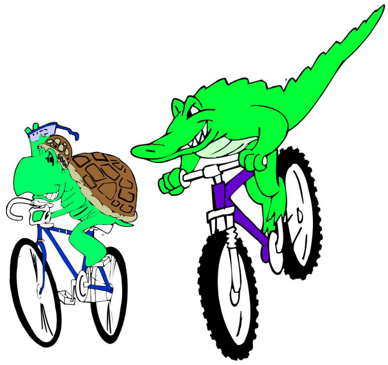
Classe de PSI

Feuille d'Exercices 1
Algèbre Linéaire



Sevs, Hyperplans, Dimension

Sous-ev : Soit E un ev « *connu* », cad dans le cours. Alors $F \subset E$ est un **sev** de E (donc un ev) ssi :
- $F \neq \emptyset$: on vérifie que F contient le vecteur nul, cad $0_E \in F$.
- ***Stabilité de*** F ***par les lois*** $+$ ***et*** $.$ **:** $\forall$ scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall$ vecteurs $f, f' \in F$, alors on a bien $\alpha f + \beta f' \in F$.

Si $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$, alors F est ***sev*** de E et $\dim F \leq p$. Il est de dimension p ssi la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est ***libre***.
$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ est exactement l'ensemble des vecteurs de la forme $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p$ avec les $\alpha_i \in \mathbb{K}$ scalaires.

Soit F un sev de E. S'il existe une famille ***libre*** $(x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs ***dans*** F, alors $\dim F \geq p$.
En particulier, s'il existe une famille libre de ***cardinal infini*** de vecteurs de F, F est de dimension infinie

Hyperplan : Un sev H d'un ev E de dimension n est un ***hyperplan***
- ***ssi*** il est de dimension $n-1$
- ***ssi*** il est le noyau d'une forme linéaire $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ non nulle, cad $H = \{x \in E,\ \varphi(x) = 0\}$.
- ***ssi*** il est représenté dans une base quelconque par ***une seule*** équation $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$

Ex 1 ✌✍ On considère l'ensemble H des polynômes de la forme $aX^3 + (b-2a)X^2 - 2bX + 3a$. ($a, b$ réels). Montrez que c'est un plan. *(muni des lois usuelles)*. Précisez une base.

Ex 2 ✍

1) Montrez que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

2) En donner une base pour $n = 3$.

Ex 3

1) Montrez l'ensemble F des matrices circulantes M_{abcd} défini par $M_{abcd} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$ est un sev de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

2) On pose $J = M_{0100}$. Calculez J^k et ***en déduire*** que F est stable par $\times$.

Ex 4 ✍ Pour $n \geq 2$, et $(E) : M + M^{\mathrm{T}} = 2(\mathrm{tr}\, M) I_n$,avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que l'ensemble des solutions de E (muni des opérations usuelles) est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminez sa dimension.

Mines-Ponts PSI 2021-2019-2018 (ev engendré par matrices nilpotentes) ✍ ✷

Ex 5

Soient $n \geq 2$, $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathcal{N}$ celui des matrices nilpotentes.

1) Les ensembles $\mathcal{H}$ et $\mathcal{N}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2) Montrez que l'espace engendré par $\mathcal{N}$ est inclus dans $\mathcal{H}$.

3) Cette inclusion est-elle une égalité ?

Ex 6 ✍

1) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrez $A_f = \{g \in \mathcal{L}(E)\ /\ f \circ g = 0\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2) ✷ Précisez sa dimension lorsque E est de dimension finie n

Mines-Ponts PSI 2022 (sev de matrices) ✷ ☜✍

Ex 7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AMB = 0\}$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dimension?

Ex 8 ✍ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim. finie n et V un sev de E de dimension p. On pose $L_V = \{u \in \mathcal{L}(E)\ /\ V \supset \operatorname{Im} u\}$.

1) Montrez que L_V est un ev de dim. finie

2) ✷ Donnez sa dimension.

Familles libres, génératrices, Bases

Liberté : Une famille $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ est dite ***libre*** ssi la ***seule*** combinaison linéaire ***nulle*** est la combinaison à coefficients ***tous nuls*** : on démontre : $a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0 \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$

Une famille est dite ***liée*** ssi elle est non libre
- ***ssi*** il existe une combinaison linéaire ***nulle*** à coefficients ***non tous nuls*** : par exemple : $2e_1 + e_2 + 0e_3 - e_4 = 0$.
- ***ssi l'un*** des vecteurs est combinaison linéaire des ***autres*** : par exemple, dans l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la famille $\big(\sin(x+1), \sin(x), \cos(x)\big)$ est liée car $\sin(x+1) = \sin(1)\cos(x) + \cos(1)\sin(x)$

Génératrice : La famille $\mathcal{E}$ est dite ***génératrice de*** F ou l'ev F est dit ***engendré par*** la famille $\mathcal{E}$ et on note $\operatorname{Vect}\big(e_1, \ldots, e_n\big) = F$ ssi tout vecteur x de F s'écrit comme combinaison linéaire de cette famille :

$$\forall x \in F \quad \exists a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, \text{ tel que } x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

Par exemple, la famille $(1, X, X^2)$ est génératrice ***de*** $\mathbb{R}_2[X]$ car tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit $aX^2 + bX + c$.

Base : La famille $\mathcal{E}$ est une ***base*** de F, espace vectoriel de dimension finie n
- ***ssi*** elle est constituée d'éléments de F, est ***une famille libre*** et Card $\mathcal{E} = n$. (très utile en dimension finie)
- ***ssi*** c'est une famille ***libre*** et ***génératrice de*** F (pour la dimension infinie)
- ***ssi*** pour tout $x \in F$, il ***existe des uniques*** scalaires $(a_i)_{\leq i \leq n}$ tq $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ (les coordonnées)

Toute famille de ***polynômes*** non nuls et de ***degrés tous distincts*** est libre (très utile dans la pratique).

Ex 9 ✍

1) Montrez que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]\ /\ P(1) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

2) Etablir les familles suivantes sont des bases de F : $\big(X^i(X-1)\big)_{0 \leq i \leq n-1}$, $\big((X-1)^i\big)_{1 \leq i \leq n}$

3) Montrez il existe p, m entiers tels que $\big((X-1)^i(X-2)^{n-i}\big)_{p \leq i \leq m}$ soit une base de F.

4) Montrez ***directement*** que $\big(X^i(X-1)\big)_{0 \leq i \leq n-1}$ est génératrice de F.

Ex 10 ✌✍ On se place dans le $\mathbb{R}$-ev des fonctions numériques réelles. Etablir que la famille $(x \to \cosh x, x \to e^x, x \to \sinh x)$ est liée.

Ex 11 Montrez que la famille $(x \to e^{ax}, x \to e^{bx}, x \to e^{cx}, x \to e^{dx})$ est libre (a, b, c, d réels 2 à 2 distincts).

CCP PSI 2011 (base de l'ev des matrices diagonales) ✍

Ex 12 Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts. Montrez que $(I_n, D, D^2, \ldots, D^{n-1})$ est une base de l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex 13 ✍ Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels. Montrez que la famille de vecteurs $(U_1, \ldots, U_n)$ de $\mathbb{R}^n$ définie par $U_i = (1 + a_1 b_i, 1 + a_2 b_i, \ldots, 1 + a_n b_i)$ est liée *Indication : montrez qu'elle est contenue dans un plan.*

Mines-Ponts PSI 2018-2017-2016-2009 (base de polynômes) ✷✍

Ex 14 Soient $a_0, \ldots, a_n$ des scalaires 2 à 2distincts et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n.

Montrez que la famille $(P(X + a_k))_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Mines-Ponts PSI 2014 (coefficients d'une matrice comme intégrale)

Ex 15 Soient $E=\mathscr{C}^0\left(\left[0,1\right],\mathbb{R}\right)$ et $(f_1,\dots,f_n)$ une famille libre de E.

Montrez que pour toute matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=\left[m_{ij}\right]_{1\le i,j\le n}$, il existe une famille $(g_i)_{1\le i\le n}$ de E telle que pour tous $1\le i,j\le n,\ m_{ij}=\displaystyle\int_0^1 f_i(t)g_j(t)\,\mathrm{d}t$. Etudiez la réciproque.

Ex 16 Soit $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tq $f(\mathbb{R})$ est infini. On pose $f^n=f\times\cdots\times f$ (n fois) Montrez $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est libre.

Ex 17 Montrez que la famille $(h_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre avec $h_a(x)=|x-a|$

Noyaux, Images, Isomorphismes, Rang

Noyau : Si $f:E\longrightarrow F$ est linéaire, $\operatorname{Ker} f=f^{-1}\left(\{0\}\right)$ est un sev de E, appelé noyau et $\operatorname{Ker} f=\left\{x\in E,\ f(x)=0\right\}$.
Le noyau vérifie $\operatorname{Ker} f=\left\{0\right\}$, cad $\left[f(x)=0\iff x=0\right]$, ***ssi*** f est injective

Théorème du rang : Si f est un morphisme sur un ev E de dimension finie, $\dim\operatorname{Ker} f+\dim\operatorname{Im} f=\dim E$.
Attention ! textbf*On n'a pas*, en général, $\operatorname{Ker} f+\operatorname{Im} f=E$ ni même $\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} f=E$

Isomorphisme en dim. finie : Un ***endomorphisme en dimension finie*** f est un isomorphisme (cad bijectif)
- ***ssi*** $\operatorname{Ker} f=\left\{0\right\}$ cad $\left[f(x)=0\iff x=0\right]$ ce qui équivaut ***aussi*** à $\left[f(x)=0\implies x=0\right]$
- ***ssi*** $\operatorname{rg} f=n$.
- ***ssi*** toute matrice le représentant dans une base quelconque a un déterminant non nul
- ***ssi*** 0 n'est ***pas*** valeur propre de f (5/2)
- ***ssi*** il existe une application linéaire g telle que $f\circ g=g\circ f=\mathrm{Id}$ (et alors $g=f^{-1}$)

Théorème fondamental de l'Analyse : si f ***continue*** sur I, $a\in I$ alors $F:x\longrightarrow\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue, dérivable et même de classe C^1 sur I, c'est la primitive de f sur I qui s'annule en a, $F'(x)=f(x)$.

Ex 18 Calculez noyau et image de $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ donné dans la base canonique par $M=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&1&-1\\1&2&-3\end{pmatrix}$

Ex 19 On pose $f:P\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])\longrightarrow 2XP'(X)-(1-X^2)P''(X)$

1) Montrez f endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Calculez le noyau de f.

Ex 20 Soit $A\neq 0\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et φ tq $\varphi(M)=M-\operatorname{tr}(M)A$.

1) Calculez le noyau de φ.

2) Montrez φ est automorphisme ssi $\operatorname{tr} A\neq 1$.

3) Calculez $\varphi^2(M)$.

Ex 21 Soient $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 2$, $E=\mathbb{R}_4[X]$, et $\Phi:\ P\in E\mapsto(X^2-X)P(1)+(X^2+X)P(-1)$.

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

2) Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

Ex 22 Soient $f,g\in\mathscr{L}(E)$. On rappelle $f^k=f\circ\cdots\circ f$.

1) Montrez $\operatorname{Ker}(g\circ f)\supset\operatorname{Ker} f$. Trouvez une égalité similaire avec $\operatorname{Im}(g\circ f)$. La démontrer.

2) Montrez $f(\operatorname{Im} f^k)=\operatorname{Im} f^{k+1}$, $f^{-1}(\operatorname{Ker} f^k)=\operatorname{Ker} f^{k+1}$, $f(\operatorname{Ker} f^k)\subset\operatorname{Ker} f^{k-1}$.

Mines-Ponts PSI 2023 | Centrale PSI 2012

Ex 23 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$. [**2012 :** dans $\mathbb{K}$]

1) [**2012 :** Exprimez le rang de M en fonction de A et B.]

2) Donnez une CNS Pour que M soit inversible ; Déterminez M^{-1} dans ce cas.

Ex 24 ✍ Montrez φ endomorphisme de $\mathscr{C}^0\big([0,1], \mathbb{C}\big)$ puis calculez noyau et image de $\varphi(f)(x) = \int_0^x f$

Ex 25 Soit $E = \mathscr{C}^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ et on considère l'application T définie sur E par $T(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrez que T est un endomorphisme de E.

2) Montrez que T n'est pas surjective.

3) Calculez le noyau de T.

Centrale PC 2013 (noyau image endomorphismes de fonctions) ✷✍

Ex 26 Soient $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\Phi : E \to E$ qui à f associe $x \mapsto f'(x) - x f(x)$.

1) Montrer que Φ est linéaire. Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$ et $\operatorname{Im}\Phi$.

2) Déterminer le noyau de Φ^2, de Φ^3 puis de Φ^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Soit $g \in E$. Déterminer les $f \in E$ telles que $\Phi(f) = g$.

4) On note φ la restriction de Φ aux fonctions polynomiales. Déterminer $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

Ex 27 On considère la matrice suivante $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$ avec a réel non nul

1) Calculez son rang puis explicitez Image et Noyau

2) Calculez A^n.

CCINP PSI 2022 (endomorphisme de polynômes) ✷✍

Ex 28 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi : P \in \mathbb{R}[X] \longrightarrow (X-a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a))$.

1) Montrez φ endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) Montrez il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tq $(X-a)^k$ divise $\varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Trouvez le plus grand k vérifiant cette condition.

3) Déterminez le noyau et l'image de φ.

IMT PSI 2017 | CCP BGMP 2023->11 (morphisme de matrices) ✍

Ex 29 Soit la Matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

1) Déterminez une base de $\operatorname{Ker} f$.

2) f est-il surjectif?

3) Trouvez une base de $\operatorname{Im} f$.

4) ~~Le noyau et l'image de f sont-ils supplémentaires ?~~

Mines-Ponts PSI 2022 (dérivation discrète de polynômes) ✷✍

Ex 30

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrez il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tq $Q(0) = 0$ et $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$

Ex 31 ✷Soient $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$, $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ et $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$. On suppose que $\operatorname{rg} h = 2$ et $h = f \circ g$. Montrer que $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} f = 2$.

Ex 32 ✍ ***Suite des noyaux itérés :*** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. E de dimension finie.

1) Montrez $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, puis $\dim \operatorname{Ker} f \leq \dim \operatorname{Ker} f^2 \leq 2 \dim \operatorname{Ker} f$.

2) ✌Montrez $\operatorname{Im} f^{p+1} \subset \operatorname{Im} f^p$ et $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f^{p+1}$, pour p entier naturel.

3) Montrez il existe q entier tels que $\operatorname{Ker} f^q = \operatorname{Ker} f^{q+1}$. En déduire $\operatorname{Im} f^{q+1} = \operatorname{Im} f^q$

Etablir qu'alors, $\forall\, p \geq q$, $\operatorname{Ker} f^p = \operatorname{Ker} f^{p+1}$. Montrez on peut prendre $q = n$

4) Montrez, pour tout f, $\operatorname{Ker} f^n \oplus \operatorname{Im} f^n = E$

X PSI 2022 (Ker f = Im f et équivalence) ✷ ✷

Ex 33 Soient E de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrez l'équivalence entre :

(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ **(ii)** $f^2 = 0$ et il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tq $f \circ g + g \circ f = \mathrm{Id}$.

Matrices

Produit : La ***formule-produit*** de matrices, utile dans les exos : $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$, $\quad [A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{kj}$

Trace : La ***trace*** d'une matrice carrée M la somme de ses coefficients diagonaux. On a :

$$\operatorname{tr} M = \sum_{i=1}^{n} M_{ii} \qquad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \qquad \operatorname{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \operatorname{tr} A + \beta \operatorname{tr} B$$

Transposée : La ***transposée*** $M \to M^{\mathrm{T}}$ est un morphisme de $M_{np}(\mathbb{K})$ vers $M_{pn}(\mathbb{K})$ qui échange lignes et colonnes

$$[M^{\mathrm{T}}]_{ij} = M_{ji} \qquad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} \qquad (\alpha A + \beta B)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}} + \beta B^{\mathrm{T}}$$

Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite ***symétrique***, $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (rp. ***antisymétrique***, $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$)

- ***ssi*** $M^{\mathrm{T}} = M$ (rp. $M^{\mathrm{T}} = -M$).
- ***ssi*** $\forall\, 1 \leq i, j \leq n$, $M_{ij} = M_{ji}$ (symétrie par rapport à la diagonale) (rp. $M_{ij} = -M_{ji}$ donc les coefficients diagonaux M_{ii} d'une matrice antisymétrique sont tous nuls)

Matrice d'un morphisme : La matrice M d'un endomorphisme f de E dans ***une base*** $(e_1, \ldots, e_n)$ a ses coefficients M_{ij} définis par $f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} M_{ij}\, e_i$ (les coordonnées sont « *mises en colonnes* »)

Matrice inversible : Une matrice M (d'ordre n) est dite ***inversible*** (notée $M \in GL(n)$) :

- ***ssi*** $\det M \neq 0$.
- ***ssi*** la famille des vecteurs-colonnes $(C_1, \ldots, C_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
- ***ssi*** il existe une matrice N d'ordre n telle que $M \times N = N \times M = I_n$ (et alors $N = M^{-1}$).
- ***ssi*** $\operatorname{Ker} M = \{0\}$, ou ssi $[MX = 0 \iff X = 0]$ ou ssi $[MX = 0 \Longrightarrow X = 0]$.
- ***ssi*** M ne possède ***pas*** la valeur propre 0 (5/2)

Ex 34 On rappelle que $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

1) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. A quels indices (i, j) correspond la diagonale inverse ? la sur-diagonale ? le triangle inférieur ?

2) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{i,j} = \delta_{|i-j|,1}$. Ecrire la matrice.

3) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tq $a_{ij} = \delta_{i+1,j}$ si $i \leq n-1$ et $a_{nj} = \delta_{1j}$. Ecrire A.

Ex 35 ✌Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $u = e_1 + \cdots + e_n$ et f l'endomorphisme de E tel que $f(e_i) = e_i + u$ pour tout i. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{E}$.

Ex 36 ✍ Soient $a \in \mathbb{R}^*$, $M = (a^{i-j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrez M de rang 1.

2) Calculez et reconnaître M^2.

Ex 37 ✍ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tq $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} B = \operatorname{Im} A$, $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr} A$.

CCP PC 2016 (polynôme annulateur matrice $n \times n$) ✌✍

Ex 38 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A + I_n = 0$.

1) Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

2) ~~Montrer que $\operatorname{tr}(A) \leqslant 0$~~

Ex 39 Soient $E = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(S) = AS + SA^{\mathrm{T}}$.

1) Montrez que $(E_{11}, E_{22}, E_{12} + E_{21})$ est une base de E. ((E_{ij}) est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) Déterminez la matrice de φ dans cette base .

Ex 40 Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir $\operatorname{tr}\left(A^{\mathrm{T}} B\right) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} b_{ij}$.

Ex 41

1) Construire une matrice M complexe d'ordre 2 telle que $M^2 = -I_2$.

2) Construire une matrice M réelle d'ordre 2 telle que $M^2 = -I_2$.

3) En construire une dans le cas n pair quelconque (*on la construira par blocs*).

4) Justifiez que c'est impossible si l'ordre est impair. Que pensez-vous du cas complexe ?

Mines-Ponts PSI 2023 (équation matricielle) ✷✍

Ex 42 Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation $A^2 + (-1)^n \det(A) I_n = 0$.

Ex 43 ✍ On considère l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui envoie $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$. Ecrire sa matrice dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ex 44 ✍ Montrez une matrice M est de rang 1 ssi il existe 2 matrices colonnes $X, Y \neq 0$ tels que $M = XY^{\mathrm{T}}$.

Ex 45 ✍ Montrez que l'inverse d'une matrice symétrique (inversible !) est aussi symétrique. et que l'inverse d'une matrice triangulaire (inversible !) est aussi triangulaire.

Ex 46 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & & a^{n-1} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Montrez A inversible et calculez A^{-1}.

Mines-Ponts PSI 2013 (inverse d'une matrice par blocs) ☜✷✍

Ex 47 Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}$.

Trouvez une condition nécessaire et suffisante sur B pour que A soit inversible. Explicitez alors l'inverse de A.

TPE PSI 2017-2013 - XENS PSI 2008 - Mines-Ponts MP 2010 - X-ESPCI PC 2013 (Matrices semblables dans $\mathbb{C}$) ✷

Ex 48 Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrez qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Centrale PSI 2022 (endomorphisme de polynômes) ✷✍

Ex 49

1) Soit $u : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow P' \in \mathbb{R}_n[X]$. Exhibez une base dans laquelle la matrice de u n'a que des coefficients égaux à 0 ou 1.

2) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrez il existe un unique $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tq $P - P' = Q$. Montrez que si Q est à valeurs ≥ 0, il e nest de même pour P.

Ex 50 Soit D une matrice diagonale de coefficients $\lambda_1 \dots \lambda_n$ 2 à 2 distincts.

1) Etablir qu'une matrice commute avec D ssi elle est diagonale.

2) Montrez que le résultat est faux si on ne suppose pas les coeffs 2 à 2 distincts.

Ex 51 ✷Montrez que M, complexe et à diagonale strictement dominante, $\sum_{1\leq j\leq n\ j\neq i} |M_{ij}| < M_{ii}$ est inversible

Projecteurs

Définition : Un endomorphisme p de E est appelé projection (ou projecteur) ssi $p^2 = p \circ p = p$

Eléments caractéristiques : Les ***éléments caractéristiques*** d'une projection p, qui sont des sev de E, sont
- Le « *sur quoi* » on projette : $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id})$.
- Le « *parallèlement à quoi* » on projette : $G = \operatorname{Ker} p$.

Pour une projection p projettant ***sur*** F ***parallèlement à*** G, on a $E = F \oplus G = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker} p$.

Réduction (5/2) : $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur ***ssi*** diagonalisable et de valeurs propres 0 et 1 ***ssi*** annule $X^2 - X$.

Ex 52 ✍ Soit f un endomorphisme de rang 1.

1) Montrez $f^2 = \operatorname{tr}(f)\, f$.

2) Trouvez α pour que l'endomorphisme αf soit un projecteur.

Ex 53 ✌Soit p la projection sur F // à G. Montrez $q = \operatorname{Id} - p$ est la projection sur G // à F.

Ex 54 ✌Soient p et q deux projecteurs qui commutent. Montrez $p \circ q$ projecteur.

Ex 55 ✍ Soit E un $\mathbb{K}$-ev et φ une forme linéaire sur E. On définit $f(x) = \varphi(x)u$ où u est un vecteur de E. C.N.S. pour que f soit un projecteur ? Précisez ses éléments caractéristiques.

Ex 56 Soit $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ montrez matrice de projection. Donnez ses éléments caractéristiques.

Ex 57 ✌✍ Soit p un projecteur. Etablir $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p$.

Mines-Ponts PSI 2022 | CCP PSI 2011 (projecteur combinaison linéaire) ✷✍

Ex 58 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p, q, r 3 projecteurs.

1) Soit f un projecteur de E. Montrez $\operatorname{tr} f$ est un entier.

2) On suppose $p + \sqrt{2}q + \sqrt{3}r$ projecteur. Montrez $q = r = 0$. .

X PSI 2023 (base de projecteurs) ✷

Ex 59 Soit E un ev de dimension finie. Montrez il existe une base de $\mathscr{L}(E)$ formée de projecteurs.

Ex 60 Soient p, q 2 projecteurs d'un ev E et $r = p + q - p \circ q$. On suppose $\operatorname{Im} p \subset \operatorname{Ker} q$. Montrez r projecteur.

Mines-Ponts PSI 2014 (projecteur et polynôme annulateur)

Ex 61 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ tq $u^3 = u$. Montrez que u^2 est un projecteur. Que peut-on dire si $\operatorname{tr} u = \operatorname{rg} u$?

Ex 62 ✌

1) Soient u, v deux endomorphismes tq $u \circ v = v \circ u$. Etablir que $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

2) Montrez que v commute avec un projecteur p ***ssi*** $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ stables par v.

CCINP PSI 2024[2] -2022-2019 (égalité donnant des projecteurs)

Ex 63 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et p, q deux endomorphismes de E vérifiant $p+q = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q) \leq \dim E$.

1) Montrez $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q$ [**2019 :** Question absente] .

2) Montrez p et q sont des projecteurs.

Mines-Ponts PSI 2015 | Mines-Ponts PC 2012 (nilpotent d'indice 2)

Ex 64 Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Donnez une cns pour qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

Ex 65 ✷ Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^2$. Montrez que $\mathrm{Im}\,(u \circ v) = \mathrm{Im}\, u$ puis que $v \circ u = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Nilpotence

Définition : Une matrice carrée A est ***nilpotente*** ssi il existe un entier p tq $A^p = 0$

Ex 66 Montrez que $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est nilpotente ssi elle est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ex 67 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Etablir $I_n - A$ est inversible.

Ex 68 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent, cad $\exists\, q \in \mathbb{N}, f^q = 0$. E de dimension finie n. On appelle indice de nilpotence $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, f^k = 0\}$. Montrez l'existence de p.

1) Montrez qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas inversible.

2) Soit x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrez que $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.

3) Montrez $p \leq n$ et enfin $f^n = 0$.

4) L'ensemble des endomorphismes nilpotents est-il un ev?

Ex 69

Montrez il n'existe pas de racine carrée de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ni de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (*Utilisez l'exo précédent*)

CCINP PSI 2021 (jordanisation matrices 4×4 nilpotentes)

Ex 70 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 4.

1) Soit u un endomorphisme de E tq $\mathrm{rg}\, u = 2$ et $u^2 = 0$. **(i)** Montrez $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Im}\, u$. **(ii)** Montrez il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) Soit u un endomorphisme de E tq $\mathrm{rg}\, u = 3$ et $u^4 = 0$.

(i) Montrez $\mathrm{Ker}\, u^2 = \mathrm{Im}\, u^2$. **(ii)** Montrez il existe une base de E dans laquelle u est représenté par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Navale PSI 2022 (sevs stables d'un nilpotent cyclique)

Ex 71 Soit E un ev de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tq $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.

1) Montrez il existe $x \in E$ tq $(x, f(x), f^2(x))$ base de E. **Pas dans oral :** Écrire matrice dans cette base .

2) Montrez que la seule droite stable par f est celle engendrée par $f^2(x)$

3) ~~Montrez que le seul plan stable est celui engendré par $(f(x), f^2(x))$~~

Ex 72 ✷Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ nilpotent d'indice 2. Montrez que les sev de dim. 2 stables par f sont ceux contenant $\mathrm{Im}\, f$.

Mines-Ponts PSI 2022 (matrice nilpotente) ✷

Ex 73 Soit $J=\begin{pmatrix}0&1&0&\dots&0\\0&0&1&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\0&&&0&1\\0&0&\dots&0&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$

1) Soit A tq $A^p=0$ et $A^{p-1}\neq 0$. Montrez A semblable à J.

2) Soit A tq $A^p=0$ et $\operatorname{rg} A=p-1$. Montrez A semblable à J.

Somme d'Espaces Vectoriels

Définition : Si F et G sont 2 sev de E, $F+G$ est un sev de E : c'est **l'ensemble de toutes les sommes** des éléments de F et G. Si F et G sont de dimension finie, $F+G$ l'est aussi et $\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G)$

Somme directe : La somme $F+G$ est dite ***directe*** ssi $F\cap G=\{0\}$, on la note alors $F\oplus G$

Sevs supplémentaires : Deux sevs F et G sont dits ***supplémentaires*** dans E
- ***ssi*** $F\oplus G=E$. Par exemple $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\oplus\mathscr{A}_n(\mathbb{R})=\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- ***ssi*** $\dim F+\dim G=\dim E$ ***et*** $F\cap G=\{0\}$ (le plus utile en pratique)
- ***ssi*** $F+G=E$ ***et*** $F\cap G=\{0\}$ (en dimension infinie)
- ***ssi*** $\forall x\in E$, il existe des ***uniques*** $f\in F$ et $g\in G$ tels que $x=f+g$ (parallélogramme)

Ex 74 ✌ Soit H un hyperplan, montrez qu'un sev F est supplémentaire de H (cad $H\oplus F=E$) ssi c'est une droite non contenue dans H.

Ex 75 ✍ Soit E un ev de dimension $n\geqslant 2$. Soient $f\in\mathscr{L}(E)$ de rang 1 et $a\in E$ tels que $\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Vect}(a)=E$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}(f(a))$.

2) Montrer qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $f^2=\lambda f$.

Ex 76 Montrez que si u,v endomorphismes de E, F,G sevs de E, $u(E+F)=u(E)+u(F)$ mais, en général, on a seulement $(u+v)(F)\subset u(F)+v(F)$. A t-on $\operatorname{Im}(u+v)=\operatorname{Im} u+\operatorname{Im} v$?

Ex 77 ✍ Soit f et g deux endomorphismes de E $\mathbb{R}$-ev. On suppose $f\circ g\circ f=f$ et $g\circ f\circ g=g$. Etablir $\operatorname{Ker} f\oplus\operatorname{Im} g=E$ et $\operatorname{Ker} g\oplus\operatorname{Im} f=E$

CCINP MPBQ 2023->21 (somme du noyau et de l'image) ✍

Ex 78 Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.

1) Démontrer que : $E=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f\Longrightarrow\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2$.

2) **(a)** Démontrer que : $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2\Longleftrightarrow\operatorname{Ker} f=\operatorname{Ker} f^2$.

(b) Démontrer que : $\operatorname{Im} f=\operatorname{Im} f^2\Longrightarrow E=\operatorname{Im} f\oplus\operatorname{Ker} f$.

Ex 79 On suppose $E=F\oplus G$.

1) Soit $f\in Gl(E)$. Montrez $\varphi(F)\oplus\varphi(G)=E$.

2) soit H un sev de E. Montrez qu'on n'a pas toujours $E\cap H=(F\cap H)\oplus(G\cap H)$

Ex 80 ✷ ✍ E de base $(e_1\dots e_n)$, $G_i=\operatorname{Vect}(e_k)_{k\neq i}$ $H_i=\{f\in\mathscr{L}(E)\,/\,\operatorname{Ker} f\supset G_i\}$. Etablir $\mathscr{L}(E)=\bigoplus_{i=1}^{n} H_i$

Ex 81 ✍ Soit E un $\mathbb{K}$–espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension 4. Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 des endomorphismes de E tels que $f_1+f_2+f_3+f_4=\operatorname{Id}_E$ et $f_i\circ f_j=0$ si $i\neq j$.

1) Montrez que les f_i sont des projecteurs.

2) Montrez $\operatorname{Im} f_1\oplus\operatorname{Im} f_2\oplus\operatorname{Im} f_3\oplus\operatorname{Im} f_4=E$.

Ex 82 ✍ Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n+1. Etablir $\mathbb{C}_n[X] \oplus P(X)\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X]$
où, usuellement , $P(X)\mathbb{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes $\{P(X)Q(X) \ / \ Q(X) \in \mathbb{C}[X]\}$.

Ex 83 ✷Soient $f, h \in \mathscr{L}(E)$. Montrez $\operatorname{Ker} h \supset \operatorname{Ker} f$ ssi il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tq $h = g \circ f$.

Ex 84 ✷Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. Montrez $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g) \iff \operatorname{Im} f + \operatorname{Ker} g = E$.

Mines-Ponts PSI 2023 (étude de 2 sevs de $\mathscr{L}(E,F)$) ✷✍

Ex 85 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $a, b \in \mathscr{L}(E)$. on pose $D_a = \{a \circ v, v \in \mathscr{L}(E)\}$ et $G_b = \{v \circ b, v \in \mathscr{L}(E)\}$

1) Montrez que $D_a = \{f \in \mathscr{L}(E), \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} a\}$.

2) Donnez une relation similaire pour G_b

3) Soit $H_{ab} = D_a + G_b$. Donnez sa dimension.

4) Quel est le rang maximal d'un élément de H_{ab} ?

Polynômes de Lagrange

Définition : Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ réels ***distincts***. Les ***Polynômes de Lagrange en*** $(a_0, \dots, a_n)$ sont les $n+1$ polynômes $(L_0, \dots, L_n)$ de degré égal à n vérifiant $\forall\, 0 \le i, j \le n \quad L_i(a_j) = \delta_{ij}$

La famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ des $n+1$ polynômes de Lagrange en $a_0, \dots, a_n$ forment une ***base*** de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout polynôme P de degré $\le n$, les coordonnées de P dans cette base sont les $P(a_i)$

Ex 86 ✌

1) Calculez le polynôme de degré 2 qui interpole aux points $\big((-1,4), (2,4), (3,8)\big)$

2) En déduire ***tous*** les polynômes qui « *passent* » par ces 3 points.

Centrale PSI 2022 (polynômes de Lagrange et formules de Quadrature) ✷✍

Ex 87 Soit $(L_0, \dots, L_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall\, i, k \in [\![0; n]\!]$, $L_k(i) = \delta_{ik}$

1) Donnez la forme factorisée des L_k et exprimez le coefficient dominant avec des factorielles.

2) Montrez $(L_0, \dots, L_n)$ base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall\, 0 \le k \le n,\ P(k) = k^n$. Exprimez P de 2 manières différentes.

4) Donnez une expression simplifiée de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

5) Donnez la dimension de $\mathscr{L}\big(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}\big)$. Montrez il existe un unique $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^n P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k)$

TPE PSI 2019 (endomorphisme et division euclidienne) ✷☜

Ex 88 On note $E = \mathbb{C}_n[X]$ et F, G deux polynômes n'ayant pas de racine commune. On suppose G est de degré $n+1$ et scindé à racines simples de racines $a_0, \dots, a_n$. On note φ l'appli. qui à $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de FP par G.

1) Montrez que φ est un automorphisme de E.

2) Pour $0 \le i \le n$, on note $L_i(X) = \dfrac{1}{\prod_{j \ne i}(a_i - a_j)} \displaystyle\prod_{j \ne i} (X - a_j)$. Montrez $(L_0, \dots, L_n)$ base de E.

3) L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Ex 89 ✍

1) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \ne$ 2 à 2 et $f :\ T \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto \big(T(\lambda_1^3), \dots, T(\lambda_n^3)\big) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que f est un isomorphisme.

2) Explicitez T^{-1} (on pourra utiliser les polynômes de Lagrange)