Quelques corrections sur les séries numériques

Exo9

.1. La série $\sum \frac{1}{2n+1}$ diverge puiqu'elle est à termes positifs vérifiant $\dfrac{1}{2n+1} \geq \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n+1}$, qui est le terme général de la série harmonique divergente.

.2. On revient aux sommes partielles :

$$S_{2^n} = \sum_{k=0}^{2^n} u_k = \sum_{\substack{k=0\\k=2^m}}^{2^n} \frac{1}{k} = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{2^m} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)} \longrightarrow \frac{1}{1-(1/2)} = 2$$

Attention ! : on ne peut en déduire immédiatement la convergence. (S_{2^n}) étant une sous-suite de (S_n), tout au plus peut-on en déduire que, si la série converge, elle est de somme 2. Rappelons-nous que pour des séries à termes positifs, la suite des sommes partielles (S_n) est croissante, et donc converge ssi elle est majorée. En se rappelant, en plus, que toute suite croissante convergente est majorée par sa limite (et que d'ailleurs c'est son « meilleur » majorant), La convergence de la série résulte de la majoration : $S_n \leq S_{2^n} \leq 2$.

.3. Soit n un entier naturel et p_n le nième nombre premier. On a clairement $p_n \geq n$. De plus, en utilisant la décomposition en nombres premiers, tout entier $k \leq n$ peut s'écrire sous la forme $k = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}$, où les m_i sont des entiers naturels positifs ***ou nuls***. Il est immédiat aussi que l'on peut supposer $m_i \leq n$. On obtient donc les majorations « très grossières » suivantes :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{0 \leq m_1,\dots,m_n \leq n} \frac{1}{p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}} \overbrace{=}^{(1)} \left(\sum_{m_1=0}^{n} \frac{1}{p_1^{m_1}} \right)$$

program@epstopdf

Par sommation, il vient $\forall\, p \geq n \geq N_0$, $\sum_{k=n+1}^{p} u_k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^{p} v_k$

Par passage à la limite conservant l'inégalité, lorsque $p \longrightarrow +\infty$, pour $n \geq N_0$, $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k < \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$

On suppose $\mathbf{u_n = o(v_n)}$ et $\sum \mathbf{u_n}$ **divergente** (donc $\sum v_n$). Montrons $\mathbf{S_n(u)} = \displaystyle\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{u_k} = \mathbf{o}\left(\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{v_k}\right) = \mathbf{o}\Big(\mathbf{S_n(v)}\Big)$

Soit $\varepsilon > 0$.

$u_n = o(v_n)$, donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_0$, $|u_n| = u_n < \varepsilon/2|v_n| = \varepsilon/2 v_n$.

La série $\sum v_n$ est divergente, donc $\sum_{k=0}^{n} v_k \longrightarrow +\infty$ (car la série est à termes positifs) , en particulier on a $\sum_{k=0}^{N_0} u_k / \sum_{k=0}^{n} v_k \longrightarrow 0$. Il existe donc $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N_1$, $\sum_{k=0}^{N_0} u_k < \varepsilon/2 \sum_{k=0}^{n} v_k$

Par sommation, pour $n \geq \max(N_0, N_1)$, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N_0} u_k + \sum_{k=N_0+1}^{n} u_k < \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k}_{\text{car } n \geq N_1} + \underbrace{\sum_{k=N_0+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} v_k}_{\text{car } k \geq N_0} = \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} v_k + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=N_0+1}^{n} v_k \underbrace{<}_{v_k \geq 0} \varepsilon \sum_{k=0}^{n} v_k$$

On suppose $\mathbf{u_n \sim v_n}$ et $\sum \mathbf{v_n}$ **convergente** (donc $\sum u_n$). Montrons $\mathbf{R_{n+1}(u)} = \displaystyle\sum_{\mathbf{k=n+1}}^{+\infty} \mathbf{u_k} \sim \sum_{\mathbf{k=n+1}}^{+\infty} \mathbf{v_k} = \mathbf{R_{n+1}(v)}$

$u_n \sim v_n$, donc $u_n - v_n = o(v_n)$. Par application du premier résultat, il vient $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_n - v_n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right)$, d'où le résultat.

Applications

- Comme première application, on peut donner une troisième méthode pour valider le résultat classique $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$. En effet $u_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} = v_n$. Ces séries étant divergentes, on utilise le résultat précédent et, par sommation :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \sim \ln n$$

Rappel : On a plus précisément $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$ où $\gamma \simeq 0.577$ est la constante d'**Euler**[1]-**Mascheroni**[2]

- Autre démonstration de la moyenne de **Cesaro**[3], cad si $u_n \longrightarrow \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors la moyenne $\dfrac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1} \longrightarrow \ell$.

Pour $\ell \neq 0$, $u_n \sim \ell$ et (donc) la série $\sum u_n$ diverge. Par sommation, on obtient le résultat puisque :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} l = (n+1)\ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sum_{k=0}^{n} u_k}{n+1} \sim \ell$$

Pour $\ell = 0$ (rappel, dans ce cas, ***on n'a pas*** $u_n \longrightarrow \ell \iff u_n \sim \ell$), on introduit $v_n = u_n + 1 \longrightarrow 1$ d'où

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} v_k}{n+1} = \frac{\sum_{k=u}^{n} k}{n+1} + 1 \longrightarrow 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sum_{k=u}^{n} k}{n+1} \longrightarrow 0$$

Pour $\ell = +\infty$, laissé au lecteur (Il faut utiliser la sommation de $cste = o(u_n)$)

Exo 6 Transformation d'ABEL

Comme c'est certainement encore « *tout frais* » dans vos têtes, j'en profite pour terminer l'exo sur la convergence de la série $\sum \dfrac{\sin n}{n}$. En fait, c'était tout simple ...On était arrivé, par la transformation d'**Abel**[4] à :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} = \frac{A_n}{n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{T_n} \quad \text{avec } A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k \text{ et } |A_n| \leq \frac{1}{|\sin(1/2)|}$$

Pour que la série converge, ***il faut et il suffit*** de prouver que la ***suite des sommes partielles*** (S_n) a une limite finie. A_n étant bornée, on a immédiatement que $\frac{A_n}{n} \longrightarrow 0$. D'autre part la suite des sommes partielles (T_n) converge ssi la série $\sum A_n \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right)$ converge. On démontre qu'elle ***converge abolument*** en lui appliquant le critère de majoration et d'équivalent au terme d'une série de **Riemann**[5] convergente :

$$\left| A_n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right| \leq \frac{1}{|\sin(1/2)|} \, \frac{n+1-n}{n(n+1)} \sim \frac{1}{|\sin(1/2)|} \, \frac{1}{n^2}$$

1. **Leonhard Euler** : suisse (1707-1783). Le plus grand mathématicien du XVIIIesiècle.
2. **Lorenzo Mascheroni** : italien (1750-1800). Connu pour la construction à la règle et au compas.
3. **Ernesto Cesaro** : mathématicien italien (1859-1906)
4. **Niels Henrik Abel** : norvégien (1802-1829). Travaux sur équations algébriques, fonctions elliptiques et intégrales.
5. **Bernhard Riemann** : mathématicien allemand de génie (1826-1866). Travaux fondamentaux sur les fonctions analytiques, la théorie de l'intégration, la géométrie différentielle. Sa fonction ζ donne des indications sur la répartition des nombres premiers.