont colinéaires donc $\operatorname{rg} M=1$, soit l'image est une droite et le noyau est un plan. la droite est dirigée par exemple par C_3 (c'est mieux sans fraction), soit $(6,3,1)$. POur le noyau, il ***n'y a rien à résoudre*** car les 3 lignes sont colinéaires! (rang 1) C'est donc le plan d'équation $x+2y+6z=0$. On peut donner une base : par exemple $((2,-1,0),(-6,0,1))$

Ex 57 Soit p un projecteur. Etablir $\operatorname{rg} p=\operatorname{tr} p$.

Si p est une projection de E, on sait $\operatorname{Ker} p\oplus\operatorname{Im} p=E$, et $\operatorname{Im} p=\operatorname{Ker}(p-Id)$ (l'espace propre associé à 1 ou l'ev des vecteurs invariants). En prenant une base ***adaptée*** à p, cad une base $(e_1,\dots,e_m)$ de $\operatorname{Ker} p$ complétée par une base de $\operatorname{Im} p$: $(e_1,\dots,e_n)$: c'est donc une base de E et de plus $m=\dim\operatorname{Ker} p$ donc, par le théorème du rang, $\operatorname{rg} p=\dim E-\dim\operatorname{Ker} p=n-m$ On a $u(e_1)=\cdots=u(e_m)=0$, et pour $m+1\le i\le n$, $u(e_i)=e_i$. Il vient que la matrice de p dans cette base est :

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc}0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0\\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}0_m & 0_{m,n-m}\\ 0_{n-m,m} & I_{n-m}\end{pmatrix}$$

Les 2 blocs sur la diagonale sont carrés mais pas les 2 autres. Il est usuel de mettre la taille en indice dans les blocs 0 et I (mais pas toujours). On constate immédiatement $\operatorname{tr} p=n-m=\operatorname{rg} p$

Mines-Ponts PSI 2022 | CCP PSI 2011 (projecteur combinaison linéaire) ✷

Ex 56 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p, q, r 3 projecteurs.

1) Soit f un projecteur de E. Montrez $\operatorname{tr} f$ est un entier.

2) On suppose $p+\sqrt{2}q+\sqrt{3}r$ projecteur. Montrez $q=r=0$. .

1) Pour un projecteur p, $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$. La démo est faite dans un exo un peu plus haut, je ne la reproduis pas ici. Un élève « *ambitieux* » peut considérer que câ€™est du cours. La trace d'un projecteur est donc un entier (c'est la dimension de l'image, cad du sev sur lequel on projette)

2) Une fois écrit $\operatorname{tr}(p+\sqrt{2}q+\sqrt{3}r) = \operatorname{tr} p+\sqrt{2}\operatorname{tr} q+\sqrt{3}\operatorname{tr} r$, on est ramené à démontrer de l'arithmétique, cad que sachant p', q', r' entiers positifs, $p'+q'\sqrt{2}+r'\sqrt{3}$ n'est un entier ***que si*** $q'=r'=0$. Ceci se comprend bien par lâ€™irrationalité de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Mais il faut le démontrer proprement. C'est un peu limite programme de PSI.

Je redémontre rapidement $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$. C'est analogue pour $\sqrt{3}, \sqrt{6}$. Par l'absurde : ***si*** $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ avec $p\wedge q=1$, premiers entre eux, (on écrit toujours comme cela un rationnel théoriquement sinon l'écriture n'est pas unique, il en suivrait de probables erreurs de raisonnement). Au carré $2q^2=p^2$, donc $2\,|\,p^2$, donc $2\,|\,p$ (2 est premier) donc $4\,|\,p^2$ donc $2\,|\,q^2$ donc $2\,|\,q$ donc p et q ne sont pas premiers entre eux. ***Absurde!*** (tous ces donc sont de l'arithmétique assez immédiate, je ne les détaille pas, cela vient du fait que 2 est un nombre premier.

Terminons la preuve. ***Si*** $q', r'\neq 0$, comme $p'+q'\sqrt{2}+r'\sqrt{3}$ entier, $q'\sqrt{2}+r'\sqrt{3}$ est entier puis aussi le carré $(p'+q'\sqrt{2}+r'\sqrt{3})^2 = p'^2+2q'^2+3r'^2+2p'(q'\sqrt{2}+r'\sqrt{})+2q'r'\sqrt{6} = n'+q'r'\sqrt{6}$ donc $\sqrt{6}$ est un rationnel. ***Absurde***

CCINP PSI 2024[2] -2022-2019 (égalité donnant des projecteurs)

Ex 60 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E vérifiant $p+q=\operatorname{Id}$ et $\operatorname{rg}(p)+\operatorname{rg}(q)\leq \dim E$.

1) Montrez $E=\operatorname{Im} p\oplus \operatorname{Im} q$ [**2019 :** Question absente] .

2) Montrez p et q sont des projecteurs.

1) Usuellement, pour démontrer $F\oplus G=E$, le plus simple est d'utiliser $\dim F+\dim G=\dim E$ et $F\cap G=\{0\}$ (sauf en dimension infinie). Néanmoins ici, vu les hypothèses, il est plus simple de démontrer $\dim F+\dim G = \dim E$ et $F+G=E$

- $\operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q=E$. En effet, l'analyse-synthèse est ici inutile si on a compris que l'hypothèse $\operatorname{Id}=p+q$ amène $x=p(x)+q(x)$, avec $p(x)\in\operatorname{Im} p$ et $q(x)\in\operatorname{Im} q$, ce qui amène $E\subset\operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q$. L'inclusion réciproque est immédiate (« *tout* » est dans E...)
- $\dim\operatorname{Im} p+\dim\operatorname{Im} q=\operatorname{rg} p+\operatorname{rg} q\leq\dim E$ par hypothèse. Or l'item précédent donne $\dim E=\dim(\operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q)$ puis la formule du cours $\dim(\operatorname{Im} p+\operatorname{Im} q)=\dim\operatorname{Im} p+\dim\operatorname{Im} q-\dim(\operatorname{Im} p\cap\operatorname{Im} q)$ ce qui amène $\dim\operatorname{Im} p+\dim\operatorname{Im} q=\dim E+\dim(\operatorname{Im} p\cap\operatorname{Im} q)\geq\dim E$. D'où finalement l'égalité voulue par la double inégalité.

2) En composant à droite et à gauche par p et par q l'expression $p+q=\operatorname{Id}$, il vient $p^2+p\circ q=p^2+q\circ p=p$ et $q^2+p\circ q=q^2+q\circ p=q$. On en déduit $p\circ q=q\circ p$. Il faut ensuite remarquer que le vecteur $x=(p\circ q)(y)=$

$(q\circ p)(y) \in \operatorname{Im} p$ ***et*** $x \in \operatorname{Im} q$, donc $x \in \operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q = \{0\}$, d'après la question précédente. Il vient $x = 0$.

Cette démo étant réalisée pour tout y, $p\circ q = q\circ p = 0$. Puis, en réinjectant dans les 2 équations du début, $p^2 = p$ et $q^2 = q$. p et q sont bien des projecteurs.

Remarque : p est le projecteur sur $\operatorname{Im} p\ (= \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p) = E(1))$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$ (comme tout projecteur, cours!). On sait alors que $q = \mathrm{Id} - p$ est le projecteur associé ou inverse, cad le projecteur sur $\operatorname{Ker} p$ parallèlement à $\operatorname{Im} p$. On a donc $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q$. Vous avez suivi?

On a donc ici $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Ker} q = E$.

Mines-Ponts PSI 2015 | Mines-Ponts PC 2012 (nilpotent d'indice 2)

Ex 61 Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Donnez une cns pour qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = p\circ u - u\circ p$.

On procède par Analyse-Synthèse

Analyse Il existe un projecteur p tq $u = p\circ u - u\circ p$. On passe à la trace, qui nous amène $\operatorname{tr} u = 0$ ($\operatorname{tr}(u\circ p) = \operatorname{tr}(p\circ u)$). Mais ceci n'utilise pas vraiment projecteur, donc il faut continuer à analyser. On compose par p à gauche et à droite, en se rappelant $p^2 = p$:

$$p\circ u = p^2\circ u - p\circ u\circ p = p\circ u - p\circ u\circ p \quad\Longrightarrow\quad p\circ u\circ p = 0$$

A droite, on arrive à $2u\circ p = p\circ u\circ p$ donc $u\circ p = 0$ puis, en réinjectant, $u = p\circ u$.

On analyse en termes d'image et noyau. On tire, de ces 2 égalités, $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$, soit $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ qui amène à $u^2 = 0$. Condition nécessaire. Est-elle suffisante? Oui ...

Réciproque Soit u un endomorphisme tq $u^2 = 0$. On a alors $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Il faut construire un projecteur qui, à minima, doit vérifier $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} u$. On prend un projecteur sur $\operatorname{Ker} u$ (donc $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} u$), parallèlement à n'importe quel supplémentaire. On a donc $u\circ p = 0$. Montrons $u = p\circ u$ et la preuve sera établie : on a $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} u$, or on sait $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id} - p)$, les vecteurs de $\operatorname{Im} u$ sont donc des vecteurs invariants par p. Ok.

Ex 62 Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u\circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^2$. Montrez que $\operatorname{Im}(u\circ v) = \operatorname{Im} u$ puis que $v\circ u = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Pour 2 applications linéaires f et g, je rappelle qu'on a immédiatement (c'est quasiment du cours) $\operatorname{Im}(f\circ g) \subset \operatorname{Im} f$ et (à l'envers, vous constaterez), $\operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f\circ g)$. Ici, bien faire attention que u et v ne sont pas des endomorphismes. On a néanmoins $\operatorname{Im}(u\circ v) \subset \operatorname{Im} u$ et par hypothèse $\dim \operatorname{Im}(u\circ v) = \operatorname{rg}(u\circ v) = 2$. D'autre part $\operatorname{Im} u = u(\mathbb{R}^2)$, donc $\dim \operatorname{Im} u \le 2$ (je rappelle qu'on a ***toujours*** pour tout sev F de dimension finie, $\dim u(F) \le \dim F$). On a donc nécessairement $\dim \operatorname{Im}(u\circ v) = \dim \operatorname{Im} u = 2$, puis $\operatorname{Im}(u\circ v) = \operatorname{Im} u$.

Notons $P = \operatorname{Im} u \subset \mathbb{R}^3$. Par théorème du rang, comme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $\dim \operatorname{Ker} u = \dim \mathbb{R}^2 - \dim \operatorname{Im} u = 0$ cad u est injective. En restreignant u (à l'arrivée) et en notant $u' : \mathbb{R}^2 \longrightarrow P,\ x \longrightarrow u(x)$, u' est surjective (et injective comme u) donc bijective : u'^{-1} existe. De même $(u \circ v)(\mathbb{R}^3) = u(v(\mathbb{R}^3))$ est de dimension 2. Ceci impose que $v(\mathbb{R}^3)$ est de dimension ≥ 2 donc égale à 2 et égale à $\mathbb{R}^2$, puisque $v(\mathbb{R}^3) \subset \mathbb{R}^2$. En restreignant v (au départ) et en notant $v' : P \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longrightarrow v(x)$ est surjective et $\dim P = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ donc bijective, donc v'^{-1} existe.

On a $u \circ v \circ u \circ v = u \circ v$ ce qui donne, puisque u a pour image P, $u' \circ v' \circ u' \circ v = u' \circ v$ et en restreignant à P, $u' \circ v' \circ u' \circ v' = u' \circ v'$ puis en composant par u'^{-1} à gauche et v'^{-1} à droite, il suit $v' \circ u' = Id_{\mathbb{R}^2} : x \longrightarrow (v \circ u)(x)$. En fait $v \circ u = v' \circ u'$, puisqu'ils ont même ensemble de départ et d'arrivée.

Ex 63 Montrez que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente (non nulle) ssi elle est semblable à $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Rappelons la définition stricte de semblable : M est dite semblable à N ssi il existe une matrice inversible P telle que $M = PNP^{-1}$. Mais, cette formule étant aussi celle de changement de bases, il y a une autre façon de voir qui est souvent plus pratique : M et N représentent le ***même endomorphisme*** dans deux bases ***différentes***. Si nous revenons à l'exo, il faut et il suffit donc de démontrer que pour tout endomorphisme f nilpotent (non nul) de $\mathbb{R}^2$, il existe une base (e_1, e_2) dans laquelle la matrice de f a la forme voulue de l'énoncé. Comme on ne connaît pas du tout cette base, on procède par analyse-synthèse.

Analyse :

S'il existe une base $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, telle que $\text{Mat}(f, \mathcal{E}) = N$, alors, par lecture des colonnes, on a $f(e_1) = 0$ et $f(e_2) = e_1$. Il faut bien analyser ces données ...
On constate $e_1 \in \text{Im} f$ et $e_1 \in \text{Ker} f$, soit $e_1 \in \text{Ker} f \cap \text{Im} f$. Or pour des raisons de petite dimension, on a nécessairement $\dim \text{Ker} f = \dim \text{Im} f = 1$, donc il n'y a pas de « *réel choix* » de e_1, il est unique à α près (voir en dessous pour justification). Un des problèmes de l'analyse est de comprendre quand on a terminé, ce qui signifie quand les conditions nécessaires sont, en fait, suffisantes ... Ici,c'est le cas. On sait comment choisir e_1 et e_2.

Synthèse :

f est nilpotent non nul, donc $\dim \text{Ker} f \neq 2$ et un endomorphisme nilpotent n'est jamais inversible, comme déjà vu, donc $\dim \text{Ker} f \neq 0$. Par suite, $\dim \text{Ker} f = 1$ et, via le théorème du rang, $\dim \text{Im} f = 2 - \dim \text{Ker} f = 1$. Ensuite on l'existence de q tel que $f^q = 0$. Comme vu dans l'exo 54, nécessairement $f^2 = f \circ f = 0$. On en déduit $\text{Im} f \subset \text{Ker} f$ puis, par égalité de dimension $\text{Im} f = \text{Vect} f$. Posons $\text{Im} f = \text{Vect}(u)$. On prend alors $u = e_1$ (comme compris dans l'analyse...) et , comme $e_1 \in \text{Im} f$, on a $e_1 = f(y)$. On prend $e_2 = y$. On a donc à la fois $f(e_1) = 0$ et $f(e_2) = e_1$. La Matrice de f dans cette base a bien la forme voulue. La preuve est achevée. Il reste quand même à bien vérifier que c'est une base de $\mathbb{R}^2$. Par la cardinalité de 2, on démontre juste la liberté : soient α, β tels que :

$$\alpha e_1 + \beta e_2 = 0 \Longrightarrow \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = \beta e_1 = 0 \Longrightarrow \beta = 0$$

Et en réinjectant, $\alpha e_1 = 0$ puis $\alpha = 0$,car $e_1 \neq 0$ (c'est le u qui est une base de Vect(u))

Remarques

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (je vous laisse réfléchir au changement de la base de l'une vers l'autre)
- En dimension 3, c'est un peu plus compliqué, il y a deux cas possibles :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Essayez de trouver le changement de la base de la 1re vers les 4 autres.

Ex 67 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Etablir $I_n - A$ est inversible.

Pour faire cet exo, il faut penser à la formule (dans $\mathbb{R}$!) $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}) = 1-x^p$. Est-elle vraie dans les matrices? (par exemple, ***Attention!*** , les formules $(ab)^2 = a^2b^2$ ou $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$ sont, en général, fausses...). On écrit :

$$(I_n - A)\Big(\sum_{k=0}^{p-1} A^k\Big) = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{k=0}^{p-1} A^{k+1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k - \sum_{k=1}^{p} A^k = A^0 - A^p = I_n - A^p$$

Par suite A est nilpotente donc il existe $q \in \mathbb{N}$ tq $A^q = 0$. On prend $p = q$ plus haut : on a donc $(I_n - A)(\sum_{k=0}^{p-1} A^k) = I_n$. A est donc inversible d'inverse $A^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k = I + A + A^2 + \cdots + A^{p-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{q-1}$

Ex 68 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, cad $\exists q \in \mathbb{N}, f^q = 0$. E de dimension finie n. On appelle indice de nilpotence $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, f^k = 0\}$. Montrez l'existence de p.

1) Montrez qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas inversible.

2) Soit x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrez que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

3) Montrez $p \leq n$ et enfin $f^n = 0$.

4) L'ensemble des endomorphismes nilpotents est-il un ev?

---

1) L'ensemble $A = \{\, k \in \mathbb{N}^*,\ f^k = 0\,\}$ est un ensemble ***d'entiers***, ***minoré*** (par 0 car entiers positifs!) et ***non vide*** car il contient q. Par axiome de $\mathbb{N}$, il existe donc un plus petit élément que l'on ***notera*** p. On a donc $f^p = 0$ ***mais***

aussi $f^{p-1} \neq 0$ par définition de « *plus petit* ». On a aussi, $\forall k \geq p,\ f^k = 0$.

2) ***Méthode 1 (plus simple) :*** puisque $f^q = 0$, en passant au déterminant $\det(f^q) = (\det f)^q = 0$. ***La grande différence*** (avec f) c'est que $\det f$ est un réel! on peut donc en déduire $\det f = 0$ soit f non inversible.

Remarque : Attention! Pour une matrice ou un endomorphisme, on ne peut pas déduire de $A^p = 0$, $A = 0$! Justement, on en « *déduit* » une matrice nilpotente mais ce n'est que du vocabulaire…

Méthode 2 (par l'absurde)

Supposons f inversible donc f^{-1} et f^{-q} existe. On les compose à gauche dans l'équation $f^q = 0$

$$f^{-q} \circ f^q = f^{-q} \circ 0 = 0 \text{ mais } f^{-q} \circ f^q = f^0 = Id$$

D'où $Id = 0$ ***Absurde!***

3) Soit $f \notin \operatorname{Ker} f^{p-1}$, cad $f^{p-1}(x) \neq 0$. Soient $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ des scalaires réels tels que $\alpha_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) = 0$ (1).En ***appliquant*** f^{p-1}, par linéarité il vient :

$$\alpha_0 f^{p-1}(x) + \lambda_1 f^p(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{2p-1}(x) = f^{p-1}(0) = 0$$

Comme $f^k(x) =)0$ pour tout $k \geq p$, il reste $\alpha_0 f^{p-1}(x) = 0$ soit $\alpha_0 = 0$ qu'on réinjecte dans l'équation de départ (1). On applique ensuite f^{p-2}

$$\alpha_1 f^{p-1}(x) + \alpha_2 f^p(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{2p-2}(x) = f^{p-2}(0) = 0$$

On en tire $\alpha_1 f^{p-1}(x) = 0$ puis $\alpha_1 = 0$. En réitérant ce processus encore $p-2$ fois, on aura tous les coefficients nuls, la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est bien libre.

On utilise la question précédente et un théorème du cours qui dit que toute famille libre a un cardinal plus petit que la dimension, le cardinal étant $p - 1 + 1 = 0p$, il suit $p \leq n$.

Remarques

- Ce résultat est ***très important***, un élève « *ambitieux* » peut le retenir (ce n'est pas du programme), la plus petite puissance nulle d'une matrice nilpotente est toujours inférieure à la dimension. Par exemple, ***si vous avez*** $\begin{pmatrix} a & 2a-1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}^7 = 0$, ***vous pouvez en déduire*** $\begin{pmatrix} a & 2a-1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ (je vous laisse y réfléchir)
- En fait, on peut même dire que M est nilpotente ssi $M^n = 0$ (le n de sa dimension)

4) L'ensemble des matrices nilpotentes n'est pas un ev car il n'est ***pas stable par +*** : je vous laisse vérifier avec les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotentes car ***triangulaires strictes***. On peut utiliser le résultat précédent : il suffit de regarder la puissance 2! vous voyez l'intérêt! Un élève « *ambitieux* » a intérêt à retenir ce résultat de Q3. Je vous laisse calculer $(A+B)^2$. Il y a une autre démo qui est que cette matrice $A+B$ est inversible (par un det), donc ne peut pas être nilpotente.

Ex 75 Soit E un ev de dimension $n \geqslant 2$. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et $a \in E$ tels que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(a))$.

2) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f^2 = \lambda f$.

1) f étant de rang 1, son image est une droite. Il faut et il suffit donc de trouver un vecteur (non nul) dans l'image. Par définition $f(a)$ est dans l'image de f. Vérifions qu'il est non nul et la preuve sera terminée. Il faut se servir de l'hypothèse qui nous donne deux sevs supplémentaires et on utilise une démonstration par l'absurde :

Si $f(a) = 0$, $a \in \operatorname{Ker} f$. Or, $a \in \operatorname{Vect}(a)$. Comme la somme est directe, on sait que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Vect}(a) = \{0\}$. Il suit $a = 0$, puis de la somme $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f + \{0\} = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Vect}(a) = E$. Or $\operatorname{Ker} f$ est de dimension $n-1$. ***Absurde.***

2) On utilise une propriété (parmi d'autres) de 2 sevs supplémentaires $F \oplus G = E$: pour prouver que deux applications sont égales (sur E), il faut et il suffit de prouver l'égalité sur F ***et*** sur G.

On a déjà vu l'inclusion immédiate (je ne la redémontre pas ici) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. ***Donc*** f^2, qui s'annule sur $\operatorname{Ker} f^2$, s'annule sur $\operatorname{Ker} f$ (je vous laisse y réfléchir). Evidemment λf s'annule sur $\operatorname{Ker} f$, quel que soit λ d'ailleurs.

Sur $\operatorname{Vect}(a)$, qui est la droite dirigée par a, il suffit, par la linéarité, de « *comparer* » la valeur prise en a par f et f^2. Comment « *comparer* » $f^2(a)$ et $f(a)$? Il faut se rappeler une propriété de l'image, d'ailleurs « *similaire* » à celle du noyau utilisée plus haut, ce qui n'est pas étonnant. On a l'inclusion immédiate (je ne la redémontre pas ici) $\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f$. Par suite $f^2(a) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$: on en ***déduit*** l'existence d'un scalaire (noté λ tel que $f^2(a) = \lambda f(a)$.

Ce λ étant fixé, on a bien démontré l'égalité de f^2 et de λf sur $\operatorname{Ker} f$ et sur $\operatorname{Vect}(a)$.

Remarque : Comme déjà signalé dans un exercice de cette feuille, tout endomorphisme de rang 1 vérifie $f^2 = \operatorname{tr}(f)\, f$. Un élève « *ambitieux* » peut retenir cette propriété (donc $\lambda = \operatorname{tr}(f)$).

Ex 77 Soit f et g deux endomorphismes de E $\mathbb{R}$-ev. On suppose $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

Etablir $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g = E$ et $\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} f = E$

Comme il n'y a pas d'hypothèses de dimension, on démontre les deuxc propriétés suivantes :

$\boxed{\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}}$

Il est suffisant de démontrer l'inclusion $\subset$: soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$, alors $f(x) = 0$ et $x = g(y)$ ave $y \in E$. Il suit $f(x) = f(g(y)) = (f \circ g)(y) = 0$. On applique g, il vient :

$$g(0) = 0 = g(f(g(y))) = (g \circ f \circ g)(y) = g(y) = x$$

On a utilisé l'hypothèse dans la 4e égalité.

$\boxed{\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g = E}$

On procède par analyse-synthèse. L'analyse permet de trouver la (seule possible) décomposition sur les deux evs d'un vecteur f quelconque. On vérifie dans la synthèse ou réciproque.

Analyse

Supposons la décomposition $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Im} g$. Alors $f(y) = 0$ et $z = g(t)$ avec $t \in E$. Il vient, par linéarité, $f(x) = f(y) + f(z) = f(g(t))$. L'idée est alors identique à plus haut : on applique g ce qui va permettre d'utiliser l'hypothèse :

$$g(f(x)) = g(f(g(t))) = (g \circ f \circ g)(t) = g(t) = z$$

On a trouvé z (en fait ***le seul possible***). Il vient alors $y = x - z = x - g(f(x))$.

Réciproque

Soit $x \in E$ quelconque, alors les 3 propriétés suivantes sont vérifiées :

- $x = (x - g(f(x)))\ ) + g(f(x))$
- $g(f(x)) \in \operatorname{Im} g$. Immédiat.
- $x - g(f(x)) \in \operatorname{Ker} f$: $f(x - g(f(x))) = f(x) - f(g(f(x))) = f(x) - f(x) = 0$ en appliquant l'autre hypothèse qu'on n'avait pas encore utilisée.

La preuve est achevée.

CCINP MPBQ 2023->21 (somme du noyau et de l'image)

Ex 78 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1) Démontrer que : $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Longrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.

2) (a) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.

(b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Longrightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Cet exercice fait partie de la banque d'exos CCINP MP, n°64.

Vous pouvez regarder la correction fournie par le concours : Banque CCINP MP 2023 avec corrigés

Ex 80 ✷ E de base $(e_1 \dots e_n)$, $G_i = \operatorname{Vect}(e_k)_{k \neq i}$ $H_i = \{f \in \mathcal{L}(E) \,/\, \operatorname{Ker} f \supset G_i\}$. Etablir $\mathcal{L}(E) = \bigoplus_{i=1}^{n} H_i$

Méthode 1 : On rappelle d'abord que, à l'instar de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la base canonique est $(M_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec un 1 en position (i,j) et des 0 ailleurs, une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E étant fixée, la base canonique de E est $(f_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ qui est définie par pour $k \neq j$, $f(e_k) = 0$ et $f(e_j) = e_i$. C'est en fait l'application linéaire associée à M_{ij}. Je vous laisse y réfléchir.

$\operatorname{Ker} f \supset G_i$ s'écrit : pour tout $k \neq i$, $f(e_k) = 0$ et $f(e_i)$ quelconque, soit $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} e_j$. On a alors immédiatement, ***par linéarité***, que les applications f_{ji} pour $1 \leq j \leq n$ (cad pour $k \neq i, f(e_k) = 0$ et $f(e_i) = e_j$, forment une famille génératrice de H_i. Comme cette famille est libre, en tant que sous-famille de la base canonique de $\mathcal{L}(E)$, c'est une base de H_i. On applique ensuite un théorème qui dit que on a $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p = E$ ssi la réunion des bases de F_i est une base de E. Ici la réunion des bases $(f_{ji})_{1\leq j\leq n}$ de H_i est la base canonique $(f_{ji})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathcal{L}(E)$, donc $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n = \mathcal{L}(E)$.

Méthode 2 : On va d'abord démontrer que $H_F = \{f \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{Ker} f \supset F\}$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $n(n-p)$ avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$. C'est un exo classique. On considère un supplémentaire G de F, cad $F \oplus G = E$ et $\dim G = n-p$. On a alors que $f \in H_F$ ssi $f_{/F} = 0$ et $f_{/G}$ quelconque. On note ensuite l'application restreinte $f' : G \longrightarrow E, x \longrightarrow f(x)$ et l'application $\phi : f \in H_F \longrightarrow \mathcal{L}(G,E), f \longrightarrow f'$. Elle est linéaire et bijective car sa réciproque est l'application qui à $f \in \mathcal{L}(G,E)$ associe l'application $\hat{f} \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\hat{f}_{/G} = f$ et $\hat{f}_{/F} = 0$. On a immédiatement $\operatorname{Ker} \hat{f} \supset F$, cad on a bien $\hat{f} \in H_F$. Ensuite, par isomorphisme, $\dim H_F = \dim \mathcal{L}(G,E) = \dim G \times \dim E = n(n-p)$.

On a $\dim G_i = n-1$, d'où par le résultat précédent $\dim H_i = n(n-(n-1)) = n$. Ensuite, on a bien $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n = \mathcal{L}(E)$ par la double propriété :

- $\dim H_1 + \cdots + \dim H_n = n + \cdots + n = n \times n = \dim \mathcal{L}(E)$
- Soit $f_i \in H_i$ telles que $f_1 + \cdots + f_n = 0$. En appliquant à la base (e_i), il suit que $f_1(e_i) + \cdots + f_n(e_i) = 0 + \cdots + 0 + f_i(e_i) = 0$. Comme on a aussi par définition, $f_i(e_j) = 0$ pour $j \neq i$, il vient $f_i = 0$.

Ex 81 Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension 4. Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 des endomorphismes de E tels que $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = \operatorname{Id}_E$ et $f_i \circ f_j = 0$ si $i \neq j$.

1) Montrez que les f_i sont des projecteurs.

2) Montrez $\operatorname{Im} f_1 \oplus \operatorname{Im} f_2 \oplus \operatorname{Im} f_3 \oplus \operatorname{Im} f_4 = E$.

---

1)

$$f_i = f_i \circ \operatorname{Id} = f_i \circ (f_1 + f_2 + f_3 + f_4) = f_i \circ f_1 + f_i \circ f_2 + f_i \circ f_3 + f_i \circ f_4 = \sum_{j=1}^{4} f_i \circ f_j = f_i \circ f_i + 0 + 0 + 0$$

Je rappelle que la distributivitéde $\circ$ à gauche sur $+$ (le 3e égal) est correcte parce que f_i est linéaire

2)

- $\boxed{\operatorname{Im} f_1 + \operatorname{Im} f_2 + \operatorname{Im} f_3 + \operatorname{Im} f_4 = E}$

  Analyse :

  Soit $x \in E$ se décomposant $x = y_1 + y_2 + y_3 + y_4$ avec $y_i \in \operatorname{Im} f_i$, soit $y_i = f_i(z_i)$. En appliquant f_j à l'égalité, par linéarité :

$$f_j(x) = f_j\Big(\sum_{i=1}^{4} y_j\Big) = \sum_{i=1}^{4} f_j(f_i(z_i)) = f_j^2(z_j) + 0 + 0 + 0 = f_j(z_j) = y_j$$

L'analyse est terminée, le seul y_j possible est $y_j = f_j(x)$...

Synthèse :

Soit $x \in E$; on peut décomposer comme suit :

$$x = \text{Id}(x) = \sum_{i=1}^{4} f_i(x) \text{ avec } f_i(x) \in \text{ Im} f_i$$

Attention! au fait que l'on a seulement démontré $E \subset \text{ Im} f_1 + \text{ Im} f_2 + \text{ Im} f_3 + \text{ Im} f_4$. L'autre inclusion est immédiate (« *tout* » est dans E!)

- $\boxed{\text{La somme est directe :}}$

  Soient y_i des vecteurs de $\text{ Im} f_i$ tels que $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$. Montrons qu'ils sont nuls. $y_i = f_i(z_i)$. Comme on l'a déjà utilisé à plusieurs reprises, on applique f_j :

$$0 = f_j(0) = f_j\Big(\sum_{i=1}^{4} y_i\Big) = \sum_{i=1}^{4} f_j(y_i) = \sum_{i=1}^{4} f_j(f_i(z_i)) = 0+0+0+f_j^2(z_j) = f_j(z_j) = y_j$$

Ex 82 Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n+1. Etablir $\mathbb{C}_n[X] \oplus P(X)\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X]$ où, usuellement , $P(X)\mathbb{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes $\{\, P(X) \times Q(X) \,/\, Q(X) \in \mathbb{C}[X] \,\}$.

Etant donné que $\mathbb{C}[X]$ est de dimension infinie, on démontre :

- $\boxed{\mathbb{C}_n[X] \cap P(X)\mathbb{C}[X] = \{0\}}$

  L'inclusion $\subset$ suffit. Soit $R(X) \in \mathbb{C}_n[X] \cap P(X)\mathbb{C}[X]$, donc $R \in \mathbb{C}_n[X]$, soit $\deg R \leq n$ et $R(X) = P(X)Q(X)$. La formule $\deg R = \deg P + \deg Q$ amène $\deg R \geq n+1$ (ce qui se comprend bien). Ces deux inégalités sur le degré de R sont incompatibles entre elles, sauf pour le polynôme nul.

- $\boxed{\mathbb{C}_n[X] + P(X)\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X]}$

  En général, pour démontrer une somme (***directement***), on procède par analyse-synthèse pour « *deviner* » comment le vecteur (ici un polynôme $S(X)$) se décompose suivant les 2evs (ici $\mathbb{C}_n[X]$ et $P(X)\mathbb{C}[X]$). En fait, ici, il n'y pas vraiment besoin d'analyse, il faut deviner tout seul que c'est le théorème de la division euclidienne (de S par P) : comme $P \neq 0$, il existent un unique quotient Q et un unique reste R tels que $S(X) = P(X)Q(X) + R(X)$ ***avec*** $\deg R(X) < \deg P(X)$ ce qui donne bien $\deg R(X) \leq n$. Je vous laisse réfléchir (voir) au fait que la somme est bien démontrée...

Remarque : L'ev $P(X)\mathbb{C}[X]$ est en fait l'ensemble de tous les polynômes ***multiples*** du polynôme $P(X)$ qui, donc, est bien un ev. Par contre, l'ensemble de tous les polynômes qui ***divisent*** le polynôme $P(X)$ n'est ***pas un ev***. Vous voyez pourquoi?

Mines-Ponts PSI 2023 (étude de 2 sevs de $\mathcal{L}(E,F)$) ✷

Ex 82 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $a,b \in \mathcal{L}(E)$. on pose $D_a = \{ a\circ v, v \in \mathcal{L}(E) \}$ et $G_b = \{ v\circ b, v \in \mathcal{L}(E) \}$

1) Montrez que $D_a = \{ f \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} a \}$.

2) Donnez une relation similaire pour G_b

3) Soit $H_{ab} = D_a + G_b$. Donnez sa dimension.

4) Quel est le rang maximal d'un élément de H_{ab} ?

1) On pose $V = \{ f \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} a \}$. $D_a \subset V$ est immédiat puisque si $f = a\circ v$, $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} a$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} a$. Construisons v tq $f = a\circ v$.

L'idée est « *d'inverser* » a. Bien sûr, a n'est pas nécessairement inversible. On utilise le théorème du rang version théorique : en notant F un supplémentaire quelconque de $\operatorname{Ker} a$ dans E, a induit un isomorphisme, noté a', de F ***sur*** $\operatorname{Im} a$. On écrit $E = G \oplus \operatorname{Ker} f$.

- Sur $\operatorname{Ker} f$, on prend $v = 0$. On a bien $f = a\circ v$
- Sur G, on prend $v = a'^{-1}\circ f$. Possible car $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} a$. on a bien $a\circ v = a'\circ v$, car $\operatorname{Im} v \subset F$, $= a'\circ a'^{-1}\circ f = f$

f et $a\circ v$ étant égales sur 2 sevs supplémentaires sont égales partout.

2) La relation de la question précédente est « *inversée* » : $G_b = \{ v\circ b, v \in \mathcal{L}(E) \} = \{ f \in \mathcal{L}(E),\ \operatorname{Ker} f \supset \operatorname{Ker} b \}$

Il y a une inclusion immédiate : si $f = v\circ b$, alors $\operatorname{Ker} b \subset \operatorname{Ker} f$. Montrons l'inclusion réciproque, cad si $f \in \mathcal{L}(E)$ tq $\operatorname{Ker} b \subset \operatorname{Ker} f$, construisons v linéaire tq $f = v\circ b$.

Méthode 1 (construction sur une base) : On prend une base $(e_1,\dots,e_p)$ de $\operatorname{Ker} b$ que l'on complète en $\mathcal{E} = (e_1,\dots,e_n)$ base de E (on pose $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$ qui est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} b$). Par un brève analyse, on voit que $f(e_i) = v(b(e_i))$, en particulier pour $p+1 \leq i \leq n$. On va construire une base « *à partir* » de ces $b(e_i)$. Montrons d'abord que la famille $(b(e_{p+1}),\dots,b(e_n))$ est libre : soient $\alpha_{p+1},\dots,\alpha_p \in \mathbb{K}$ des scalaires tels que $\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i b(e_i) = 0$. En appliquant b linéaire :

$$b\Big(\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e_i\Big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i e_i \in \operatorname{Ker} b$$

Or $x \in G$ et, comme $G \cap \operatorname{Ker} b = \{0\}$, il suit $x = 0$ et par liberté des (e_i), car base de G, il suit $\alpha_i = 0$. On pose $f_i = b(e_i)$ et on complète en une base $\mathcal{F} = (f_1,\dots,f_n)$ de E. On définit alors v comme l'application linéaire définie sur cette base par $v(f_i) = f(e_i)$ pour $1 \leq i \leq p$ et $v(f_i) = 0$ sinon.

Vérifions $f = v\circ b$. Il faut et il suffit de le vérifier sur la base $\mathcal{E}$: pour tout $1 \leq i \leq p$, $(v\circ b)(e_i) = v(b(e_i)) = v(0) = 0 = f(e_i)$ car ces e_i sont aussi dans $\operatorname{Ker} f$ par hypothèse. pour $p+1 \leq i \leq n$: $(v\circ b)(e_i) = v(f_i) = f(e_i)$. Ok.

Méthode 2 (plus élégante par « inversion » de b) : On prend 2 supplémentaires G et F vérifiant respectivement $G \oplus \operatorname{Ker} b = E = F \oplus \operatorname{Im} b$. Le théorème du rang nous donne qu'il existe un isomorphisme, noté b', de G ***sur*** $\operatorname{Im} b$. On construit v par :

- Sur F, on prend $v = 0$
- Sur $\operatorname{Im} b$, on prend $v = f\circ b'^{-1}$.

Le lecteur vérifiera de lui-même, proprement, que l'on a bien $f = v \circ b$. ***Attention!*** , il faut le vérifier ***sur*** $\operatorname{Ker} b \oplus G$.

Remarque : On peut définir directement v sur $£$ en introduisant la projection p sur $\operatorname{Im} b$ parallèlement à F et alors $v = f \circ b^{-1} \circ p$ (je vous laisse y réfléchir)

3)

Méthode 1

On a $\dim H_{ab} = \dim D_a + \dim G_b - \dim D_a \cap G_b$. On a $\dim D_a = n \operatorname{rg} a$, $\dim G_b = n(n - \dim \operatorname{Ker} b)$ et $\dim D_a \cap G_b = (n - \dim \operatorname{Ker} b) \operatorname{rg} a$. Je vous traite juste ce dernier, les 2 autres ayant une démo similaire.

Soit $f \in D_a \cap G_b$, cad $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} a$ et $\operatorname{Ker} b \subset \operatorname{Ker} f$. Prenons B un supplémentaire de $\operatorname{Ker} b$ dans E, $B \oplus \operatorname{Ker} b = E$. Considérons l'application ϕ qui à f associe l'application f', égale à f, mais co-restreinte, au départ à B et à l'arrivée à $\operatorname{Im} a$. On a $f' \in \mathcal{L}(B, \operatorname{Im} a)$, ev de dimension $\dim B \dim \operatorname{Im} a = (n - \dim \operatorname{Ker} b) \operatorname{rg} a$. ϕ est bijective, donc un isomorphisme, car la réciproque est l'application qui à $g \in \mathcal{L}(B, \operatorname{Im} a)$ associe l'application de $E = B \oplus \operatorname{Ker} b$ sur E définie par g sur B et 0 sur $\operatorname{Ker} b$. Je vous laisse vérifier qu'elle convient. Le résultat suit.

$$\dim H_a = n \operatorname{rg} a + n(n - \dim \operatorname{Ker} b) - (n - \dim \operatorname{Ker} b) \operatorname{rg} a = \boxed{n^2 - \dim \operatorname{Ker} b (n - \operatorname{rg} a)}$$

Méthode 2

Via la une base $\mathcal{E}$ au départ adaptée à la décomposition $\operatorname{Ker} b \oplus B = E$ et une base $\mathcal{F}$ à l'arrivée à la décompostion $\operatorname{Im} a \oplus F = E$, Les éléments g de D_a (rp. h de G_b) ont de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{F}$ une matrice du type :

$$g : \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h : \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & D \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad g + h : \begin{pmatrix} A & B + C \\ 0 & D \end{pmatrix} = M$$

Je vous laisse y réfléchir. ***Attention!*** ces blocs n'ont aucune raison d'être carrés ! Par exemple, $A \in \mathcal{M}_{\operatorname{rg} a, \dim \operatorname{Ker} b}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n - \operatorname{rg} a, n - \dim \operatorname{Ker} b}(\mathbb{K})$. La dimension recherchée est le nombre d'indéterminées de cette matrice (je ne m'attarde pas sur une démo et je vous laisse y réfléchir) soit :

$$\operatorname{rg} a \dim \operatorname{Ker} b + \operatorname{rg} a (n - \dim \operatorname{Ker} b) + (n - \operatorname{rg} a)(n - \dim \operatorname{Ker} b) = n^2 - \dim \operatorname{Ker} b (n - \operatorname{rg} a)$$

4) Rappelons que rang maximum signifie que la valeur peut être « *atteinte* ». On note $r = \operatorname{rg} A$ et $k = \dim \operatorname{Ker} b$ et usuellement $J_{r,m,l}$ la matrice de $\mathcal{M}_{m,l}(\mathbb{K})$ constituée de 0 et que de 1 sur la « *diagonale* » issue de la position $(1,1)$, qui d'ailleurs n'est ***pas*** stricto-sensu une diagonale lorsque $m \neq l$.

On reprend la méthode 2 et les matrices $M = \left(\begin{smallmatrix} A & E \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$ avec $A \in \mathcal{M}_{r,k}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_{n-r,n-k}(\mathbb{K})$ et $E \in \mathcal{M}_{r,n-k}(\mathbb{K})$.

On a $\operatorname{rg}(u+v) \leq \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$ puisque $\operatorname{Im}(u+v) = \{(u+v)(x), x \in E\} \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \{u(x) + v(y), x, y \in E\}$

- si $r \leq k$, $M = \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right)$ d'où $\operatorname{rg} M \leq \operatorname{rg} \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \operatorname{rg} \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ 0 & D \end{smallmatrix}\right) \leq r + n - k$.

En considérant $M=\begin{pmatrix} J_{r,r,k} & 0 \\ 0 & J_{n-k,n-r,n-k}\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccccccc|cccc}
1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & 0 & & & & 0 & \vdots & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\hline
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots & 0 & \dots & 0 & 1 \\
\vdots & & & & & & \vdots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0
\end{array}\right)$, ce rang est « *atteint* ».

- si $r\geq k$, le rang n est atteint en I_n ! Regardez le dessin pour comprendre que c'est bien une matrice du type de M :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & & & & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\hline
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1
\end{array}\right)$$

a

Centrale PSI 2022 (polynômes de Lagrange et formules de Quadrature) ✷

Ex 87 Soit $(L_0,\dots,L_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall i,k\in \llbracket 0;n\rrbracket$, $L_k(i)=\delta_{ik}$

1) Donnez la forme factorisée des L_k et exprimez le coefficient dominant avec des factorielles.

2) Montrez $(L_0,\dots,L_n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall 0\leq k\leq n,\ P(k)=k^n$. Exprimez P de 2 manières différentes.

4) Donnez une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^n$.

5) Donnez la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$. Montrez il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tq, pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^n P(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k P(k)$

1) C'est du cours, si $(L_0,\dots,L_n)$ est la famille des polynômes de Lagrange associée à $n+1$ réels distincts $a_0,\dots,a_n$:

$$L_i(X)=\frac{\prod_{j\neq i}(X-a_j)}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}\quad \text{ici } \prod_{j\neq i}(i-j)=\prod_{j=0}^{i-1}(i-j)(-1)^{n-i}\prod_{j=i+1}^{n}(i-j)=(-1)^{n-i}\,i!\,(n-i)!$$

On vérifie que la formule reste vraie pour les cas particuliers-limite $i=0$ et $i=n$.

2) C'est du cours, je ne le redémontre pas ici.

3) Je rappelle que les coordonnées d'un polynôme P quelconque dans la base de Lagrange associée aux $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ sont les $(P(a_i))_{0\leq i\leq n}$. On en déduit une première expression du P de l'énoncé :

$$P(X)=\sum_{i=0}^{n} i^n L_i(X)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{n-i}i^n}{i!\,(n-i)!}\prod_{j\neq i}(X-j)$$

En remarquant que les polynômes X^n et P ont même valeurs sur les k pour $0\leq k\leq n$, en nombre ***plus grand que*** le degré (au plus n), alors $P(X)=X^n$.

4) En considérant le coefficient dominant de P, cad de X^n, sur les 2 expressions :

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{n-i} i^n}{i!\,(n-i)!} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} i^n \binom{n}{i} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n = n!$$

5) D'après le cours, dim $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R}) = \dim \mathbb{R}_n[X] \times \dim \mathbb{R} = n+1$. On sait que $e_k : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow P(k)$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$, cad un élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$. En fait $(e_0,\dots,e_n)$ en est une base. Par cardinalité, il faut et il suffit de démontrer la liberté. Soit $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i = 0$ (E) une combinaison linéaire nulle.

L'idée astucieuse est de l'appliquer aux polynômes de Lagrange puisque, par définition, $e_i(P_j) = \delta_{ij}$. Si on applique donc (E) au polynôme L_i, on obtient $\alpha_i = 0$!

$(e_0,\dots,e_n)$ étant une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$ et $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \int_0^n P$ étant elle-même une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$, on en déduit l'existence d'un u nique $n+1$-uplet de coordonnées (λ_i) vérifiant $\phi = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i$ ce qui, une fois appliqué à un polynôme quelconque P, est exactement la formule de l'énoncé.

Remarques

- La base $(e_0,\dots,e_n)$ de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X],\mathbb{R})$ vérifiant $e_i(L_j) = \delta_{ij}$ est appelée ***base duale*** de la base (L_i). On note en général $e_i = L_i^*$. On étudie ce concept en classe de MP.
- Les formules du type $\displaystyle\int_0^n P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k)$ sont appelées ***formules de quadrature***. Elles permettent de calculer une aire sous un polynôme P et, par approche, celle d'une fonction continue. Si vous avez bien suivi la démo, il n'est pas nécessaire de prendre les entiers k, on peut prendre $n+1$ réels distincts $a_0,\dots,a_n$. $\displaystyle\int_0^n P(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \beta_k P(a_k)$ pour tout polynôme de degré $\leq n$, les β_k étant fixés et ***indépendants*** de P. Pour une fonction f continue quelconque, on n'aura pas une égalité mais une « *approche* ».

  Par exemple pour $n=1$, on obtient $\int_a^b P(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\,P(a) + \frac{b-a}{2}\,P(b)$ pour tout polynôme de degré ≤ 1. C'est d'ailleurs évident à vérifier à la main. Ce qui est remarquable c'est que si on applique cela, en coupant en n intervalles pour une fonction f, on obtient l'approche par la formule des trapèzes.

  De même, pour $n=2$ et $a, \frac{a+b}{2}, b$, on obtient $\int_a^b P(t) = \frac{b-a}{6}\,P(a) + \frac{4(b-a)}{6}\,P(\frac{a+b}{2}) + \frac{b-a}{6} P(b)$ pour tout polynôme de degré ≤ 2. En l'appliquant à un f continue quelconque en coupant en n intervalles, on obtient lâ€™approche par la formule de Simpson.

Ex 89

1) Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n \neq$ 2 à 2 et f: $T \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (T(\lambda_1^3),\dots,T(\lambda_n^3)) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est un isomorphisme.

2) Explicitez T^{-1} (on pourra utiliser les polynômes de Lagrange)

1) La linéarité de f est immédiate et laissée au lecteur. On remarque que les deux evs ont la même dimension : $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n = \dim \mathbb{R}^n$. Donc, il faut et il suffit de démontrer $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ (et même $\subset$) pour démontrer f bijective.

Soit $T \in$ Ker f. On a alors $T(\lambda_i^3) = 0$. On en déduit que les λ_i^3 sont racines de T et comme ils sont ***distincts***, ils sont en nombre n, le polynôme T a plus de racines que son degré et est le polynôme nul. ***Attention!*** toutefois à bien justifier que les λ_i^3 sont distincts : cela provient de $g : x \longrightarrow x^3$ ***injective***. On peut prouver l'injectivité par la bijectivité de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et les théorèmes d'analyse : g est ***continue*** et ***strictement croissante*** (par sa dérivée).

2) Soit donc un n-uplet de réels $a = (a_1, \dots, a_n)$; il faut comprendre comment trouver ***le polynôme*** T (de degré $\leq n-1$) qui vérifie $T(\lambda_i^3) = a_i$. Ce polynôme existe d'après la question précédente.
Les λ_i^3 étant distincts et en nombre n, il existe un ***unique polynôme*** de degré $\leq n-1$, que l'on notera P_a tel que $P_a(\lambda_i^3) = a_i$. Un autre théorème du cours nous dit que on peut l'obtenir à partir des n ***polynômes de Lagrange*** en les / associés aux n nombres $\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3$ que l'on va noter usuellement $L_1, \dots, L_n$: c'est :

$$P_a(X) = \sum_{i=1}^{n} P_a(\lambda_i^3)\, L_i(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i L_i(X)$$

La bijection réciproque est donc $\phi^{-1} : (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i L_i(X)$.