# Quelques corrections sur l'intégrabilité

## Exo1

$\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}}$

***Existence :*** La fonction $f : t \to \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $]0,1[$ . L'intégrabilité sur $]0,1[$ résulte de l'application du critère d'équivalent des fonctions positives :

$$\left|f(t)\right| \sim_0 -\ln t \qquad \left|f(t)\right| \sim_1 \frac{|t-1|}{\sqrt{1-t}} = \sqrt{1-t}$$

$t \to \ln t$ est intégrable sur $]0,1]$ (cours). La deuxième équivalence prouve que $f$ se prolonge en une fonction continue en 1.

***Calcul :*** Une intégration par parties sur $[\varepsilon, x] \subset ]0,1[$ avec $u = \ln(t)$ $u' = \dfrac{1}{t}$ $v' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ $v = -2\sqrt{1-t}$ amène

$$\int_\varepsilon^x \frac{\ln t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = \left[-2\ln(t)\sqrt{1-t}\right]_\varepsilon^x + \int_\varepsilon^x \frac{-2\sqrt{1-t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

***Note :*** On ne peut écrire l'ipp ***directement*** sur [0,1] car les « *2 morceaux divergent* » (je vous laisse regarder).
La limite lorsque $x \to 1$ existant pour chaque partie, la fonction dans l'intégrale étant continue en 1, on effectue ensuite le changement de variable $u = \sqrt{1-t}$ soit $u^2 = 1-t$ $t = 1-u^2$ $\mathrm{d}t = -2u\,\mathrm{d}u$ :

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 \frac{\ln t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} &= 2\ln(\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} + \int_\varepsilon^1 \frac{-2\sqrt{1-t}}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln(\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} + 4\int_{\sqrt{1-\varepsilon}}^0 \frac{u^2}{1-u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= 2\ln(\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} + 4\int_{\sqrt{1-\varepsilon}}^0 -1 + \frac{1/2}{1-u} + \frac{1/2}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\ln(\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} + 4\left[-u - \frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln(1+u)\right]_{\sqrt{1-\varepsilon}}^0 \\
&= 2\ln(\varepsilon)\sqrt{1-\varepsilon} + 4\left(-\sqrt{1-\varepsilon} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\varepsilon}}{1-\sqrt{1-\varepsilon}}\right|\right) \\
&\overbrace{=}^{(*)} 2\ln\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)\right) + 4\left(-1 + \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon) + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+(1-\frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)}{1-(1-\frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)}\right|\right) \\
&= 2\ln\varepsilon - 4 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + 2\varepsilon \underbrace{-\frac{1}{4}\varepsilon^2\ln\varepsilon + o(\varepsilon^2\ln(\varepsilon))}_{o(\varepsilon)} + 2\left(\ln\left|\frac{2-\frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)}{\frac{1}{2}\varepsilon\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon + o(\varepsilon)\right)}\right|\right) \\
&= 2\ln\varepsilon - 4 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + 2\varepsilon + o(\varepsilon) + 2\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\left(2 - \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)\right)\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon + o(\varepsilon)\right)^{-1}\right) \\
&= 2\ln\varepsilon - 4 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + 2\varepsilon + o(\varepsilon) + 2\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\left(2 - \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)\right)\left(1 - \frac{1}{4}\varepsilon + o(\varepsilon)\right)^{-1}\right) \\
&= 2\ln\varepsilon - 4 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + 2\varepsilon + o(\varepsilon) + 2\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\left(2 - \varepsilon + o(\varepsilon)\right)\right) \\
&= 2\ln\varepsilon - 4 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + 2\varepsilon + o(\varepsilon) + 2\left(-\ln\varepsilon + \ln 4 + \ln(1 - \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon))\right) \\
&= 2\ln\varepsilon - 4 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + 2\varepsilon + o(\varepsilon) + 2\left(-\ln\varepsilon + \ln 4 - \frac{1}{2}\varepsilon + o(\varepsilon)\right) \\
&= -4 + 4\ln 2 - \varepsilon\ln(\varepsilon) + \varepsilon + o(\varepsilon) \longrightarrow \boxed{-4 + 4\ln 2}
\end{aligned}$$

(*) : Il faut développer le premier terme à un ordre de plus, car un $o(\varepsilon\ln\varepsilon)$ n'est pas un $o(\varepsilon)$ tandis que $o(\varepsilon^2\ln\varepsilon)$, lui, l'est. Il faut aussi développer le bas de la fraction avec un ordre de plus, puisque, en anticipant la division par $\varepsilon$, $o(\varepsilon)/\varepsilon = o(1)$, mais $o(\varepsilon^2)/\varepsilon = o(\varepsilon)$. Il faut aussi faire attention à l'ordre de négligeabilité (faire un rapport) des termes pour bien les ordonner dans le développement.

Juste pour info, voila un exemple de calcul de ipp ou on peut « *presque* » procéder directement car ici, les deux morceaux existent, néanmoins il y a une ***convergence à vérifier***.

On pose $u = \arctan t \quad v' = \dfrac{1}{t^2} \quad u' = \dfrac{1}{1+t^2} \quad v = -\dfrac{1}{t}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2}\, \mathrm{d}t \overbrace{=}^{(1)} \left[-\frac{\arctan t}{t}\right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t^2)}\, \mathrm{d}t \overbrace{=}^{(2)} \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} -\frac{1}{t} + \frac{t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi}{4} + \lim_{A\to+\infty} \left[-\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right]_1^A = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 + \lim_{A\to+\infty} \ln\left(\frac{\sqrt{1+A^2}}{A}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2}$$

L'IPP ***directe*** du (1) se ***justifie*** par le fait que la limite en $+\infty$ du premier morceaux existe et est finie, c'est $\pi/2/+\infty = 0$. Pour le (2), on a décomposé en éléments simples selon la méthode usuelle (je n'expose pas les détails ici).

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{\mathbf{izt}-\mathbf{t}^2}\,\mathbf{cos\,(t)\,dt}\ \ (\mathbf{z}\in\mathbb{C})}$$

La fonction $g : t \to e^{izt-t^2}\cos(t)$ est continue sur $[0,+\infty[$. On a $|g(t)| = |\cos t|e^{-t^2}e^{-\Im\mathrm{m}\, zt}$. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a immédiatement, par croissances comparées, $\lim_{+\infty} t^2|g(t)| = 0$, ce qui amène $|g(t)| = o_{+\infty}(1/t^2)$ puis l'intégrabilité de $g$ sur $[0,+\infty[$.

***Remarque*** : Rappel $\left|e^z\right| = e^{\Re\mathrm{e}\, z} \quad \arg(e^z) = \Im\mathrm{m}\, z$

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \mathbf{t}^{\left(\frac{-\mathbf{t}}{\mathbf{t}+\mathbf{1}}\right)}\,\mathbf{dt}}$$

La fonction $f : t \to t^{\left(\frac{-t}{t+1}\right)} = \exp\left(\dfrac{-t\ln t}{t+1}\right)$ est clairement continue sur $]0,+\infty[$.

- En $t = 0$.

  ***Méthode 1 :*** On utilise le « *critère $t^a f(t)$* » de **Riemann** [1] :
  $\sqrt{t}f(t) = \exp\left(\dfrac{1}{2}\ln t + \dfrac{-t\ln t}{t+1}\right) = \exp\left(\dfrac{(-1/2t+1/2)\ln t}{t+1}\right)$ et $\dfrac{(-1/2t+1/2)\ln t}{t+1} \sim_0 \dfrac{1/2\ln t}{1} \to -\infty$
  par composition de limites avec exp, il vient $\lim_0 \sqrt{t}f(t) = e^{-\infty} = 0$, puis l'intégrabilité de $f$ sur $]0,1]$.

  ***Méthode 2 :*** On utilise le résultat ***limite-programme*** qui donne l'$\sim$ d'un exp : si $f = g + o_a(1)$, $e^f \sim_a e^g$.
  $\dfrac{-t\ln t}{t+1} = -t\ln t\Big(1 - t + o(t)\Big) = -t\ln t + o(1) \implies f(t) \sim_0 \exp\Big(-t\ln t\Big) = t^{-t}$
  Ce « ***n'est pas du*** » Riemann, et on est encore obligé d'utiliser le même critère pour prouver l'intégrabilité de $t^{-t}$ sur $]0,1]$ : $\lim_0 \sqrt{t}\, t^{-t} = 0$.

- En $t = +\infty$

  ***Méthode 1 :*** On essaye d'utiliser le « *critère $t^a f(t)$* » de **Riemann**[1] (Attention borne infinie) :
  $$t^a f(t) = \exp\left(\frac{\Big((a-1)t+a\Big)\ln t}{t+1}\right) \text{ et } \frac{\Big((a-1)t+a\Big)\ln t}{t+1} \sim_{+\infty} \begin{cases} \dfrac{(a-1)t\ln t}{t} \longrightarrow \operatorname{sgn}(a-1)\,\infty & \text{si } a\neq 1 \\ \dfrac{\ln t}{t} \longrightarrow 0 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$
  Par composition de limites avec exp, il vient, selon le paramètre $a$, si $a > 1$, $\lim_{+\infty} t^a f(t) = +\infty$, si $a < 1$, $\lim_{+\infty} t^a f(t) = 0$, si $a = 1$, $\lim t^a f(t) = 1$. Bref, le critère donné en cours ne « marche » pas.

  ***Méthode 2 :*** Comme plus haut, on cherche un équivalent de l'exponentielle :
  $\dfrac{-t\ln t}{t+1} \sim_{+\infty} \dfrac{-t\ln t}{t} = -\ln t$ d'où $|f(t)| \sim_{+\infty} \exp(-\ln t) = \dfrac{1}{t^1}$
  De par la comparaison avec une fonction de **Riemann**[1], la fonction $f$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$

1. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction $\zeta$ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

L'intégrale diverge donc.

***Remarques***

- $h = o_a(1) \iff \lim_a h = 0$
- le « *raisonnement* » $e^f \sim e^g$ car $f \sim g$ est ***faux*** et le résultat en général faux aussi...
(ici, le résultat est vrai, par chance).
- Avec un critère $t^a f(t)$ amélioré, que je n'ai pas donné en cours, le critère pouvait « marcher » en $t = +\infty$.

$$\int_0^1 \underbrace{t^a \left(\ln \frac{1}{t}\right)^b}_{f_{ab}(t)} \mathrm{d}t \qquad (a, b \in \mathbb{R}) \qquad\qquad f_{ab}(t) = t^a (-\ln t)^b = \frac{1}{t^{-a}(-\ln t)^{-b}} \geq 0$$

Avant de commencer, rappelons $\ln t \leq 0$ sur $\left[0, 1\right[$ et $\ln u \sim_1 (u-1)$. (Note : on a bien une intégrale de **Bertrand**[2] en 0 **mais pas** en 1). Attention au fait que **Riemann**[1] « *marche à l'envers* » pour les bornes finies et que $-a < 1 \iff a > -1$.

► $t \to f_{ab}(t)$ est ***continue*** sur $\left]0, 1\right[$ .

► $\left|f_{ab}\right| \sim_1 \dfrac{1}{1 \times (1-t)^{-b}}$. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 \times (1-t)^{-b}}$ est une intégrale de **Riemann**[1] (***en 1***) convergente ssi $-b < 1 \iff b > -1$.

Du critère d'équivalent pour les fonctions $\geq 0$, il résulte que $\boxed{\displaystyle\int_{1/2}^1 f_{ab}(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge ssi } b > -1}$. (***Attention !*** au 1/2).

► Le critère d'équivalent ne donne rien en 0 (car il donne la même chose...). Le critère adapté est le critère $t^\alpha f(t)$. (***Attention !***, là-aussi, il faut le prendre « *à l'envers* ») :

- $\boxed{a > -1}$, soit $-a < 1$
Dans ***ce cas***, on ***prend*** $\alpha = \dfrac{1-a}{2}$ (car c'est une valeur qui vérifie, « *ce qu'il faut* », cad $-a < \alpha < 1$. En fait c'est le milieu entre 1 et $-a$, car la demie-somme). on ***vérifie le critère*** : On a bien $\alpha = \dfrac{1-a}{2} \leq \dfrac{2}{2} = 1$ et :
$$t^\alpha f_{ab}(t) = t^{\alpha+a} (-\ln t)^b = t^{(1+a)/2} (-\ln t)^b \longrightarrow 0 \qquad \text{lorsque } t \longrightarrow 0$$
ceci résultant des croissances comparées et du fait que $1 + a > 0$. Ce critère amène la ***convergence*** de $\displaystyle\int_0^{1/2} f_{ab}(t)\,\mathrm{d}t$.

- $\boxed{a < -1}$, soit $-a > 1$. Dans ***ce cas***, on ***prend*** $\alpha = \dfrac{1-a}{2}$ (car c'est une valeur qui vérifie, « *ce qu'il faut* », cad $-a > \alpha > 1$). On ***vérifie le critère*** : on a bien $\alpha = \dfrac{1-a}{2} \geq \dfrac{2}{2} = 1$ et :
$$t^\alpha f_{ab}(t) = t^{\alpha+a} (-\ln t)^b = t^{(1+a)/2} (-\ln t)^b \longrightarrow +\infty \qquad \text{lorsque } t \longrightarrow 0$$
ceci résultant des croissances comparées et du fait que $1 + a < 0$. Ce critère amène la ***divergence*** de $\displaystyle\int_0^{1/2} f_{ab}(t)\,\mathrm{d}t$.

2. **Joseph Bertrand** : mathématicien français (1822-1900).
1. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction $\zeta$ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

- $\boxed{a=-1}$

  Ici, on revient directement ***à la définition***, cad l'intégrale « *partielle* » puis on fait ***tendre*** $x \longrightarrow 0$. (on rappelle que l'intégrale converge ssi la limite de l'intégrale partielle existe et est finie) :

$$\int_x^{1/2} \underbrace{\frac{1}{t}(-\ln t)^b}_{u'\times(-u)^b} \,\mathrm{d}t = \begin{cases} \text{si } b \neq -1 & \left[\dfrac{-(-\ln t)^{b+1}}{b+1}\right]_x^{1/2} = \dfrac{1}{b+1}\Big(-\ln^{b+1} 2 + (-\ln x)^{b+1}\Big) \longrightarrow \begin{cases} +\infty & \text{si } b > -1 \\ \dfrac{-\ln^{b+1} 2}{b+1} & \text{si } b < -1 \end{cases} \\ \text{si } b = -1 & \Big[-\ln\Big(-\ln t\Big)\Big]_x^{1/2} = -\ln(\ln(2)) + \ln(-\ln x) \longrightarrow +\infty \end{cases}$$

Conclusion partielle : $\displaystyle\int_0^{1/2} f_{ab}$ converge ssi $a > -1$ ou $a = -1$ et $b > -1$ (Bertrand, en fait...)

$$\boxed{\textbf{\textit{Conclusion :}} \int_0^1 f_{ab} \text{ converge } \textbf{\textit{ssi}} \int_0^{1/2} f_{ab} \text{ converge } \textbf{\textit{et}} \int_{1/2}^1 f_{ab} \text{ converge, cad ssi } b > -1 \text{ et } a > -1}$$

## Exo 10

Commençons par établir le résultat suivant par récurrence sur $n \geq 1$ :

$\mathscr{P}(n)$ : Si $f$ continue s'annule en exactement $n$ valeurs comptées distinctement, et notées ordonnées $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$, sur un intervalle $I$, alors il existe un sous-ensemble $J_n \subset [\![1,n]\!]$ tel que $f(t)\displaystyle\prod_{i\in J_n}(\lambda_i - t)$ soit de signe constant sur cet intervalle $I$ :

- $n = 1$. Si $f$ ne change pas de signe en $\lambda_1$, comme $f$ ne s'annule pas ailleurs sur l'intervalle $I$, il y est de signe constant d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $I = \emptyset$ convient. sinon il est immédiat que $(\lambda_1 - t)f(t)$ convient, donc $I = \{1\} \subset [\![1]\!]$. $\mathscr{P}(1)$ Ok.

- Supposons la propriété vraie pour $n \geq 1$. soit $f$ continue et s'annulant en exactement $n+1$ valeurs telles que $\lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1}$ sur un intervalle $I$. Alors sur l'intervalle $I \cap \left]-\infty, \frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{2}\right] = K$, il existe exactement $n$ valeurs sur lesquels $f$ s'annule qui sont bien évidemment $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. (rappelons $\lambda_n < \frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{2} < \lambda_{n+1}$). Par hypothèse de récurrence, il existe $J_n \subset [\![1,n]\!]$ tel que $g(t) = f(t)\prod_{i\in J_n}(\lambda_i - t)$ soit de signe constant sur $K$. Comme $f$ est continue, par le théorème des valeurs intermédaires, $g$ l'est aussi et ne peut changer de signe sur $\left]\lambda_n, \lambda_{n+1}\right[$. En fait $g$ ne peut changer de signe sur $I$ qu'en $\lambda_{n+1}$. Si $g$ n'y change pas de signe, on prend $J_{n+1} = J_n$ et $g(t)$ est bien de signe constant. Si $g(t)$ change de signe en $\lambda_{n+1}$, le lecteur constatera que $(\lambda_{n+1} - t)g(t)$, lui, ne change plus de signe et pas non plus sur $I$. On prend donc $J_{n+1} = J_n \cup \{n+1\} \subset [\![1, n+1]\!]$. $\mathscr{P}(n+1)$ est bien vérifié.

***Remarque*** : En fait on a démontré $J_n = \Big\{ i \in [\![1,n]\!] \;\Big|\; f \text{ change de signe en } \lambda_i \Big\}$

On démontre alors le résultat par l'absurde : supposons $f$ continue possédant exactement $p$ racines sur $\left]0,1\right[ = I$ notées ordonnées $\lambda_1 < \cdots < \lambda_p$ avec $p \leq n$ et vérifiant $\forall\, 0 \leq i \leq n$, $\int_0^1 t^i f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. En se servant du résultat plus haut, il existe un ensemble d'indices $J$ de cardinal inférieur à $p$, donc à $n$ tel que $g(t) = f(t)\prod_{i\in J}(\lambda_i - t)$ soit de signe constant. Comme $\prod_{i\in J}(\lambda_i - t)$ est un polynôme de degré $\leq n$, cad combinaison linéaire de $t^i$, par linéarité de l'intégration, il vient $\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. En utilisant un théorème bien connu, comme $g$ est continue et de signe constant, on en déduit $g = 0$ sur $[0,1]$ ce qui amène une infinité de racines pour $f$. Absurde.

**Exo 16**

Rappelons la définition de la partie entière d'un réel $x$ : $k \in \mathbb{Z} = E(x) \iff k \leq x < k+1$. la fonction $x \longrightarrow E(x)$ est continue (et même en escaliers) par morceaux sur $\mathbb{R}$. Pour $0 < x \leq 1$, $\frac{1}{x} \geq 1$ :

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = k \iff k \leq \frac{1}{x} < k+1 \iff \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k} \qquad \text{sur } \left]\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right] \quad xE\left(\frac{1}{x}\right) = kx$$

L'application $\psi : x \to xE\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc continue (affine) par morceaux sur $]0,1]$ . Ici, il est plus sage de revenir à l'intégrale partielle pour montrer la convergence, on prend $k$ entier naturel non nul, on pose $F(x) = \int_x^1 \psi$ et on applique **Chasles**[3] :

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{k+1}\right) &= \int_{1/(k+1)}^{1} \psi = \sum_{i=1}^{k} \int_{1/(i+1)}^{1/i} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} \int_{1/(i+1)}^{1/i} i\; x\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{2}\left[x^2\right]_{1/(i+1)}^{1/i} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \frac{2i+1}{2i(i+1)^2} \overbrace{=}^{(*)} \sum_{i=1}^{k} \frac{1/2}{i} - \frac{1/2}{i+1} + \frac{1/2}{(i+1)^2} \\
&= \frac{1/2}{1} - \frac{1/2}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[k \longrightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{1^2}\right) = \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

(*) résulte de la décomposition en éléments simples (on ne met pas le détail ici), ensuite il faut remarquer le « *téléscopage* » des deux premiers termes. On rappelle aussi la somme usuelle $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

***Attention*** à ne pas en déduire tout de suite que l'intégrale converge car $F(1/k+1)$ ce n'est pas $F(x)$...On a juste prouvé que si l'intégrale converge, elle vaut $\frac{\pi^2}{12}$. On remarque d'avord que $\psi$ est positif, ce qui amène $F$ croissante, il faut et il suffit donc de majorer $F$. Or pour tout $x \in ]0,1]$ , il existe un entier $k$ tel que $x \leq \frac{1}{k+1}$, il vient $F(x) \leq F(\frac{1}{k+1}) \leq \frac{\pi^2}{12}$.

***Remarque*** : En fait, on peut très rapidement montrer la convergence de l'intégrale par l'intégrabilité de $\psi$ qui découle du critère de majoration des fonctions positives, puisque $\forall\, x \in ]0,1]$ , $\left|\psi(x)\right| \leq 1$ ! $(kx \leq k\frac{1}{k} = 1$ en revenant plus haut) mais ceci ne donne pas la valeur de l'intégrale.

3. **Michel Chasles** : mathématicien français (1793-1880). A introduit en géométrie les grandeurs orientées. Auteur d'un *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie.*

**Exo 17**

On pose $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2\,|\sin x|^{3/2}}$.

La continuité sur $\mathbb{R}$ est immédiate, vu la non nullité du dénominateur. On va suivre l'indication de l'énoncé qui laisse sous-entendre que les critères de convergence usuels ne s'appliqueront pas bien. On revient à « *l'intégrale partielle* » et vu la parité, on ne « s'occupe » que de $+\infty$ : on pose $F(x)=\int_{\pi/2}^{x} f$ et

$$F\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\int_{\pi/2}^{n\pi/2}\frac{1}{1+x^2\,|\sin x|^{3/2}}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi+\pi/2}\frac{1}{1+x^2\,|\sin x|^{3/2}}\,\mathrm{d}x}_{u_k}$$

On montre d'abord la convergence de cette série $\sum u_n$ à termes positifs avec le changement $u=x-n\pi$ :

$$\begin{aligned}
u_n&=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u+n\pi)^2|\sin u|^{3/2}}\le\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{1+(-\pi/2+n\pi)^2|\sin u|^{3/2}}\\
&\overbrace{=}^{(1)}2\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}u}{1+(-\pi/2+n\pi)^2\sin u^{3/2}}\overbrace{\le}^{(2)}\int_0^{\pi/2}\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+(-\pi/2+n\pi)^2\left(\frac{2}{\pi}u\right)^{3/2}}=\int_0^{\pi/2}\frac{2\,\mathrm{d}u}{1+\alpha(n-1/2)^2u^{3/2}}\\
&\overbrace{=}^{(3)}\frac{1}{(n-1/2)^{4/3}}\int_0^{(n-1/2)\beta}\frac{\gamma dv}{1+v^{3/2}}\overbrace{\le}^{(4)}\frac{1}{(n-1/2)^{4/3}}\int_0^{+\infty}\frac{\gamma dv}{1+v^{3/2}}
\end{aligned}$$

La série converge par comparaison à une série de **Riemann**[1] convergente $(4/3>1)$. Le (1) résulte de la parité assurée par la majoration précédente. Le « *choix initial subtil* » de $\pi/2$ permet d'utiliser la minoration issue d'un argument de convexité que je ne détaille pas ici mais qui donne un résultat bien connu (et à retenir pour les élèves « *ambitieux* ») sur $\left[0,\pi/2\right]$, $\sin u\ge\frac{2}{\pi}u$. Les constantes strictement positives $\alpha,\beta,\gamma$ ne sont pas calculées par efficacité. Le dernier changement de variables du (3) $v=\alpha^{2/3}\,(n-1/2)^{4/3}\,u$ a pour but de « *complètement extraire le n* ». La dernière majoration du (4) résulte de la positivité et de la convergence de l'intégrale (immédiat).

On termine en remarquant que « *tout* » est positif ce qui permet de majorer et de prouver la convergence en majorant la fonction croissante $F$ (et donc l'intégrabilité de $f$ puisque la fonction est positive )

$$0\le F(x)\le F\left(\left(E\left(\frac{x}{\pi}\right)+1\right)\pi+\frac{\pi}{2}\right)\le\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1/2)^{4/3}}\right)\int_0^{+\infty}\frac{\gamma dv}{1+v^{3/2}}=cste$$

***Remarques***

- La convergence et l'intégrabilité étant des notions locales, il est plus simple d'étudier sur $\left[\pi/2,+\infty\right[$ car cela évite un « résidu ».
- $E\left(\dfrac{x}{\pi}\right)\pi\le x<\left(E\left(\dfrac{x}{\pi}\right)+1\right)\pi$ permet d'encadrer $x$ par deux $n\pi$ consécutifs.
- On notera que cette intégrale « donne » un exemple d'une fonction ***intégrable*** dans un voisinage de $+\infty$ ***mais on n'a pas*** $\lim_{+\infty}f=0$. (En fait il n'y a pas de limite, comme le cours nous l'a appris, le lecteur est invité à le prouver en considérant deux suites...)
- Il est tout à fait possible qu'il y ait une méthode plus courte...

**Exo 20**

Je vous démontre juste ici l'intégrabilité de $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^2)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$ avec $\alpha > 1$ (j'ai échangé le « *nom* » des variables par commodité). Premièrement, la ***continuité*** sur $\mathbb{R}$ a été établie à la question précédente et de la parité, il reste à démontrer l'intégrabilité dans un ***voisinage*** de $+\infty$. L'énoncé nous suggère d'utiliser le « *critère* $n^a u_n$ ». Nous allons donc démontrer $\lim_{x\longrightarrow+\infty} t^\beta F(t) = 0$ avec $\beta > 1$ qu'il ***faudra choisir explicitement***. On utilise la ***caractérisation séquentielle*** d'une limite qui permettra d'invoquer le ***théorème de convergence dominée de Lebesgue***[4] . Soit donc une suite $(x_n) \longrightarrow +\infty$ ***quelconque*** :

$$x_n^\beta F(x_n) = \int_1^{+\infty} \underbrace{\frac{x_n^\beta}{(t^2+x_n^2)^\alpha}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

- ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** $(f_n)$ ***sur*** $[1,+\infty[$ ***:***

  ***Pour tout*** $1 < t < +\infty$, on a : $f_n(t) \sim_{n\to+\infty} \frac{x_n^\beta}{x_n^{2\alpha}} \longrightarrow 0$ ***à condition que*** $2\alpha > \beta$

- ***Domination :***

$$\forall\, 1 < t < +\infty, \quad \left|f_n(t)\right| \leq \frac{(x_n^2)^{\beta/2}}{(t^2+x_n^2)^\alpha} \leq \frac{(t^2+x_n^2)^{\beta/2}}{(t^2+x_n^2)^\alpha} = \frac{1}{(t^2+x_n^2)^{\alpha-\beta/2}} \leq \frac{1}{(t^2)^{\alpha-\beta/2}}$$

  Selon le critère de **Riemann**[1] cette fonction est intégrable ***ssi*** $\alpha - \frac{1}{2}\beta > 1$. Le théorème de **Lebesgue**[4] ***s'appliquera si*** on peut trouver un réel $\beta$ vérifiant à la fois $\beta < 2\alpha$ et $\alpha > 1 - \frac{1}{2}\beta$.

  Le réel $\beta = \alpha$ ***convient*** puisque $2\alpha > \alpha$ (car $\alpha > 0$) et $\alpha > 1 - \frac{1}{2}\alpha \iff \frac{3}{2}\alpha > 1 \iff \alpha > \frac{2}{3}$, car $\alpha > 1$ par hypothèse.

## Exo23

On pose $F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{t f(t)}{t+ix}}_{g_x(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $f$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme l'énoncé demande d'étudier la limite de $F$ en $x = 0$, il faut au moins vérifier l'existence de $F$ dans un voisiange de 0. Elle résulte de :

- $t \to g_x(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$=$[0,+\infty[$, car $f$ l'est par hypothèse et $t + ix$ ne s'annule pas au voisinage (pointé) de 0 (il s'annule pour $t = x = 0$), donc ***pour tout*** $x \neq 0$

- $\left|g_x(t)\right| = \frac{|t|\,|f(t)|}{\sqrt{t^2+x^2}} \leq \frac{|t|\,|f(t)|}{|t|} \leq \left|f(t)\right|$.

  L'intégrabilité de $f$ sur $\mathbb{R}$ amène donc, par critère de majoration, l'intégrabilité de $g_x(t)$ sur $\mathbb{R}$, ***pour tout*** $x$ ***réel***.

On vient de ***démontrer*** que $F(x)$ est ***définie*** sur (au moins) $\mathbb{R}^*$ .

Pour étudier la limite de $F$ en $x = 0$, nous allons étudier la ***carcatérisation séquentielle*** d'une limite. Nous considérons donc ***une suite quelconque*** $(x_n)$ telle que $x_n \longrightarrow 0$, et nous allons regarder si $F(x_n)$ admet une (même) limite $\ell$. Nous allons utiliser le ***théorème de convergence dominée de*** **Lebesgue**[4]. On pose :

$$I_n = F(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{t f(t)}{t+ix_n}}_{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

4. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

1. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction $\zeta$ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.

4. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

- $f_n$ est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- On a clairement $f_n(t) \longrightarrow \dfrac{tf(t)}{t+i0} = f(t)$ et ceci ***pour tout*** $t$ de l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$. On a donc ***la convergence simple*** de la suite de fonctions $(f_n)$ vers la fonction $f(t)$ qui est ***bien continue par morceaux*** sur $\mathbb{R}$.
- ***Hypothèse de Domination :***

$$\left|\frac{tf(t)}{t+ix_n}\right| = \frac{|t|\,|f(t)|}{\sqrt{t^2+x_n^2}} \leq \frac{|t|\,|f(t)|}{|t|} = \left|f(t)\right| \qquad |f| \text{c/m et intégrable sur } \mathbb{R} \text{ par hypothèse}$$

Les hypothèses étant vérifiées, le théorème ***s'applique*** et :

$$\lim F(x_n) = \lim I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f$$

Comme ceci a lieu, ***pour toute suite*** $x_n \longrightarrow 0$, on vient donc de prouver :

$$\lim_{x\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)}{t+ix}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$

***Remarque*** : le théorème de ***caractérisation séquentielle d'une limite*** s'énonce ainsi :
la limite de la fonction $F$ quand $x \longrightarrow a$ existe et vaut $\ell$ (et ceci même si $a, \ell = \pm\infty$) ssi ***pour toute suite*** $x_n \longrightarrow a$, alors la limite de la suite $F(x_n)$ existe et vaut $\ell$.

## Exercice 25

On a $I_n = n\displaystyle\int_1^{1+1/n} f(x^n)\,\mathrm{d}x$ avec $f$ continue sur $\mathbb{R}$. Ici, il faut d'abord faire un changement de variables, car il faut « *entrevoir* » que la domination du théorème de **Lebesgue**[4] échouera à cause du $n$ et du fait que la seule chose « *exploitable* » sur $f$ est qu'elle est bornée. on pose donc $u = x^n$, soit, comme $x \geq 0$, $x = u^{1/n}$, d'où $\mathrm{d}x = \frac{1}{n}u^{1/n-1}\,\mathrm{d}u$. On utilise la ***fonction caractéristique*** d'un ensemble (par exemple $A$) notée par $\chi_A(x)$ ou $1_A(x)$ et qui vaut 1 si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$ :

$$I_n = \int_0^{(1+1/n)^n} f(u)u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u = \int_1^e \underbrace{\chi_{\left[1,1+\frac{1}{n}\right]}(u)f(u)u^{\frac{1}{n}-1}}_{f_n(u)}\,\mathrm{d}u$$

► ***Etude de la convergence simple de la suite de fonctions*** $(f_n)$ :

Par définition, $f_n(u) = \begin{cases} f(u)u^{\frac{1}{n}-1} & \text{si } 1 \leq u \leq 1+\frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } 1+\frac{1}{n} < u \leq e \end{cases}$

Soit $u$ ***fixé*** tel que $1 \leq u < e$. Comme on sait $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1 = e$ (je ne le redémontre pas ici), alors ***à partir d'un certain rang***, on a nécessairement (à cause du $< e$), $1 \leq u \leq 1+\frac{1}{n}$, il ***suit à partir d'un certain rang*** :

$$f_n(u) = f(u)u^{\frac{1}{n}-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(u)u^{-1} = \frac{f(u)}{u}$$

On a donc ***convergence simple*** de la suite de fonctions $(f_n)$ ***sur l'intervalle*** $\left[1,e\right[$ vers la fonction $g$ définie par $g(u) = \frac{f(u)}{u}$ qui est bien ***continue par morceaux*** (et même continue) sur ce même intervalle (parce qu'il n'y a pas 0).

► ***Etude de la domination :***

4. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \left[1, e\right[, \quad \left|f(u)u^{\frac{1}{n}-1}\right| = \left|\frac{f(u)}{u}\right| e^{\frac{1}{n}\ln u} \leq \frac{M}{1} e^{1\times \ln e} = Me$$

La fonction $f$ est continue par morceaux sur le ***segment*** $\left[1, e\right]$, donc y est bornée par $M$. D'autre par $0 \leq \ln u \leq \ln e$, par croissance de la fonction logarithme. Toute constante étant intégrable sur un intervalle borné, par application du ***théorème de convergence dominée de*** **Lebesgue**[4] (sur l'intervalle $\left[1, e\right[$ en fait), il vient :

$$\lim I_n = \lim \int_{[1,e[} f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{[1,e[} \lim f_n(u)\,\mathrm{d}u = \int_{[1,e[} g(u)\,\mathrm{d}u = \boxed{\int_1^e \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u}$$

**Exo27**

On pose $f_n(x) = \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)}{x\left(1+x^2\right)}$. L'intégrabilité de $f_n$ sur $\mathbb{R}^+$ résulte de :

- $f_n$ est continue sur $\left]0, +\infty\right[$ (car on a bien $1+\frac{x}{n} > 0$).
- $\left|f_n\right| \sim_0 \dfrac{\frac{x}{n}}{x} = \dfrac{1}{n}$. $f_n$ se prolongeant en une fonction continue sur $\left[0, 1\right]$ est intégrable sur $\left]0, 1\right]$.
- $\left|f_n\right| \sim_{+\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} = \dfrac{\ln x - \ln n}{x^3} \sim_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$.

  L'intégrabilité sur $\left[1, +\infty\right[$ résulte de l'utilisation du critère $x^\alpha f(x)$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 f_n(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

  (*on aura reconnu une intégrale de* **Bertrand**[2])

$$n\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

- La suite de fonctions $(f_n)$ converge simplement pour $x \in \left]0, +\infty\right[$ vers $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ :

$$\frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}(1+x^2)} \sim_{n\to+\infty} \frac{\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

- ***Hypothèse de Domination***

$$\left|\frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}(1+x^2)}\right| \leq \left|\frac{\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}(1+x^2)}\right| = \frac{1}{1+x^2} \text{ c/m et clairement intégrable sur } \mathbb{R}^+$$

  On a appliqué l'inégalité « *usuelle* » $\ln(1+x) \leq x$, avec, ***en plus***, $x \geq 0$, qui amène $|\ln(1+x)| \leq |x|$

On peut donc appliquer ***le théorème de convergence dominée de*** **Lebesgue**[4], d'où :

$$\lim n\int_0^{+\infty} f_n = \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \Big[\arctan x\Big]_0^A = \frac{\pi}{2}$$

On en déduit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x \sim \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{n}$

---

2. **Joseph Bertrand** : mathématicien français (1822-1900).
4. **Henri-Léon Lebesgue** : mathématicien français (1875-1941)