Sur l'intégrale de Dirichlet $\quad I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$

Cette intégrale est ***convergente*** mais ***pas absolument convergente***, (comme les séries $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ou $\sum \frac{\sin n}{n}$) ***ou*** La fonction-intégrande $f : t \longrightarrow \frac{\sin t}{t}$ n'est ***pas intégrable*** sur $\left]0, +\infty\right[$ mais ***l'intégrale existe***. (On notera dans cette dernière formulation le paradoxe apparent de « *vocabulaire* ».)

1 Convergence de l'Intégrale I :

- f est ***continue*** sur $\left]0, +\infty\right[$.
- ***Etude en 0 :***
  $|f(t)| = \frac{\sin t}{t} \sim_{0_+} \frac{t}{t} = 1$. la fonction ***se prolonge*** en une fonction continue en 0, donc ***intégrable*** en 0.
- ***Etude en*** $+\infty$ ***:***
  Les critères usuels ne « *marchant* » pas vraiment, on revient à la fonction « *intégrale partielle* ». On effectue une ipp en posant $u' = \sin t \quad v = \dfrac{1}{t} \quad u = -\cos t \quad v' = \dfrac{-1}{t^2}$
  $$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt \overset{(1)}{=} \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$
  - Le premier membre a une limite lorsque $x \to +\infty$, c'est $\frac{\cos 1}{1}$ (car $\frac{\cos x}{x} \to 0$)
  - Le 2$^{\text{e}}$ membre a une limite lorsque $x \to +\infty$ ***car*** l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ ***converge***. Elle converge ***car*** elle ***converge absolument***. Elle converge absolument car $t \to \frac{\cos t}{t^2}$ ***intégrable*** sur $\left[1, +\infty\right[$: cela résulte de la continuité et du critère de majoration (des fonctions ≥ 0) par $\frac{1}{t^2}$, Riemann intégrable.

  Cela établit la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$.

Remarque : Je vous laisse réfléchir au fait que l'on peut établir de la même manière, la convergence des intégrales délicates $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}\, dt$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\, dt$ et même $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha}\, dt$, pour $0 < \alpha \leq 1$ (pour $\alpha > 1$, il y a plus facile…)

2 Non intégrabilité de f en $+\infty$ ou non absolue convergence de I

Méthode 1 (par une astuce trigonométrique) :

On utilise la formule de trigonométrie $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$:
$$\forall x \in \left[1, +\infty\right[, \quad |\sin x| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x} \geq 0$$
L'intégrale de Rieman $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ diverge et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{2x}\, dx$ converge, par une méthode analogue à celle de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ vue plus haut. Par suite, par critère de minoration d'une fonction ***positive***, dvg + cvg = dvg, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ ***diverge***.

Méthode 2 (plus générale par une série) :

Montrons que f n'est ***pas intégrable*** sur $\left[\pi, +\infty\right[$. On revient à $F(x) = \displaystyle\int_\pi^x \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ et on doit prouver qu'il n'y a pas de limite finie, lorsque $x \to +\infty$. Par caractérisation séquentielle, il ***suffit*** de prendre une suite $x_n \longrightarrow +\infty$ telle que $F(x_n)$ n'a pas de limite finie. Considérons la suite $x_n = n\pi$. Par **Chasles**[1], en utilisant que la fonction $\sin x$ est du signe de $(-1)^k$ sur l'intervalle $\left[k\pi, (k+1)\pi\right]$ et que $\cos k\pi = (-1)^k$:

$$F(x_n) = \sum_{k=2}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t| = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (-1)^{k-1} \sin t\, dt$$
$$\geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi} (-1)^{k-1} \Big(\cos(k-1)\pi - \cos k\pi\Big) = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k\pi} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty \qquad \text{(série harmonique)}$$

Un calcul de l'intégrale de Dirichlet

On utilise une fonction auxiliaire, la transformée de Laplace de la fonction sinus-cardinal :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, e^{-xt}\, dt \qquad \text{on pose} f(x,t) = \frac{\sin t}{t}\, e^{-xt}$$

F est dérivable sur $J = \left]0,+\infty\right[$ par application du théorème (3/2:à la rentrée). Je ne mets que la domination :

Hypothèse de Domination sur tout segment $\left[a,b\right] \subset J$ **:**

$$\forall x \in \left[a,b\right] \subset J,\ \forall t \in \left]0,+\infty\right[,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \left|-\sin t\, e^{-xt}\right| \leq e^{-at} = \xi(t)$$

Majoration : décroissance de $x \to e^{-xt}$ ***car*** $t > 0$. ξ est ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$: immédiat ***car*** $a > 0$

Alors F est de classe C^1, continue et définie sur J. $\boxed{F'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin t\, e^{-xt}\, dt}$

F est définie sur $\left[0,+\infty\right[$, puisque $F(0) = I$ existe comme vu précédemment. F est même continue en 0 ***mais*** il ne va pas être possible d'utiliser le théorème adapté car la domination se révèle impossible en $x = 0$ (regardez la domination du théorème C^1). On va donc démontrer la continuité de F en 0 par une autre méthode.

On pose $G(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u}\, du$. Par définition d'une intégrale convergente, G a une limite lorsque $t \to +\infty$, qui n'est rien d'autre que I, l'intégrale de Dirichlet. On pratique une ipp avec $u' = G' = \frac{\sin t}{t}$ $\quad v = e^{-xt}$ $\quad u = G$ $\quad v' = -xe^{-xt}$:

$$\forall x > 0,\ F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt}\, dt = \left[\left(\int_0^t \frac{\sin u}{u} du\right) e^{-xt}\right]_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} G(t) x e^{-xt}\, dt = \int_0^{+\infty} G\left(\frac{u}{x}\right) e^{-u}\, du$$

L'ipp ***directement*** en $+\infty$ est valide car le membre du milieu admet bien une limite lorsque $t \to +\infty$ qui est 0 pour $x > 0$ à cause de l'exponentielle et le fait que $G(t) \to I$. On a ensuite effectué le changement de variables $u = xt$ dans la 2[e] intégrale. Maintenant, on effectuer la limite quand $x \to 0$ par le théorème de convergence dominée à paramètre continu. On pose $h(x,t) = G\left(\frac{t}{x}\right) e^{-t} \xrightarrow{x \to 0} G(+\infty) e^0 = I$. Je ne mets aussi que la domination :

Hypothèse de domination sur $\left[1,+\infty\right]$

$$\forall x \in \left[1,+\infty\right],\ \forall t \in \left]0,+\infty\right[,\quad \left|h(x,t)\right| \leq M e^{-t} = \xi(t)$$

G continue sur $\left[0,+\infty\right[$, admet une limite finie en $+\infty$, elle est donc bornée sur (par M) ξ est ***intégrable*** sur $\left]0,+\infty\right[$

On conclut $\lim\limits_{x \to 0} F(x) = \lim\limits_{x \to 0} \int_0^{+\infty} h(t)\, dt = \int_0^{+\infty} I e^{-t}\, dt = I\left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = I$

On termine par le calcul de $F'(x)$ puis $F(x)$ sur $\left]0,+\infty\right[$:

$$\forall x > 0,\ F'(x) = -\int_0^{+\infty} \Im\left(e^{it}\right) e^{-xt}\, dt \overset{(1)}{=} \int_0^{+\infty} \Im\left(-e^{it}\, e^{-xt}\right) dt \overset{(2)}{=} \Im\left(\int_0^{+\infty} -e^{(i-x)t}\, dt\right)$$

$$= \Im \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{e^{(i-x)t}}{x-i}\right]_{t=0}^{t=A} \overset{(3)}{=} \Im\left(\frac{-1}{x-i}\right) = \Im\left(\frac{-x-i}{|i-x|^2}\right) = \boxed{\frac{-1}{1+x^2}}$$

- **(1)** e^{-xt} est réel.
- **(2)** Propriété de l'intégrale complexe (dès qu'elle existe).
- **(3)** On justifie proprement la limite complexe en se rappelant qu'une limite est nulle ssi celle de son module est nulle. Par suite : $\left|\frac{e^{(i-x)A}}{i-x}\right| = \frac{1}{|i-x|} 1 \times e^{-xA} \to 0$ lorsque $A \to +\infty$ $(|e^{iA}| = 1)$

On en déduit $F(x) = -\arctan x + k$. On calcule la constante k par la limite en $+\infty$ de F qui vaut 0 (il suffit d'encadrer, je vous laisse le traiter). On en déduit $k = \frac{\pi}{2}$. Puis :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt} = I = F(0) = \lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0}\left(-\arctan(x) + \frac{\pi}{2}\right) \boxed{= \frac{\pi}{2}}$$