

POLYNÔMES DE LAGRANGE

Théorème : Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n + 1$ réels *distincts* et $b_0, \dots, b_n$, $n + 1$ réels *quelconques*. Alors il existe un et un seul polynôme P de *degré inférieur ou égal à n* vérifiant $P(a_i) = b_i$.

Démo : Il faut et il suffit de démontrer que $\begin{cases} \phi: \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \rightarrow (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme. ϕ linéaire est laissé au lecteur. On remarque $\dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \mathbb{R}^{n+1} = n + 1$. il est donc suffisant d'établir $\text{Ker } \phi = \{0\}$. Soit P de degré $\geq n$ tel que $P(a_0) = \dots = P(a_n) = 0$. Ce polynôme a donc plus de racines (les a_i sont distincts et en nombre $n+1$) que son degré : c'est donc le polynôme nul, cad $P = 0$.

Remarques

- On dit que le P de l'énoncé est un polynôme *interpolant* en les $n + 1$ points (a_i, b_i) . Il en existe donc un seul de degré $\leq n$.
- Tous les autres polynômes vérifiant $P(a_i) = b_i$ (ou interpolant en les points (a_i, b_i)) sont les polynômes $P(X) + \prod_{i=0}^n (X - a_i) Q(X)$ avec $Q(X)$ quelconque (leur ensemble est le translaté, par P , de l'ev des polynômes multiples de $\prod_{i=0}^n (X - a_i)$).

Définition : Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n + 1$ réels *distincts*. On appelle *Polynômes de Lagrange en $(a_0, \dots, a_n)$* , les $n + 1$ polynômes $(L_0, \dots, L_n)$ de degré inférieur ou égal à n définis (d'après le théorème plus haut) par $\forall 0 \leq i, j \leq n \quad L_i(a_j) = \delta_{ij}$

Remarques

- Le i^{e} ième polynôme de Lagrange L_i (en $a_0, \dots, a_n$) est donc le polynôme de degré n ayant pour racines les a_j pour $j \neq i$ et valant 1 en a_i . Le lecteur vérifiera que c'est $L_i(X) = \lambda_i \prod_{j \neq i} (X - a_j)$ avec $\lambda_i = \frac{1}{\prod_{j \neq i} (a_i - a_j)}$
- Le polynôme (de degré $\leq n$) interpolant aux points (a_i, b_i) est alors $\sum_{i=0}^n b_i L_i(X)$

Exemple :

Les 3 polynômes de Lagrange en $(0, 1, 2)$ sont $L_0 = \frac{1}{2}(X-1)(X-2) \quad L_1 = -X(X-2) \quad L_2 = \frac{1}{2}X(X-1)$

Théorème : Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n + 1$ réels *distincts*.

Alors la famille des $n + 1$ polynômes de Lagrange en $a_0, \dots, a_n$, cad $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ forment une *base* de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour tout polynôme P de degré $\leq n$, les coordonnées de P dans cette base sont les $P(a_i)$.

Démo : $(L_0, \dots, L_n)$ est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$ car image de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ par l'isomorphisme ϕ^{-1} utilisé plus haut. Tout polynôme de degré $\leq n$ s'écrit donc $P(X) = \alpha_0 L_0(X) + \dots + \alpha_n L_n(X)$. En évaluant en a_i , on trouve $P(a_i) = 0 + \dots + 0 + \alpha_i + 0 + \dots + 0$

Exercice : La somme des polynômes de Lagrange en $(a_0, \dots, a_n)$ vaut 1 : $L_0(X) + \dots + L_n(X) = 1$

Démo : Il suffit d'écrire le polynôme constant 1 dans la base $(L_0, \dots, L_n)$, le théorème précédent donne que ses coordonnées sont $1(a_i) = 1$.

Vérifiez cette propriété sur l'exemple plus haut.