Classe de PSI

Feuille d'Exercices 1

☞ **Thèmes des semaines du 5 et 12 Septembre 2016 :**

- Révision de l'algèbre de Sup : Matrices, Ev, bases, projections, morphismes, noyaux ,...
- Somme et somme directe de n sev, projecteurs associés. Sev stables.

✌ **Ex 1** On considère l'ensemble H des polynômes de la forme $aX^3+(b-2a)X^2-2bX+3a$. $(a,b$ réels). Montrez que c'est un plan. *(muni des lois usuelles)*. Précisez une base.

Ex 2 Soit $A\neq 0\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et φ tq $\varphi(M)=M-\operatorname{tr}(M)A$. Montrez φ est automorphisme ssi $\operatorname{tr}A\neq 1$.

✌ **Ex 3** Calculez noyau et image de $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$ donné dans la base canonique par $M=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\0&1&-1\\1&2&-3\end{pmatrix}$

✌ **Ex 4** Montrez f linéaire, puis calculez noyau et image de $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ donné par $f(P)=P'-4P$

Ex 5 Montrez φ endomorphisme de $\mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{C}\big)$ puis calculez noyau et image de $\varphi(f)(x)=\displaystyle\int_0^x f$

Ex 6 Soit la Matrice $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M)=AM$.

1) Déterminez $\operatorname{Ker}f$.

2) f est-il surjectif?

3) Trouvez une base de $\operatorname{Ker}f$ et de $\operatorname{Im}f$.

Ex 7 Soit D une matrice diagonale à coefficients diagonaux distincts et $\varphi: M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C})\longrightarrow MD-DM$. Déterminez $\operatorname{Ker}\varphi$ et $\operatorname{Im}\varphi$.

Ex 8 Soit $f\in\mathscr{L}(E)$. E de dimension finie.

1) Montrez $\operatorname{Ker}f\subset\operatorname{Ker}f^2$, puis $\dim\operatorname{Ker}f\leq\dim\operatorname{Ker}f^2\leq 2\dim\operatorname{Ker}f$.

✌ **2)** Montrez $\operatorname{Im}f^{p+1}\subset\operatorname{Im}f^p$ et $\operatorname{Ker}f^p\subset\operatorname{Ker}f^{p+1}$, pour p entier naturel.

3) Montrez il existe q entier tels que $\operatorname{Ker}f^q=\operatorname{Ker}f^{q+1}$. En déduire $\operatorname{Im}f^{q+1}=\operatorname{Im}f^q$

Etablir qu'alors, $\forall\,p\geq q$, $\operatorname{Ker}f^p=\operatorname{Ker}f^{p+1}$. Montrez on peut prendre $q=n$

4) Montrez, pour tout f, $\operatorname{Ker}f^n\oplus\operatorname{Im}f^n=E$

✌ **Ex 9** soit $J=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. Calculez J^2. Montrez J inversible et exprimez J^{-1}

Ex 10 Soient $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telless que $A+B=AB$. Montrez A et B commutent. (*Se généralise dans un anneau*)

Ex 11 Construire une matrice M réelle de taille paire quelconque telle que $M^2=-Id$. (*on la construira par blocs*). Justifiez que c'est impossible si l'ordre est impair. Que pensez-vous du cas complexe ?

✱ **Ex 12** Soient $f,g\in\mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie. Montrez $\operatorname{rg}(g\circ f)=\operatorname{rg}(g)\iff\operatorname{Im}f+\operatorname{Ker}g=E$.

✌ **Ex 13** Soient u,v deux endomorphismes tq $u\circ v=v\circ u$. Etablir que $\operatorname{Ker}u$ et $\operatorname{Im}u$ sont stables par v.

Ex 14 soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f\in\mathscr{L}(E)$. Montrez $A_f=\{g\in\mathscr{L}(E)\,/\,f\circ g\circ f=0\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Ex 15 Soit f et g deux endomorphismes de E $\mathbb{R}$-ev. On suppose $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
Etablir $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g = E$ et $\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} f = E$

Ex 16

1) Soit $J = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{smallmatrix}\right)$. Montrez que $C(J)$, le commutant de J (cad l'ensemble des matrices M tq $JM = MJ$) est un $\mathbb{R}$-ev et en donnez une base.

2) Existe-t-il une inclusion entre $C(J)$ et $D(J) = \{Y \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \,/\, Y^2 = J\}$? Trouvez $D(J)$.

Ex 17 Montrez que $\left(X^i(X-1)\right)_{0\le i\le n-1}$ est une base du $\mathbb{R}$-ev F défini par $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = 0\}$. Puis montrez que $\left((X-1)^i\right)_{1\le i\le n}$ en est une autre.

Ex 18 Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont distincts. Montrez que $(I_n, D, D^2, \dots, D^{n-$
est une base de l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Ex 19 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent, cad $\exists\, k \in \mathbb{N}, f^k = 0$. E de dimension finie n. On appelle indice de nilpotence $p = \min\{k \in \mathbb{N}^*, f^k = 0\}$. Montrez l'existence de p.

1) Montrez qu'un endomorphisme nilpotent n'est pas inversible.

2) Soit x tel que $f^{p-1}(x) \neq 0$. Montrez que $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

3) Montrez $p \le n$ et enfin $f^n = 0$.

4) L'ensemble des endomorphismes nilpotents est-il un ev ?

Ex 20 Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre l'équation $A^n = \left(\begin{smallmatrix} 0&1\\0&0 \end{smallmatrix}\right)$ d'inconnue $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. (*Utilisez l'exo précédent*).

Ex 21 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente. Etablir $I_n - A$ est inversible.

Ex 22 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & & a^{n-1} \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$. Montrez A inversible et calculez A^{-1}.

Ex 23

1) Soit $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$ montrez matrice de projection. Donnez ses éléments caractéristiques.

2) On se donne $n-1$ réels $a_2, \dots, a_n$. On considère la matrice M de coefficients $M_{ij} = \prod_{k=1}^{j} a_k \,/\, \prod_{k=1}^{i} a_k$, en convenant $a_1 = 1$. Mêmes questions que plus haut avec $M' = \frac{1}{n}M$.

Ex 24 Soient $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} I_n & B \\ B & I_n \end{pmatrix}$.
Trouvez une condition nécessaire et suffisante sur B pour que A soit inversible. Explicitez alors l'inverse de A.

Ex 25 Soit p un projecteur. Etablir $\operatorname{rg} p = \operatorname{tr} p$.

✷ **Ex 26** Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^2$. Montrez que $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$ puis que $v \circ u = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Ex 27 Soit u, v deux endomorphismes. Etablir $|\operatorname{rg} u - \operatorname{rg} v| \le \operatorname{rg}(u+v) \le \operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v$

Ex 28 Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1. Etablir, il existe une forme linéaire φ et $a \in E$ tels que $f(x) = \varphi(x).a$.

Ex 29 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{rg} A = 1$ et $\operatorname{tr} A = 1$. Montrez $A^2 = A$.

Ex 30 Montrez une matrice M est de rang 1 ssi il existe 2 matrices colonnes $X, Y \neq 0$ tels que $M = X\,{}^tY$.

Ex 31 Soient A, B deux matrices carrées de même ordre. Etablir $\operatorname{rg}(AB) \leq \inf(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B)$

Ex 32 Montrez que deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ex 33 Pour $n \geq 2$, et $(E) : M + {}^tM = 2(\operatorname{tr} M) I_n$,avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrez que Sol(E) est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminez sa dimension.

Ex 34 Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et V un sous-ev de E de dimension p. On pose $L = \{u \in \mathcal{L}(E) \,/\, V \supset \operatorname{Im} u\}$. Montrez que L est un ev de dim. finie et donnez sa dimension.

Ex 35 On se place dans le $\mathbb{R}$-ev des fonctions numériques réelles.

✌ **1)** Etablir que la famille $(x \to \cosh x, x \to e^x, x \to \sinh x)$ est liée. (On se place dans l'ev ?)

2) Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels. Montrez que la famille de vecteurs $(U_1, \ldots, U_n)$ de R^n définie par $U_i = (1 + a_1 b_i, 1 + a_2 b_i, \ldots, 1 + a_n b_i)$ est liée *Indication : montrez qu'elle est contenue dans un plan.*

✷ **3)** Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tq $f(\mathbb{R})$ est infini. On pose $f^n = f \times \cdots \times f$ (n fois) Montrez $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre.

✷ **4)** Montrez que la famille $(h_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre avec $h_a(x) = |x - a|$

Ex 36 Soit E un $\mathbb{K}$-ev et φ une forme linéaire sur E. On définit $f(x) = \varphi(x) u$ où u est un vecteur de E. C.N.S. pour que f soit un projecteur ? Précisez ses éléments caractéristiques.

Ex 37 Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n+1. Etablir $\mathbb{C}_n[X] \oplus P(X)\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X]$ où, usuellement , $P(X)\mathbb{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes $\{P(X)\,Q(X) \,/\, Q(X) \in \mathbb{C}[X]\}$.

✷ **Ex 38** Montrez que M, complexe et à diagonale strictement dominante, $\sum\limits_{1 \leq j \leq n\ j \neq i} |M_{ij}| < M_{ii}$ est inversible

Ex 39 Soient $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Etablir $\operatorname{tr}\left({}^tAB\right) = \sum\limits_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} b_{ij}$.

Ex 40 Montrez que l'inverse d'une matrice symétrique (inversible !) est aussi symétrique. et que l'inverse d'une matrice triangulaire (inversible !) est aussi triangulaire.

✷ **Ex 41** Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrez que u est une homothétie.

2) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ de trace nulle. Montrez il existe une base dans laquelle la matrice de v n'a que des 0 sur la diagonale.

Ex 42 Soient f et g deux endomorphismes de E qui commutent. On note D l'ensemble des vecteurs invariants par g et on suppose que c'est une droite de E. Montrez que $f(x)$ est colinéaire à x, pour $x \in D$.

Ex 43 Soit D une matrice diagonale de coefficients $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ 2 à 2 distincts.

1) Etablir qu'une matrice commute avec D ssi elle est diagonale.

2) Montrez que le résultat est faux si on ne suppose pas les coeffs 2 à 2 distincts.

3) Etablir que toute matrice commutant avec D peut s'écrire $a_0 I_n + a_1 D + a_2 D^2 + \cdots + a_{n-1} D^{n-1}$.

✷ **Ex 44** E de base $(e_1 \ldots e_n)$, $G_i = \operatorname{Vect}(e_k)_{k \neq i}$) $H_i = \{f \in \mathcal{L}(E) \,/\, \operatorname{Ker} f \supset G_i\}$. Etablir $\mathcal{L}(E) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} H_i$