Quelques Corrections sur la Diagonalisation

Exo1

CNS pour que que la matrice $A = \begin{pmatrix} c & 0 & a \\ 2 & b & -1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix}$ admette $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propre ?

A admet X comme vecteur propre ***ssi*** il existe un ***scalaire*** λ tel que $AX = \lambda X$, et comme $X \neq 0$ ***ssi*** la famille (AX, X) est ***liée***. On calcule :

$$AX = \begin{pmatrix} c+a \\ 1-b \\ c \end{pmatrix}$$

On applique alors le résultat suivant que l'on applique alors s'il y a des « *inconnues* » (on rappelle que pour ***deux*** vecteurs avec des ***chiffres***, une famille liée ou libre, çà se ***voit***, il n'y a nul besoin de démontrer) :

$$(a_1, \dots, a_n) \text{ et } (b_1, \dots, b_n) \text{ sont colinéaires } \textbf{\textit{ssi}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \cdots = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_n & b_n \end{vmatrix} = 0$$

En revenant à cet exo, A admet X comme vecteur propre ***ssi***

$$\begin{vmatrix} 1 & c+a \\ -1 & a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & c+a \\ 1 & c \end{vmatrix} = 0 \iff a-b+c+a = c-(c+a) = 0 \iff \boxed{a = 0 \text{ et } c = b}$$

Remarques

- Je vous rappelle le résultat (toujours pour 2 vecteurs) :
  la famille (u, v) est liée $\iff$ u et v sont colinéaires $\iff$ $u = \lambda v$ **ou** $v = \mu u$.
- Le résultat (u, v) liée $\iff$ $u = \lambda v$ est faux à cause du cas $v = 0$ (je vous laisse y réfléchir). Par contre, si on a en hypothèse $v \neq 0$, cette équivalence est vraie.

Exo4

On a immédiatement :

$$MX = PNP^{-1}X = \lambda X \iff NP^{-1}X = \lambda P^{-1}X \iff N\left(P^{-1}X\right) = \lambda\left(P^{-1}X\right)$$

Comme $X \neq 0 \iff P^{-1}X \neq 0$, car P est ***inversible***. Il vient que X est vecteur propre de M associé à λ ***si et seulement si*** $P^{-1}X$ est vecteur propre de N associé à λ. Les ***valeurs propres*** de $M = PNP^{-1}$ et N sont donc les mêmes, ce qui n'est pas étonnant, puisque les matrices sont ***semblables*** et les vecteurs propres se déduisent de $X \longrightarrow P^{-1}X$ ce qui n'est pas tellement étonnant non plus, puisque si l'on pose $P = P_{\mathscr{E}'}^{\mathscr{E}}$ matrice de passage de la base $\mathscr{E}'$ à la base $\mathscr{E}$, alors on sait que PNP^{-1} est aussi la formule de changement de base pour une matrice d'un morphisme de la base $\mathscr{E}$ vers la base $\mathscr{E}'$ et qu'alors la formule pour un vecteur est $X = P_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}'}X'$ ou encore $X' = P^{-1}X$.

Exo5

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent en dimension finie. Montrez $\operatorname{Sp} u = \{ 0 \}$

Soit λ une valeur propre de u. Il existe donc $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Comme u est nilpotent, il existe un entier $k \geq 1$ tel que $u^k = O$. On ***applique alors*** u $k-1$ fois à l'égalité précédente. Il vient : $u^{k-1}(u(x)) = u^k(x) = 0$, et ***d'autre part*** :

$$\begin{aligned} u^{k-1}(u(x)) &= u^{k-1}(\lambda x) = \lambda u^{k-1}(x) = \lambda u^{k-2}(u(x)) = \lambda u^{k-2}(\lambda x) = \lambda\lambda u^{k-2}(x) \\ &= \lambda^2 u^{k-2}(x) = \cdots = \lambda^3 u^{k-3}(x) = \cdots = \lambda^{k-1} u^1(x) = \lambda^{k-1}\lambda x = \lambda^k x \end{aligned}$$

Il vient donc $u^k(x) = \lambda^k x = 0$ et ***comme*** $x \neq 0$, $\lambda^k = 0$, soit $\lambda = 0$. (***car*** on est dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). ***Attention***, on vient ***seulement*** de démontrer ***l'inclusion*** $\boxed{\operatorname{Sp} u \subset \{0\}}$.

On a vu (je ne le redémontre pas) qu'un endomorphisme ***nilpotent*** n'est pas bijectif (ou n'est pas inversible pour $\circ$, c'est pareil). Comme on est en dimension finie, 0 est ***valeur propre*** (cours). Il en résulte (attention au sens) $\boxed{\{0\} \subset \operatorname{Sp} u}$

Par ***double inclusion***, $\operatorname{Sp} u = \{0\}$ ou ***autrement dit***, la ***seule*** valeur propre d'un endomorphisme ***nilpotent*** est la valeur propre nulle.

Remarques

- Comme une homothétie, un endomorphisme nilpotent n'a qu'***une seule valeur propre***. ***Par contre***, tous les vecteurs ne sont pas vecteurs propres. En prenant la « *plus petite* » matrice nilpotente $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, le lecteur vérifiera par lui même que les seuls vecteurs propres sont (donc) les vecteurs du noyau, cad les vecteurs $(a, 0)$.
- On peut retenir que si $u(x) = \lambda x$, alors $u^k(x) = \lambda^k x$.

Exo6

On note $E = C^\infty\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}\right)$ et φ l'application de E dans E qui à f associe g définie par $g(x) = f'(x) - x f(x)$.

.1. Montrez φ endomorphisme.

.2. Donnez valeurs propres et vecteurs propres de φ.

.3. Donnez $\operatorname{Ker} \varphi^2$.

.1. Je crois que l'on peut dire φ est clairemen linéaire par liniéarité de la dérivation. Néanmoins, je vous le rédige ***car attention !*** à l'aspect « *fonctionnel* ». Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et tous $f, g \in E$:

$$\varphi\left(\alpha f + \beta g\right)(x) = \left(\alpha f + \beta g\right)'(x) - x\left(\alpha f + \beta g\right)(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x) - \alpha x f(x) - \beta x g(x) = \alpha \varphi(f)(x) + \beta \varphi(g)(x)$$

Ne pas ***oublier*** la preuve de ***endo***morphisme, cad la vérification de ***élément de*** E. Ici, on peut se contenter de dire : si f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, on sait (cours) que f' l'est aussi, donc par sommation $f'(x) - x f(x)$ aussi.

.2. ***Analyse :***

Soit λ une valeur propre de φ, alors il existe une fonction ***indéfiniment dérivable non nulle*** f telle que $\varphi(f) = \lambda.f$, soit encore $\forall\, x \in \mathbb{R}, f'(x) - xf(x) = \lambda f(x)$. On en tire immédiatement que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - (x+\lambda)\,y = 0$. On sait que les solutions sont alors :

$$y = C\exp\left(\int (x+\lambda)\,\mathrm{d}x\right) = C\exp\left(\frac{1}{2}x^2 + \lambda x\right)$$

On a donc « *démontré* » que les seuls vecteurs propres ***possibles*** (qui sont des fonctions ici) associés à λ sont les fonctions ci-dessus. N'ayant pas non plus trouvé dans l'analyse de « *condition* » sur λ, toutes les valeurs propres semblent « *à priori possibles* ».

Synthèse :
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ ***quelconque***. On n'est pas obligé d'utiliser la constante C, les vecteurs propres étant toujours définis à au moins un scalaire près, on calcule (on essaye d'écrire « *fonctionnellement* » regardez à gauche ce qui évite l'utilisation d'un g alourdissant l'écriture) :

$$\begin{aligned}\varphi\left(x \longrightarrow e^{1/2x^2+\lambda x}\right)(x) &= \left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right)' - x\left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right) = (x+\lambda)\left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right) - x\left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right)\\ &= \lambda\left(e^{1/2x^2+\lambda x}\right). \quad \textbf{\textit{Ok}}\end{aligned}$$

On n'oublie de dire (vérifier) que la fonction est bien ***non nulle*** et ***aussi*** qu'elle est bien de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Conclusion, tout réel est valeur propre et l'espace propre associé est une droite (une droite de fonctions) :

$$\mathrm{Sp}\,\varphi = \mathbb{R} \qquad\qquad E(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(\varphi - \lambda Id) = \mathrm{Ker}\,(\lambda Id - \varphi) = \mathrm{Vect}\left(x \longrightarrow e^{1/2x^2+\lambda x}\right)$$

.3. La il y a une astuce (c'est un exo oral CCP). Il y a une « *mauvaise méthode naturelle* » qui n'aboutit pas et une méthode plus astucieuse.

Méthode 1 :
On calcule φ^2 :

$$\varphi^2\left(f\right)(x) = \left(f'(x) - xf(x)\right)' - x\left(f'(x) - xf(x)\right) = f''(x) - 2xf'(x) + (x^2-1)\,f(x)$$

Le problème est qu lorsqu'on cherche à « *résoudre* » le noyau, on tombe sur l'équation différentielle $y'' - 2xy' + (x^2-1)\,y = 0$ qui est trop difficile à résoudre. Là encore, vaut mieux le savoir...On en parlera un peu plus tard.

Méthode 2 (astucieuse) :
On utilise l'équivalence (encore faut-il la savoir ou la deviner très vite, là aussi...) que

$$\boxed{x \in \mathrm{Ker}\,h^2} \iff h^2(x) = 0 \iff h\left(h(x)\right) = 0 \iff \boxed{h(x) \in \mathrm{Ker}\,h}$$

En revenant à notre exo, comme $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Vect}\left(x \to e^{1/2x^2}\right)$, $\varphi(f) \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ s'écrit $f'(x) - xf(x) = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$. Encore une équation différentielle linéaire à résoudre **mais** du premier ordre ! C'est du cours de Sup.
Résolution de l'équation homogène :
L'équation $y' - xy = 0$ se résoud immédiatement en $y = Ce^{1/2x^2}$.
Variation de la constante : On cherche une solution sous la forme $y = C(x)e^{1/2x^2}$ ce qui donne :

$$C'(x)e^{1/2x^2} + C(x)\left(xe^{1//2x^2} - xe^{1/2x^2}\right) = Ce^{1/2x^2} \iff C'(x) = C \iff C(x) = Cx + D$$

Il vient que les solutions sont $(Cx+D)e^{1/2x^2}$. On peut encore écrire $\operatorname{Ker}\varphi^2 = \operatorname{Vect}\left(x \to e^{1/2x^2}, x \to x\, e^{1/2x^2}\right)$. C'est ***un plan***.

Exo7

Dans toute la suite on notera une suite (u_n) en lieu de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour des commodités d'écriture et de lisibilité.

Analyse :

Soit λ une valeur propre de f. Alors $f\big((u_n)\big) = \lambda(u_n) = \begin{cases} u_0 & \text{si} n = 0 \\ \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) & \text{si} n \geq 1 \end{cases}$

La première ligne donne $u_0 = \lambda u_0$ d'où $\lambda = 1$ ou $u_0 = 0$. On vient de montrer que pour une valeur propre $\lambda \neq 1$, alors le premier terme u_0 (de la suite vecteur propre) est ***nécessairement*** nul. POur $\lambda = 1$, à ce stade de l'analyse, rien n'est démontré.

La deuxième ligne donne $\forall\, n \geq 1,$:

$$\lambda u_n = \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}) \implies u_{n+1} = (2\lambda - 1)u_n \implies u_n = (2\lambda - 1)^{n-1} u_1$$

Attention au fait que l'on commemce la récurrence à 1 mais pas à 0. Il reste encore à injecter (u_n) suite non nulle qui nous amène à considérer le cas $\lambda = \frac{1}{2}$. On obtient $u_n = 0$, ***sauf pour*** $n = 1$, donc u_1 quelconque. La première ligne nous donne $u_0 = 0$. Donc il existe des suites non nulles vecteurs propres, celles où u_1 est quelconque, ce qui donne une droite. Résumons, l'analyse a montré :

- Pour $\lambda = 1$, les seules suites vecteurs propres associées « *possibles* » sont les suites où $u_n = u_1 = a$ pour tout $n \geq 1$ et $u_0 = b$ quelconque.

- Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, les seules suites vecteurs propres associées « *possibles* » sont les suites $(0, a, 0, 0, 0, \ldots)$

  Pour $\lambda \neq 1, \frac{1}{2}$, les seules suites vecteurs propres associées « *possibles* » sont les suites $u_n = (2\lambda - 1)^{n-1} u_1$ pour $n \geq 1$ et $u_0 = 0$.

En particulier, il semblerait $\operatorname{Sp} f = \mathbb{C}$ (on est dans l'ev des suites complexes).

Réciproquement, examinons ces cas :

- Pour $\lambda = 1$, $f\big((u_n)\big) = f\left(\begin{cases} b & \text{si} n = 0 \\ a & \text{si} n \geq 1 \end{cases}\right) = \begin{cases} b & \text{si} n = 0 \\ \frac{1}{2}(a + a) & \text{si} n \geq 1 \end{cases} = (u_n) = 1.(u_n)$

  Pour $b \neq 0$, $(u_n) \neq (0)$, par conséquent 1 est ***bien valeur propre*** de f et l'espace propre associé est un plan formées des suites définies comme plus haut.

  Une base du plan est, par exemple, la famille des 2 suites $(1, 0, 0, 0, \ldots)$ et $(0, 1, 1, 1, \ldots)$

- Pour $\lambda = \frac{1}{2}$, $f\big((u_n)\big) = f\left(\begin{cases} 0 & \text{si} n = 0 \\ a & \text{si} n = 1 \\ 0 & \text{si} n \geq 2 \end{cases}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} n = 0 \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}0 & \text{si} n = 1 \\ \frac{1}{2}(0 + 0) & \text{si} n \geq 2 \end{cases} = \frac{1}{2}.(u_n)$

  Pour $a \neq 0$, $(u_n) \neq (0)$, par conséquent $\frac{1}{2}$ est ***bien valeur propre*** de f et l'espace propre associé est une droite, la droite dirigée, par exemple, par $(0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$

- Pour $\lambda \neq 1, \frac{1}{2}$:

$$f\big((u_n)\big) = f\left(\begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ a(2\lambda-1)^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}\big((2\lambda-1)^n + (2\lambda-1)^{n-1}\big) & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{1}{2}(2\lambda-1)^{n-1}\big(2\lambda-1+1\big) & \text{si } n \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} \lambda 0 & \text{si } n = 0 \\ a\lambda(2\lambda-1)^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases} = \lambda.(u_n)$$

Pour $a \neq 0$, $(u_n) \neq (0)$, par conséquent ***tout complexe*** $\neq 1, \frac{1}{2}$ est ***bien valeur propre*** de f et l'espace propre associé est une droite, la droite dirigée, par exemple, par $(0, 2\lambda-1, (2\lambda-1)^2, (2\lambda-1)^3, \dots)$

Exo16

On démontre les 2 implications :

On suppose $\varphi \circ f = \lambda\varphi$. Soit $x \in H = \operatorname{Ker}\varphi$ et montrons $f(x) \in H$: $\varphi(f(x)) = \lambda\varphi(x) = 0$. Ok.

On suppose H hyperplan stable par f, cad $f(H) \subset H$. $\varphi \circ f$ est donc une forme linéaire qui s'annule sur H. Comme toutes les formes linéaires qui s'annulent sur un même hyperplan H sont colinéaires (de la même façon que toutes leurs équations sont colinéaires), il existe un scalaire λ tel que $\varphi \circ f = \lambda\varphi$. Si $\varphi \circ f$ s'annule sur E tout entier, le résultat reste valide avec $\lambda = 0$.

Soit $\mathscr{E}$ une base de E. La matrice de φ dans cette base (comme φ va de E dans $\mathbb{R}$) est une matrice-ligne $X = \big(a_1 \dots a_n\big)$ et d'ailleurs l'équation de l'hyperplan dans cette base est $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$. Matriciellement, si on note M la matrice de f dans la base $\mathscr{E}$, l'équation plus haut s'écrit :

$$XM = \lambda X \iff {}^t(XM) = \lambda\, {}^tX \iff {}^tM\, {}^tX = \lambda\, {}^tX$$

Ceci équivaut à ${}^tX$ vecteur propre de ${}^tM$. Bref, trouver les hyperplans stables par f (représenté par la matrice M) ***équivaut*** à chercher les vecteurs propres $(a_1, \dots, a_n)$ de la ***transposée*** ${}^tM$ et alors ce seront les ***hyperplans d'équations*** $a_1x_1 + a_nx_n = 0$! Résultat que les élèves « *ambitieux* » peuvent retenir.

Mettons ceci en pratique sur la matrice (3,3) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappelle qu'une droite est stable ssi elle est dirigée par un vecteur propre (cours). L'espace nul $\{0\}$ et l'espace tout entier $\mathbb{R}^3$ sont évidemment stables. Remarquons aussi qu'ici les plans sont des hyperplans...
Je ne mets pas ici le détail de calcul des éléments propres : 1 est valeur propre double associé au plan $x+y+z=0$ dont une base est $\big((1,-1,0),(1,0,-1)\big)$ et 4 valeur propre associé à $\operatorname{Vect}(1,1,1)$? Comme ${}^tM = M$, les espaces propres sont les mêmes.

- les droites stables par M sont toutes les droites dirigées par les vecteurs $(1,1,1)$ ou $(a+b, -a, -b)$ avec a, b réels.

- les plans stables sont les plans d'équations (on se sert des vecteurs propres de la transposée qui ***ici*** sont les mêmes mais ce n'est pas le cas en général ou on fait un deuxième calcul). Donc les plans stables sont les plans (hyperplans) d'équation $x+y+z=0$ et $(a+b)x - ay - bz = 0$.

Exo17 Soient $E_1,\dots,E_p$ tels que $E_1 \oplus \dots \oplus E_p = E$ et (p_i) les projecteurs associés, cad p_i est la projection sur E_i parallèlement aux « autres » , cad $\oplus_{j\neq i}E_j$. On a $p_i \circ p_i = p_i$, $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$, cad $p_i \circ p_j = \delta_{ij}$ et aussi $p_1+\dots+p_p = Id$, puisque la somme des E_i est égale à E. Pour tout $x \in E$, il faut voir $p_i(x)$ comme le décomposé de x sur « l'axe » E_i. POur deux espaces supplémentaires $F \oplus G = E$, si p est la projection sur F parallèlement à G, les projecteurs associés sont $p, id-p$ en rappelant que $Id-p$ est la projection sur G parallèlement à F.
Considérons $f = a_1p_1 + \dots + a_pp_p$. Pour tout $x_i \in E_i$, on a $f(x_i) = a_ip_i(x_i) = a_ix_i$, puisque $p_j(x_i) = 0$, pour $j \neq i$. Il vient x_i vecteur propre associé à a_i, ou autrement dit $F_i = \text{Ker}(f - a_iId) \supset E_i$ (Attention, il n'y a pas = à priori). On sait, d'après le cours $F_1 \oplus \dots \oplus F_p \subset E$. Comme $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p \subset F_1 \oplus \dots \oplus F_p \subset E$, on en tire $\text{Ker}(f - a_1Id) \oplus \dots \oplus \text{Ker}(f - a_pId) = E$, cad f diagonalisable.
On en tire aussi $F_i = \text{Ker}(f - a_iId) = E_i$, pour des raisons de dimension, et si $E_i \neq \{0\}$, il vient a_i est valeur propre de f d'espace propre associé E_i.

Exo19

On écrit successivement :

$$\begin{aligned}\chi_{A^{-1}}(\lambda) \times \det A &= \det(\lambda I - A^{-1})\det A = \det\big((\lambda I - A^{-1})A\big) = \det(\lambda A - I)\\ &= \lambda^n \det\big(A - \frac{1}{\lambda}I\big) = (-1)^n\lambda^n \det\big(\frac{1}{\lambda}I - A\big) = (-1)^n\lambda^n\chi_A\big(\frac{1}{\lambda}\big)\end{aligned}$$

Comme A est inversible $\det A \neq 0$ d'où $\chi_{A^{-1}}(\lambda) = (-1)^n \dfrac{\lambda^n}{\det A}\,\chi_A\big(\dfrac{1}{\lambda}\big)$

Remarque : On peut se rappeler que, si P est de degré n, $X^nP\big(\frac{1}{X}\big)$ est le polynôme avec les coefficients « *à l'envers* » (je vous laisse le vérifier), donc ici :

$$\chi_A(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \implies \chi_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\det A}\big(a_0X^n + a_1X^{n-1} + \dots + a_{n-1}X + a_n\big)$$

Ce polynôme est bien unitaire car on se rappelle que $a_0 = (-1)^n \det A$

Exo22

Analyse :

Soit λ une valeur propre de φ, il existe donc $M \neq 0$ tel que $\varphi(M) = \lambda M$ qui amène $(\lambda - 1)M = \text{tr}(AM)B$.

On en déduit ou bien $\lambda = 1$, ou bien M colinéaire à B (car $M = \frac{\text{tr}(AM)}{\lambda-1}B$). Ceci peut s'analyser un peu plus finement en disant que les ***seuls vecteurs propres possibles associés*** à une valeur propre $\lambda \neq 1$, sont les vecteurs ***colinéaires*** à B.
$\lambda = 1$ amène $\text{tr}(AM) = 0$, car $B \neq 0$. On note $H = \{M, \text{tr}(AM) = 0\}$ qui est un hyperplan (cours), car noyau de la forme linéaire ***non nulle*** $M \to \text{tr}(AM)$. On a donc que les seuls vecteurs propres « *possibles* » sont les matrices appartenant à H.
L'analyse est donc terminée.

Synthèse :

On calcule $\varphi(B) = (1 + \text{tr}(AB))B = \alpha B$, soit $E(\alpha) \supset \text{Vect}(B)$.
$\forall\, M \in H$, on a évidemment $\varphi(M) = M + 0 = 1.M$, soit $E(1) \supset H$. Deux cas se dessinent alors :

- Si $\text{tr}(AB) \neq 0$, cad $\alpha \neq 1$, pour des raisons de dimension, $(\dim(\text{Vect}(B) \oplus H) = 1 + n^2 - 1)$, on a nécessairement, $E(\alpha) = \langle B \rangle$ et $E(1) = H$, et aussi $\text{Vect}(B) \oplus H = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui amène φ diagonalisable et $\text{Sp}\,\varphi = \{1, \alpha\}$.

  Remarque : On a aussi, (ce n'était pas demandé), $\chi_\varphi(\lambda) = (\lambda - 1)^{n^2-1}(\lambda - \alpha)$.

- Si $\operatorname{tr}(AB)=0$, $\alpha=1$, donc B vecteur propre associé à 1. ***Ici***, $\operatorname{Vect}(B)\subset H$.

  Comme l'analyse a montré que c'était le seul vecteur propre « possible »associé à une autre valeur propre que 1, 1 est donc ici la seule valeur propre de φ. φ n'est donc ***pas diagonalisable***, car sinon, selon un raisonnement usuel, on ne pourrait avoir que $\varphi=1.Id$, ce qui n'est pas.

  Remarque : En fait ici 1 est valeur propre d'ordre n^2 mais l'espace propre associé H a pour dimension n^2-1, on retrouve par une autre méthode que h n'est pas diagonalisable). $\chi_\varphi(\lambda)=(\lambda-1)^{n^2}$

Conclusion : φ est diagonalisable ssi $\operatorname{tr}(AB)\neq 0$

Remarque : Je rappelle que si une matrice M n'a qu'***une seule*** valeur propre (notée α), elle n'est diagonalisable que si c'est $M=\alpha I_n$. En effet $M=PDP^{-1}=P\operatorname{Diag}(\alpha,\ldots,\alpha)P^{-1}=P\alpha I_nP^{-1}=\alpha PP^{-1}=\alpha I_n$.

Exo24

Soit M une matrice stochastique cad à coefficients réels dans $[0,1]$ tels que la somme de chaque ligne vaut 1. Soit λ une valeur propre complexe de M et $X\neq 0\in\mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé. Montrons $|\lambda|\leq 1$.

Pour tous $1\leq i\leq n$, la i$^{\text{e}}$ ligne du système linéaire $MX=\lambda X$ s'écrit :

$$m_{i1}x_1+m_{i2}x_2+\cdots+m_{in}x_n=\lambda x_i$$

On pose $\|x\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ (c'est une notation usuelle). On a donc l'existence d'un i_0, tel que $\|x\|_\infty=|x_{i_0}|$. Comme $X\neq 0$, les coordonnées sont ***non tous nulles***, donc nécessairement le max est non nul. Considérons le « *module de la ligne* » d'indice i_0 :

$$\begin{aligned}|\lambda|\,|x_{i_0}|=|m_{i_01}\,x_1+\cdots+m_{i_0n}\,x_n|&\leq\ |m_{i_01}|\,|x_1|+\cdots+|m_{i_0n}|\,|x_n|\\&\leq|m_{i_01}|\,\|x\|_\infty+\cdots+|m_{i_0n}|\,\|x\|_\infty=(m_{i_01}+\cdots+m_{i_0n})\ \|x\|_\infty=1\ \|x\|_\infty\end{aligned}$$

Il suit $|\lambda|\,\|x\|_\infty\leq\|x\|_\infty$, puis $(|\lambda|-1)\,\|x\|_\infty\leq 0$ et comme $\|x\|_\infty\neq 0$, on en déduit $|\lambda|-1\leq 0$ soit $|\lambda|\leq 1$.

Remarque : Pour toute matrice ***stochastique***, on a aussi que 1 est ***toujours*** valeur propre. Il suffit « *d'essayer* » le vecteur $J=(1,\ldots,1)$ pour constater $MJ=J=1.J$ avec $J\neq 0$ (laissé au lecteur).

Exo21

Soient $E=\mathbb{R}_n[X]$, $A\in E$ tel que $\displaystyle\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\neq 0$ et $\varphi: P\in E\to A\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t-P\displaystyle\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrez $u\in\mathscr{L}(E)$ et déterminez ses éléments propres.

φ est ***linéaire*** car pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et tous $P,Q\in E$,

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha P+\beta Q)&=A(X)\int_0^1\Big(\alpha P(t)+\beta Q(t)\Big)\mathrm{d}t-\Big(\alpha P(X)+\beta Q(X)\Big)\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\\&=\alpha\left(A(X)\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t-P(X)\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\right)+\beta\left(A(X)\int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t-Q(X)\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\right)\\&=\alpha\ \varphi(P)+\beta\ \varphi(Q)\end{aligned}$$

φ est bien un ***endo***morphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ car d'abord il est immédiat, que comme combinaison linéaire des polynômes $A(X)$ et $P(X)$, $\varphi(P)$ est bien un polynôme et ensuite, par la formule du degré d'une somme : $\deg(P+Q)\leq\inf(\deg P,\deg Q)$, on a aussi $\deg(\varphi(P))\leq\inf(\deg A,\deg P)\leq n$.

Analyse pour la recherche des éléments propres de φ :

Soit λ une valeur propre de φ, il existe donc un polynôme P ***non nul*** tel que $\varphi(P) = \lambda P$ soit encore :

$$A(X)\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t - P(X)\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t = \alpha P(X) \iff \left(\int_0^1 P\right) A(X) = \left(\lambda + \int_0^1 A\right) P(X)$$

Il vient alors :

- Si $\lambda + \int_0^1 A \neq 0$ cad $\lambda \neq -\int_0^1 A$, alors $P(X)$ est colinéaire à $A(X)$.
- Si $\lambda + \int_0^1 A = 0$, alors comme $A(X) \neq 0$, il vient $\int_0^1 P = 0$

Maintenant, il faut comprendre que l'analyse est terminée. Essentiellement parce que l'ensemble des polynômes P vérifiant $\int_0^1 P = 0$ est un hyperplan, donc « *l'idée* » est qu'il en « *manque un* » qui est $A(X)$ (la ligne du dessus). On a donc « *tout trouvé* », sous réserve que la réciproque soit Ok. Ceci n'est d'ailleurs pas vraiment à écrire sur la copie.... C'est du feeling mathématique ...

De façon précise qu'a t-on trouvé (prouvé) dans l'analyse ? Que pour la valeur propre $-\int_0^1 A$, les seuls vecteurs propres possibles sont les P vérifiant $\int_0^1 P = 0$, un hyperplan donc au « *maximum* » et qu'il y a un autre vecteur propre possible $A(X)$ associé à une valeur propre différente de $-\int_0^1 A$.

Synthèse :

► On commence par calculer $\varphi(A) = A\int_0^1 A - A\int_0^1 A = 0$. ***Comme*** $A(X) \neq 0$, 0 est valeur propre de φ et (***attention au raisonnement !***) donc $E(0) \supset \text{Vect}\Big(A(X)\Big)$. On n'a pas (encore) démontré l'égalité.

► Soit $P \in H = \left\{P \in E \;/\; \int_0^1 P = 0\right\}$, alors un calcul immédiat amène $\varphi(P(X)) = -\int_0^1 A(t)\,\mathrm{d}t\; P(X)$. Comme il ***existe*** au moins un $P \neq 0$ tel que $\int_0^1 P = 0$ (par exemple $P = -\frac{1}{2} + X$), alors $\alpha = -\int_0^1 A$ est bien valeur propre et l'espace propre associé vérifie $E(\lambda) \supset H$. Attention au raisonnement, c'est pas parce que « *ceux-là marchent* » qu'il n'y en a pas d'autres d'où l'inclusion.

Conclusion : Comme il ne peut y avoir plus de $n+1$ valeurs propres, ou mieux ici (on reverra cela en cours), la ***dimension totale des espaces propres*** en peut dépasser $n+1$, qu'on a ici, à cause de hyperplan et à cause de $\int_0^1 A \neq 0$ qui donne 2 valeurs propres distinctes, une dimension égale à $(n+1) - 1 + 1 = n+1$, on en déduit que les inclusions précédemment vues ne peuvent être que des égalités :

$$\text{Sp}\,\varphi = \left\{0, -\int_0^1 A\right\} \qquad \text{Ker}\,\varphi = \text{Ker}\Big(\varphi - 0.Id_E\Big) = \text{Vect}\Big(A(X)\Big) \qquad \text{Ker}\Big(\varphi + \textstyle\int_0^1 A.Id_E\Big) = H$$

Les 5/2 en déduiront que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

Remarque1 :

Je vous démontre que c'est bien un hyperplan : il suffit de démontrer ***noyau d'une forme linéaire non nulle***. Il est clair que $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \int_0^1 P$ est une forme linéaire non nulle. Ok.

Remarque2 : Si on enlève l'hypothèse $\int_0^1 A \neq 0$, tout en gardant quand même $A \neq 0$, le raisonnement ne tient plus tout à fait. On suppose donc ici, $\int_0^1 A = 0$. Lisez attentivement, c'est un peu plus subtil. On a bien toujours les inclusions

$$\text{Ker}\,\varphi \supset \text{Vect}\,(A(X)) \qquad \text{Ker}\,(\varphi + \int_0^1 A Id) \supset H$$

Mais elles se « *réunissent* » en $\text{Ker}\,\varphi \supset H$. On dispose donc pour l'instant de seulement $n+1-1$ valeurs propres / vecteurs propres (c'est très mal dit !). Il en manque une ! N'oublions pas que l'analyse a montré qu'il n'y avait pas d'autres valeurs propres vecteurs propres. N'oublions pas non plus qu'il est ***impossible*** qu'un polynôme de degré p ait seulement $p-1$ racines réelles (les racines vraies complexes « *vont* » 2 par 2). ***Donc nécessairement***, 0 est valeur propre de ***multiplicité*** $n+1$ (on avait n jusqu'à maintenant). D'autre part l'espace propre qui est ici le noyau ne dépasse pas ici la dimension n, sinon φ serait l'application nulle ! ***Conclusion*** : on a ici une valeur propre de multiplicité $n+1$ et l'espace propre assicé est de dimension n. Et d'ailleurs, comme la seule valeur propre est 0, l'endomorphisme est nilpotent. on peut le vérifier en regardant φ : $\varphi(P(X)) = \int_0^1 P\ A(X)$:

$$\forall P \in E, \quad \varphi^2\Big(P(X)\Big) = \varphi\Big(\underbrace{\int_0^1 P}_{\text{scalaire}}\ A(X)\Big) = \int_0^1 P\ \varphi\Big(A(X)\Big) = 0 \implies \varphi^2 = O$$

Exo26

Soient u et v deux endomorphismes ***diagonalisables qui commutent*** $u \circ v = v \circ u$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et $E_i = E(\lambda_i) = \operatorname{Ker}(\lambda_i Id - u)$ les espaces propres associés. De la diagonalisabilité de u, il résulte la décomposition en somme directe $E_1 \oplus \ldots \oplus E_p = E$. De la commutativité, le cours nous apprend que E_i est stable par v, soit donc v_i l'endomorphisme induit par v sur E_i. Comme v est diagonalisable, v_i l'est aussi. Considérons alors une base $\mathscr{E}_i$ de E_i constituée de vecteurs propres de v_i. ce sont donc des vecteurs propres de v, mais ***aussi*** des vecteurs propres de u car appartenant à l'espace propre de u qui est E_i.
De la décomposition en somme directe, il résulte que la réunion de ces p bases $\mathscr{E}_i$ est une ***base*** de E constituée de vecteurs propres ***à la fois*** de u et de v.

Remarque : En version matricielle, ce théorème s'écrit : si A et B sont deux matrices ***diagonalisables*** qui ***commutent***, elles sont ***co-diagonalisables***, cad il existe une ***même matrice inversible*** P telle que, à la fois, $P^{-1}AP = D$ avec D diagonale et $P^{-1}BP = D'$ avec D' diagonale

Exo29

Calculez A^n avec $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode 1 usuelle par diagonalisabilité :
Par **Sarrus**[1], on obtient :

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{pmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -2 & \lambda-1 & -\frac{1}{3} \\ -6 & -3 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \cdots = \lambda^3 - 3\lambda^2 = \lambda^2(\lambda-3)$$

On a donc A diagonalisable ssi $\dim E(0) = 2$ ssi $\operatorname{Ker} A$ est un plan.

Calcul de $E(3) = \operatorname{Ker}(3Id - A)$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(3) \iff (3I_3 - A)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z & = & 0 \\ -2x + 2y - \frac{1}{3}z & = & 0 \\ -6x - 3y + 2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z & = & 0 \\ -6x + 6y & = & z \,\Big|\, \times 1 \ \times 1 \\ -6x - 3y & = & -2z \,\Big|\, \times -1 \ \times 2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}z & = & 0 \\ y & = & \frac{1}{9}\,3z \\ x & = & \frac{-1}{18} - 3z \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{6}\,z \\ y & = & \frac{1}{3}\,z \\ z & = & z \end{array} \right.$$

1. **Sarrus Pierre-Frédéric** : français (1798-1861). Connu pour méthode de calcul éponyme du déterminant d'ordre 3.

Il vient $E(3) = \text{Vect}\,(\frac{1}{6},\frac{1}{3},1) = \text{Vect}\,(1,2,6) = \text{Vect}\,(e_1)$

Calcul de $E(0) = \text{Ker}\,(A)$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E(0) \iff AX = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{6}z & = & 0 \\ 2x + y + \frac{1}{3}z & = & 0 \\ 6x + 3y + z & = & 0 \end{cases} \iff 6x + 3y + z = 0$$

$E(0)$ est donc un ***plan*** dont une base est $\text{Vect}\Big(\underbrace{(0,1-3)}_{e_2},\underbrace{(1,0,-6)}_{e_3}\Big)$. On en tire aussi A diagonalisable.

On ***diagonalise*** A : comme $E(3) \oplus E(0) = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{F} = (e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pose ε la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $a \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ l'***endomorphisme canoniquement associé*** à A.

On pose, par exemple, $P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \end{array} = P_\varepsilon^{\mathscr{F}}$.

Il vient alors, en utilisant la ***formule de Changement de bases*** :

$$P^{-1}AP = (P_\varepsilon^{\mathscr{F}})^{-1}\,\text{Mat}\,(a,\varepsilon)P_\varepsilon^{\mathscr{F}} = \text{Mat}\,(a,\mathscr{F}) = \begin{array}{c} \\ e_1 \to \\ e_2 \to \\ e_3 \to \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a(e_1) & a(e_2) & a(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = D$$

puis, sans détailler le calcul de P^{-1} :

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 6 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -12 & 12 & -2 \\ 12 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & \frac{1}{2}3^{n-1} & \frac{1}{2}3^{n-2} \\ 2\,3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-2} \\ 2\,3^n & 3^n & 3^{n-1} \end{pmatrix} = 3^{n-1}A$$

Afin de bien comprendre, autre exemple, **on aurait aussi pu prendre** la matrice P comme suit (***comprenez...*** :

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \Longrightarrow P'^{-1}AP' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D'$$

Méthode 2 usuelle par recherche d'un polynôme annulateur :

On commence par chercher un polynôme annulateur de degré minimum, sachant que **Cayley**[2]-**Hamilton**[3] nous en donne déjà un de degré 3 qui est le polynôme caractéristique $X^3 - 3X^2 = X^2(X-1)$. On est donc ***aussi obligé*** dans cette méthode de calculer le polynôme caractéristique. Comme tout polynôme annulateur a pour racines les valeurs propres 0 et 3, il n'y a ***ici*** qu'un seul candidat « *plus petit* » possible c'est $X(X-3)$. D'autre part, le cours nous apprend que $X(X-3)$ est ***annulateur*** ssi A est diagonalisable. ***Une première possibilité*** est de regarder $\text{rg}\,(A)$ et de vérifier qu'il es tégal à 1 (c'est immédiat). ***Une deuxième possibilité***, comme $A(A-3I) = A^2 - 3A$ est de calculer A^2 et de remarquer $A^2 = 3A$. Bref...on prend donc comme ***polynôme annulateur*** de A, $P(X) = X^2 - 3X = X(X-3)$.

2. **Arthur Cayley** : mathématicien anglais (1821-1895). Un des inventeurs du calcul matriciel.
3. **William Rowan Hamilton** : mathématicien irlandais (1805-1865). Connu pour la découverte des quaternions.

Comme le demande la méthode, on effectue la ***division euclidienn***e de X^n par $P(X)$ qui amène :

$$X^n = P(X)Q_n(X) + R_n(X) = X(X-3)Q_n(X) + a_n X + b_n$$

Il n'y a pas besoin de calculer le quotient $R_n(X)$, seulement le reste $R_n(X)$. Les valeurs en $X = 0$ et $X = 3$ nous fournissent immédiatement le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0^n & = & b_n \\ 3^n & = & 3a_n + b_n \end{array}\right. \iff b_n = 0 \ a_n = 3^{n-1}$$

On en déduit donc $X^n = X(X-3)Q_n(X) + 3^{n-1}X$, puis « *en remplaçant* » , que $A^n = 3^{n-1}A$, en n'oublliant pas que $A(A-3I) = 0\ldots$

Exo30

.1.

Méthode 1 (par les morphismes) :

f est diagonalisable, il existe donc une base de E $(e_1,\ldots,e_n)$ constituée de vecteurs propres de f, cad $f(e_i) = \lambda_i e_i$. On a immédiatement $f^2(e_i) = f(\lambda_i e_i) = \lambda_i f(e_i) = \lambda_i^2 e_i$. Cette base est donc ***aussi constituée de vecteurs propres de*** f^2 : f^2 est diagonalisable.

Méthode 2 : (par les matrices)

M est diagonalisable, il existe donc $P \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $M = PDP^{-1}$. Il s'ensuit $M^2 = (PDP^{-1})^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$. D^2 étant aussi diagonale, M^2 est ***semblable à une matrice diagonale***, donc diagonalisable.

La réciproque de f diagonalisable $\Longrightarrow$ f^2 diagonalisable est fausse comme l'établit le contre-exemple suivant :

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \qquad R^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$R^2 = -I$ est diagonalisable puisque diagonale ! R n'est pas diagonalisable car son polynôme caractéristique $\chi_J(x) = x^2 - \operatorname{tr} J\, x + \det J = x^2 + 1$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (c'est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$).

.2.

$\boxed{\Longleftarrow}$

Ici $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et f^2 diagonalisable. Il existe donc un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, ***scindé à racines simples***, qui annule f^2. Notons $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ ses racines complexes (qui sont donc de multiplicité 1). On a donc :

$$\left(f^2 - \alpha_1 Id_E\right) \circ \cdots \circ \left(f^2 - \alpha_p Id_E\right) = 0$$

L'idée à trouver était que, le polynôme $Q(X) = P(X^2)$ annule f, cad :

$$Q(X) = (X^2 - \alpha_1) \times \cdots \times (X^2 - \alpha_p)$$

Evidemment, ***à priori***, il n'a aucune raison d'être à racines simples. Mais il est ***scindé*** car on est dans $\mathbb{C}$. Pour simplifier, étudions 2 cas :

- Aucun des α_i n'est nul. En notant $\pm\beta_i$, les deux racines carrées complexes de α_i, on a

$$Q(X) = (X+\beta_1)(X-\beta_1)\dots(X+\beta_p)(X-\beta_p)$$

qui est bien à racines simples, car la « *distinction* » des α_i amène la « *distinction* » des $\pm\beta_i$ (c'est un peu « *triché* » lire plus bas). f est donc ***diagonalisable***.

Notons que l'hypothèse sur les noyaux n'est pas utile dans ce cas. D'ailleurs, on a ***ici*** $\operatorname{Ker} f = \{0\} = \operatorname{Ker} f^2$, 0 n'est pas valeur propre et f et f^2 sont des bijections.

- Un des α_i est nul. Notons le α et « *gardons* » les autres. On a donc ici

$$Q(X) = X^2 \underbrace{(X+\beta_1)(X-\beta_1)\dots(X+\beta_p)(X-\beta_p)}_{R(X)} = X^2\, R(X)$$

On voit bien le « *problème* » : 0 est racine double ce qui ***ne prouve rien***, mais on ne peut appliquer le théorème.... Il faut donc utiliser l'hypothèse sur les noyaux. En rappelant qu'il est immédiat (quasi-cours) que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$, l'hypothèse servira certainement plutôt sous la « *forme* » $\operatorname{Ker} f^2 \subset \operatorname{Ker} f$ qui s'écrit ***aussi*** : ***si*** $f^2(y) = 0$, ***alors*** $f(y) = 0$.

Soit $x \in E$. Comme l'endomorphisme $Q(f) = O$, il suit, en particulier :

$$Q(f)(x) = \Big(f^2 \circ R(f)\Big)(x) = f^2\Big(R(f)(x)\Big)$$

d'où l'on tire $R(f)(x) \in \operatorname{Ker} f^2$, et par ***hypothèse***, $R(f)(x) \in \operatorname{Ker} f$, soit $f(R(f)(x)) = 0$ ou encore en utilisant le polynôme $S(X) = X\ R(X)$, on a $S(f)(x) = 0$. Ceci étant vrai ***pour tout*** x, $S(X)$ est donc un ***polynôme annulateur*** de f et il est ***scindé à racines simples***. f est donc ***diagonalisable***.

$$S(X) = X\ (X+\beta_1)(X-\beta_1)\dots(X+\beta_p)(X-\beta_p)$$

$\boxed{\Longrightarrow}$

Ici f et f^2 sont diagonalisables. On sait, de manière quasi-immédaite, $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$ (Je ne le redémontre pas ici, c'est trop simple). On va démontrer l'égalité par l'égalité des dimensions.

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une ***base*** de E de ***vecteurs propres*** de f, avec $f(e_i) = \lambda_i e_i$. C'est aussi une base de E de vecteurs propres de f^2, car $f^2(e_i) = \lambda_i^2 e_i$, comme déjà vu plus haut. Rappelons que pour des endomorphismes diagonalisables, la multiplité d'une valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre. On a

$$\mu_f(0) = \operatorname{Card}\Big\{i \;\Big|\; \lambda_i = 0\Big\} \qquad \mu_{f^2}(0) = \operatorname{Card}\Big\{i \;\Big|\; \lambda_i^2 = 0\Big\}$$

De $\lambda_i = 0 \iff \lambda_i^2 = 0$, il suit $\mu_{f^2}(0) = \mu_f(0)$, puis $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \operatorname{Ker} f^2$.

Remarque : Démontrons proprement que si les n complexes λ_i sont tous distincts et non nuls , alors leurs $2n$ racines-carrées sont aussi distinctes :

► Dans $\mathbb{R}$, c'est un peu plus simple. Evidemment on doit supposer $\lambda_i \geq 0$ et non nul. Il suffit de dire que l'application $x \longrightarrow x^2$ est ***injective*** sur $\mathbb{R}^+$ et sur $\mathbb{R}^-$, ce qui se prouve par dérivée ***strictement*** positive (ou négative). Par conséquent les n racines carrées positives des λ_i sont distinctes ente elles et les n racines carrées négatives entre elles. Ensuite les nombres positifs sont nécessairement distincts des nombres négatifs, puisque non nuls.

▶ Dans $\mathbb{C}$, On considère aussi l'application $x \longrightarrow x^2$ mais ici ***on ne peut pas dériver*** pour prouver l'injectivité. On se place dans la partie A_+ de $\mathbb{C}$ définie par $\{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x > 0 \text{ ou } (x=0 \text{ et } y>0)\}$, comme déjà parlé en cours : il y a une unique racine carrée de tout nombre complexe z non nul dans A_+, c'est celle là que l'on ***note*** $\sqrt{z}$. Il est immédiat que « *l'autre* » est dans $A_- = \{z = x+iy \in \mathbb{C} \mid x<0 \text{ ou } (x=0 \text{ et } y<0)\}$. Reste à montrer l'***injectivité*** sur A_+ et sur A_-.

On se contente de A_+ et on utilise la ***définition*** de l'injectivité : $f(x) = f(y) \implies x = y$. Soit donc $z = \alpha + i\beta \in A_+$ et $z' = \alpha' + i\beta' \in A_+$ tels que $z^2 = z'^2$. Il vient $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha'^2 - \beta'^2$ et $2\alpha\beta = 2\alpha'\beta'$ et le module donne $\alpha^2+\beta^2 = \alpha'^2+\beta'^2$. Par sommation, $2\alpha^2 = 2\alpha'^2$, qui ont réels, puis par positivité, $\alpha = \alpha'$. Ensuite $\beta = \beta'$, soit $z = z'$.

Par conséquent il y a n racines carrées distinctes dans A_+, n autres dans A_-, et comme $A_+ \cap A_- = \emptyset$, elles sont bien toutes distinctes entre elles

Exo32

.1.

On montre l'égalité de ces ensembles par la double inclusion :

$\boxed{\operatorname{Sp}\varphi \subset \operatorname{Sp} f}$

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}\varphi$, alors il existe un ***endomorphisme*** u non nul tel que $\varphi(u) = f \circ u = \lambda u$. Comme $u \neq O$, il ***existe au moins un*** vecteur $y \in V$ tel que $u(y) \neq 0$ et il s'ensuit $f\big(u(y)\big) = \lambda u(y)$. Comme $u(y) \neq 0$, on en ***déduit*** λ valeur propre de f, cad $\lambda \in \operatorname{Sp} f$.

$\boxed{\operatorname{Sp} f \subset \operatorname{Sp}\varphi}$

Soit $\lambda \in \operatorname{Sp} f$, il existe donc $y \neq 0$, tel que $f(y) = \lambda y$. Rappelons alors que tous les vecteurs colinéaires à y sont alors aussi vecteurs propres associés à λ.

Il faut « *trouver* » un ***endomorphisme*** non nul u tel que $f \circ u = \lambda u$, ce qui s'écrit aussi ***pour tout*** x, $f\big(u(x)\big) = \lambda u(x)$. Considérons alors la ***projection*** p sur la droite $\operatorname{Vect}(y)$ parallèlement à n'importe quel supplémentaire (il en existe c'est du cours). Remarquons bien que pour tout x de V, $p(x)$ est colinéaire à y. Il s'ensuit :

$$\forall x \in V, \quad \varphi(p)(x) = (f \circ p)(x) = f(p(x)) = \lambda p(x) \quad \Longrightarrow \quad \varphi(p) = \lambda p$$

p ***n'est pas l'application nulle*** (car $p(y) = y \neq 0$). D'où on a bien $\lambda \in \operatorname{Sp}\varphi$.

.2. Notons $n = \dim V$. Soit λ une valeur propre commune à φ et f. Montrons $\dim\ \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda Id_{\mathscr{L}(V)}) = n \dim\ \operatorname{Ker}(f - \lambda Id_V)$. Notons ces espaces propres $E_\varphi(\lambda)$ et $E_f(\lambda)$.

$$u \in E_\varphi(\lambda) \iff \forall x \in V,\ \varphi(u)(x) = (f(u(x)) = \lambda u(x) \iff \forall x \in V,\ u(x) \in E_f(\lambda) \iff \operatorname{Im} u \subset E_f(\lambda)$$

Cet exercice « ramène »à un autre exercice *classique*, qui est de déterminer la dimension du sev L de $\mathscr{L}(V)$ des endomorphismes u tels que $\operatorname{Im} u \subset F$, F étant un sous-ev donné. La dimension est $n \times \dim F \leq n^2 = \dim \mathscr{L}(V)$ comme nous allons le démontrer : Il suffit de considérer l'isomorphisme trivial, noté ψ qui à un endomorphisme $u \in L$ (donc tel que $\operatorname{Im} u \subset F$) associe le morphisme $\psi(u) = u'$ de $\mathscr{L}(V,F)$ défini par $u'(x) = u(x)$! ψ isomorphisme est immédiat, la réciproque de ψ étant évidente. Il s'ensuit $\dim L = \dim \mathscr{L}(V,F) = \dim V \times \dim F = n \times \dim F$

Pour en revenir à notre exo, nous avons donc $\dim E_\varphi(\lambda) = n \times \dim E_f(\lambda)$

.3.

Méthode 1 : (utilise les questions précédentes)

On utilise la question précédente. En notant $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres 2 à 2 distinctes et communes à φ et f (d'après Q1). D'après Q2 :

$$\dim E_\varphi(\lambda_1)+\cdots+\dim E_\varphi(\lambda_p) = n\times\left(\dim E_f(\lambda_1)+\cdots+\dim E_f(\lambda_p)\right)$$

IL vient immédiatement :
$\dim E(\lambda_1)+\cdots+\dim E(\lambda_p)=n\ (=\dim V) \iff \dim F(\lambda_1)+\cdots+\dim F(\lambda_p)=n^2\ (=\dim \mathscr{L}(V))$,
ce qui donne exactement f diagonalisable ssi φ diagonalisable.

Méthode 2 : (directe par les matrices)

On se donne une matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme φ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par $\varphi(U)=MU$. Considérons la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en notant usuellement la matrice E_{ij} comme la matrice possédant un 1 à la position (i,j) et 0 ailleurs, base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on ordonne comme suit :
$(E_{11},E_{21},\dots,E_{n1},E_{12},E_{22},\dots,E_{n2},\dots,\dots,E_{1n},E_{2n},\dots,E_{nn})$
On va écrire la matrice A de φ dans cette base et établir A diagonalisable ssi M diagonalisable.

Commençons par regarder ce qui se passe pour $n=2$. Posons $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. On calcule :

$$\varphi(E_{11})=ME_{11}=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}\quad \varphi(E_{21})=ME_{21}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}\quad \varphi(E_{12})=ME_{12}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}\quad \varphi(E_{22})=ME_{22}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}$$

En faisant ***très attention*** à l'ordre qui est $(E_{11},E_{21},E_{12},E_{22})$, on constate :

$$A=\begin{pmatrix}a&b&0&0\\c&d&0&0\\0&0&a&b\\0&0&c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M&O\\O&M\end{pmatrix}$$

Regardons maintenant le cas quelconque. Le lecteur constatera que M_{ij} est le $i+(j-1)n$-ième vecteur de cette base. Ecrivons la matrice A de φ dans cette base. On calcule alors
$\varphi(M_{ij})=M\times M_{ij}=\sum_{k,l} m_{kl}M_{kl}\times M_{ij}=\sum_{k=1}^{n} m_{ki}M_{kj}$
On a utilisé la formule, que je ne redémontre pas ici, $E_{ij}\times E_{kl}=\delta_{jk}E_{il}$. On constate alors que les coordonnées correspondant à cette colonne (qui est la $i+(j-1)n$-ième colonne de A) sont la ième colonne de M, mais colonne qui commence « à la position »M_{1j}, soit la $1+(j-1)n$-ième ligne. Regardons bien ce qui se passe pour les premiers indices.
Pour la première colonne de A, $i=j=1$, la 1ère colonne de M commence à la position $1+(j-1)n=1$. Pour la deuxième colonne de A, $i=2,\ j=1$. On a la deuxième colonne de M qui commence à la position $1+(j-1)n=1$ aussi. La nième colonne de A, correspondant à $i=n,\ j=1$ contient la nième colonne de M aussi à la position 1. Donc dans la matrice A, se retrouve la matrice M dans le coin en haut à gauche.
Pour la $n+1$-ème colonne de A, $i=1,\ j=2$. On y retrouve la $i=1$ colonne de M et à la position $i+(j-1)n=n+1$. Le lecteur vérifiera que jusqu'à la $2n$ ième colonne de A, on trouvera toutes les colonnes de$M$ successivement toutes à la position $n+1$. Bref on trouve dans la matrice A, la matrice M à la position $(n+1,n+1)$ en haut à gauche.

Finalement, la matrice A est une matrice diagonale par blocs, avec n blocs diagonaux tous égaux à M. IL s'ensuit immédiatement A diagonalisable ssi M diagonalisable.

Exo35

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ annule le polynôme $Q = X^2 + X + 4$. Comme $\Delta = -15$, ce polynôme n'a pas de racines réelles et donc d'après un théorème $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A \subset \emptyset$ d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}} A = \emptyset$. Deux méthodes pour démontrer la parité de la dimension :

Méthode1 : On sait que toute matrice ***réelle*** d'ordre impair admet ***au moins une*** valeur propre réelle. Par la ***contraposéee***, cet énoncé devient : si une matrice ***réelle*** ne possède aucune valeur propre ***réelle***, son ordre est pair.

Méthode 2 : En raisonnant dans $\mathbb{C}$, ce polynôme Q possède deux racines complexes **non réelles** conjuquées, notées α et $\overline{\alpha}$ (inutile de les expliciter pour l'instant). La matrice étant réelle, le cours nous apprend que les vecteurs propres sont « *conjugués* » (au sens des coefficients de la matrice-colonne), et comme conséquence $\dim E(\alpha) = \dim E(\overline{\alpha})$. Le polynôme $Q = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ étant scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et donc $E(\alpha) \oplus E(\overline{\alpha}) = \mathbb{C}^n$.

En passant aux dimensions, il vient $n = \dim E(\alpha) + \dim E(\overline{\alpha}) = 2\dim E(\alpha)$, d'où la parité.

On pose donc $n = 2p$. α et $\overline{\alpha}$ sont chacune, racines de ***même*** multiplicité (donc p) du polynôme caractéristique. Notons que les habituelles relations coefficients-racines dans un polynôme permettent d'écrire la somme et le produit des racines sans les calculer : $S = \alpha + \overline{\alpha} = 2\Re\mathrm{e}\,\alpha = -1$ et $P = \alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = 4$. ENsuite on a :

$$\operatorname{tr} A = p\alpha + p\overline{\alpha} = pS = \boxed{\frac{-n}{2}} \qquad \det A = \alpha^p\overline{\alpha}^p = P^p = 4^p = \boxed{2^n} \qquad \chi_A(\lambda) = (X-\alpha)^p(X-\overline{\alpha})^p = \boxed{(\lambda^2+\lambda+4)^{n/2}}$$

Exo37

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^4 = A^2$. A annule donc le polynôme $P(X) = X^4 - X^2 = X^2(X-1)(X+1)$ qui est scindé mais pas à racines simples. On en déduit $\mathrm{Sp}\,A \subset \{0,-1,1\}$, cad les seules valeurs propres possibles réelles (ou complexes) sont $0,1$ ou -1. En ajoutant l'hypothèse $A \supset \{-1,1\}$, on obtient deux cas :

- $\mathrm{Sp}\,A = \{0,-1,1\}$. Ne pas oublier que l'on est en dimension 3... Comme A d'ordre 3 a ***3 valeurs propres distinctes***, A est diagonalisable.

- $\mathrm{Sp}\,A = \{-1,1\}$ Ici, 0 n'est pas valeur propre de A qui est donc ***inversible***, on multiplie donc à gauche l'égalité entre matrices par A^{-2}. IL vient $A^2 = I$. Ici, un autre polynôme annulateur trouvé $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est bien ***scindé à racines simples***, soit A diagonalisable.

Exo38

Méthode 1 (par analyse-synthèse) :

Analyse

Soit λ une valeur propre de φ, donc $\varphi(M) = \lambda M$ avec $M \neq 0$, ce qui s'écrit encore :

$$\left\{\begin{array}{rcl} d & = & \lambda a \\ -b & = & \lambda b \\ -c & = & \lambda c \\ a & = & \lambda d \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} d(1-\lambda^2) & = & 0 \\ (\lambda+1)b & = & 0 \\ (\lambda+1)c & = & 0 \\ a & = & \lambda d \end{array}\right.$$

On a remplacé $a = \lambda d$ dans la première ligne. On remarque que si $\lambda \neq \pm 1$, alors $a = b = c = d = 0$, cad $M = 0$. On vient donc de montrer que les ***seules valeurs propres possibles*** sont 1 et -1. On peut arrêter l'analyse là car on « *regarde / résout* » ces 2 valeurs : il faudra par contre bien pratiquer par des $\Longleftrightarrow$.

Synthèse :

$$\varphi(M) = M \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} d & = & a \\ -b & = & b \\ -c & = & c \\ a & = & d \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & d \\ b & = & 0 \\ c & = & 0 \\ d & = & d \end{array} \right.$$

1 est bien ***valeur propre*** car on peut prendre $d \neq 0$ et l'espace propre associé est la droite engendrée par $(1,0,0,1)$ qui rapporté à la base canonique donne $E(1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(I_n\right)$

$$\varphi(M) = -M \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} d & = & -a \\ -b & = & -b \\ -c & = & -c \\ a & = & -d \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & -d \\ b & = & b \\ c & = & c \\ d & = & d \end{array} \right.$$

Comme il existe visiblement des matrices non nulles vérifiant ce système, -1 est ***bien valeur propre*** de φ et son espace propre associé est l'hyperplan $H = E(-1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -d & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

Remarques

- On a $\dim E(-1) + \dim E(1) = 3 + 1 = 4 = \dim \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, φ est donc diagonalisable.
- φ est en fait la ***symétrie par rapport*** à la droite des matrices d'homothéties ***parallèlement*** à l'hyperplan des matrices H

Méthode 2 (par une matrice du morphisme) :

On choisit d'écrire la matrice φ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On rappelle que la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est $\mathscr{E} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

On calcule les images de cette base par φ et on donne ses coordonnées dans cette même base

$$\varphi\left(E_{11}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 1E_{22}$$

$$\varphi\left(E_{12}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{11} - 1E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

$$\varphi\left(E_{21}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{11} + 0E_{12} + -1E_{21} + 0E_{22}$$

$$\varphi\left(E_{22}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1E_{11} + 0E_{12} + 0E_{21} + 0E_{22}$$

D'où la matrice M de φ dans la base canonique $\mathscr{E}$. On constate qu'elle est ***symétrique réelle*** donc ***diagonalisable*** dans $\mathbb{R}$, donc φ possède 4 valeurs propres réelles (comptées avec la multiplicité) et on calcule son polynôme caractéristique :

$$M=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\quad \det(\lambda I_4-M)=\begin{vmatrix}\lambda&0&0&-1\\0&\lambda+1&0&0\\0&0&\lambda+1&0\\-1&0&0&\lambda\end{vmatrix}\overbrace{=}^{(1)}\lambda\begin{vmatrix}\lambda+1&0&0\\0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}0&\lambda+1&0\\0&0&\lambda+1\\-1&0&0\end{vmatrix}$$

(1) résulte du développement par rapport à la première ligne. La première matrice (3×3) est diagonale et on applique la méthode de **Sarrus**[1] à l'autre :

$$\det(\lambda I_4-M)=\lambda\lambda(\lambda+1)^2-(\lambda+1)^2=(\lambda+1)^2(\lambda^2-1)=(\lambda+1)^3(\lambda-1)$$

On retrouve que les valeurs propres sont 1 et -1. On calcule les espaces propres comme plus haut. La différence est que l'on sait ***à l'avance*** que $E(1)$ est une droite et $E(-1)$ un hyperplan (car diagonalisable, donc dimension égale multiplicité). On procède comme plus haut pour calculer les espaces propres associés à 1 et -1.

Méthode 3 (par un polynôme annulateur 5/2) :

On constate que $\varphi^2=Id$ car :

$$\varphi^2\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=Id\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)$$

Par conséquent φ ***annule le polynôme*** $X^2-1=(X-1)(X+1)$ qui est ***scindé à racines simples***. φ est donc ***diagonalisable*** avec $\mathrm{Sp}\,\varphi\subset\{-1,1\}$. -1 et 1 sont les seules valeurs propres possibles et on continue en cherchant les (éventuels) vecteurs propres comme dans la méthode 1.

Exo39

Considérons la matrice $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ et $T-I=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Comme T est triangulaire, il est immédiat que ses valeurs propres sont 1 de mutliplicité 2 et 2 valeur propre simple. Il est aussi clair que $\mathrm{rg}(T-I)=2$, soit $\dim E(1)=\dim\ \mathrm{Ker}(T-I)=1$ (et donc d'ailleurs, T non diagonalisable). ***Dans le cours***, on sait que si une matrice est semblable à T, elle a les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités, ***mais ce n'est pas suffisant***. En fait, il suffirait de vérifier que l'espace propre de A a même dimension que T, cad 1, ***mais ce n'est pas du cours***. On va donc procéder autrement, et dans ce genre de situations, c'est une analyse-synthèse.

Analyse :

Si A est semblable à T et soit $a\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A, alors ***on sait*** qu'il existe une base $e_1,\dots,e_3$ de $\mathbb{R}^3$ telle que T est la matrice de a dans cette base, cad : $a(e_1)=e_1\quad a(e_2)=e_1+e_2\quad a(e_3)=2e_3$.

On en tire immédiatement, e_1 vecteur propre associé à 1 et e_3 vecteur propre associé à 2. Ensuite on écrit (c'est ca qu'il faut avoir déjà vu une fois, et on « *procède* » toujours de manière plus ou moins analogue) :

$$a(e_2)-e_2=e_1\implies(a-Id)(e_2)=e_1\ \textbf{\textit{puis}}\ (a-Id)(e_1)=0=(a-Id)^2(e_2)$$

1. **Sarrus Pierre-Frédéric** : français (1798-1861). Connu pour méthode de calcul éponyme du déterminant d'ordre 3.

Conclusion :, on « *prend* » $e_2 \in \operatorname{Ker}(a-Id)^2$ ***mais pas dans*** $\operatorname{Ker}(a-Id)$ (sinon $e_1=0$). On rappelle $\operatorname{Ker}(a-Id) \subset \operatorname{Ker}(a-Id)^2$. On « *prend* » ensuite $e_1=(a-Id)(e_2)$. Il ***faut comprendre*** que l'analyse est terminée...

Synthèse :

► On prend e_3 vecteur propre associé à 2. On aura donc bien $a(e_3)=2e_3$. ***Il faut donc vérifier*** que c'est ***possible***, cad 2 est bien valeur propre de A.

► On prend $e_2 \in \operatorname{Ker}(a-Id)^2 - \operatorname{Ker}(a-Id)$, puis $e_1=(a-Id)(e_2)$. On aura donc bien $a(e_2)=e_1+e_2$, puis comme $(a-Id)(e_1)=(a-Id)^2(e_2)=0$, on aura bien $a(e_1)=e_1$. Reste ***à vérifier que c'est possible***. Il faudra donc ***avoir*** 1 valeur propre et $\operatorname{Ker}(a-Id) \not\subset \operatorname{Ker}(a-Id)^2$.

► On terminera en ***vérifiant*** que (e_1,e_2,e_3) est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

On calcule (je ne mets pas les détails ici, c'est trop simple) :

$$\chi_A(x)=(x-1)^2(x-2) \qquad A-2I=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix} \qquad A-I=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix} \qquad (A-I)^2=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}$$

Pour la 1re matrice, on remarque $C_1+C_2+C_3=0$, on prend donc $e_3=(1,1,1)$. POur la 3e , on remarque $C_1=C_2=-C_3$, ***mais*** il faut prendre une « *combinaison* » qui ne marche pas dans la deuxième (sinon on aura 0 pour e_1). on prend $C_2=-C_3$ qui donne $e_2=(0,1,1)$. On calcule ensuite $(a-I)(e_2)$ qui donne $e_1=(2,0,2)$. (e_1,e_2,e_3) est bien base car :

$$\begin{vmatrix}2&0&1\\0&1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=2+0+0-2-2=-2\neq 0$$

Exo38

Méthode 1 : Par Analyse-Synthèse :

Analyse :

Soit $M\neq 0$ tel que $\varphi(M)=\lambda M$. IL vient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}a&=&\lambda d\\b&=&-\lambda b\\c&=&-\lambda c\\d&=&\lambda a\end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}a&=&\lambda(\lambda a)\\c(1+\lambda)&=&0\\b(1+\lambda)&=&0\\(1-\lambda^2)d&=&0\end{array}\right.$$

Comme l'un des quatre a,b,c,d est non nul, nécessairement, au moins de l'une de ces équations, on tire $\lambda=\pm 1$, qui sont donc les **seules valeurs propres possibles**. L'analyse est donc terminée (pour les valeurs propres)

Synthèse :

Pour vérifier qu'elles sont bien valeurs propres, ***ici, dans cette réciproque***, on « résoud » et en plus on aura les vecteurs propres. Par contre, ***il faut vérifier*** qu'il y en a au moins un nul, cad au moins un quadruplet (a,b,c,d) non totalement nul.

$$E(1)=\operatorname{Ker}(\varphi-1.Id):\left\{\begin{array}{rcl}a&=&d\\b&=&-b\\c&=&-c\\d&=&a\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl}a&=&a\\b&=&0\\c&=&0\\d&=&a\end{array}\right. \quad \text{en \textit{fonction} de \textbf{1} variable}$$

On a donc une droite, plus précisément $E(1) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$

$$E(-1) = \text{ Ker}(\varphi - 1.Id) : \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -d\\ b &=& b\\ c &=& c\\ d &=& -a\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& a\\ b &=& b\\ c &=& c\\ d &=& -a\end{array}\right. \quad \text{en } \textit{fonction} \text{ de } \mathbf{3} \text{ variables}$$

On aurait **aussi pu résoudre en** : $\iff a + d = 0$ (**1** équation : hyperplan).

L'espace propre associé à -1 est l'hyperplan de matrices dont la forme générale est $\begin{pmatrix}a & b\\c & -a\end{pmatrix}$. C'est en fait l'ensemble des matrices de trace nulle.

Méthode 2 : Par une matrice B de φ

Pas oublier, lorsqu'on **décide** d'utiliser une matrice de prendre une **base adaptée**. Ici, on va tout simplement utiliser la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (qui va se révéler adaptée car il y a plein de 0…). On commence donc par calculer l'image par φ de chacune de ces matrices $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.puit on met en colonnes ses coordonnées (attention à l'ordre : comme on est dans la base canonique, les coordonnées sont les coefficients de la matrice, mais bien regarder l'ordre de la base, notamment si c'est « *par ligne* » ou « *par colonne* ».

$$\varphi(E_{11}) = \varphi\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \quad \varphi(E_{12}) = \varphi\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} \quad \varphi(E_{21}) = \varphi\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix} \quad \varphi(E_{22}) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \implies \chi_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0 & -1\\ \hline 0 & \lambda+1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & \lambda+1 & 0\\-1 & 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix} \overbrace{=}^{\text{dév } L_2} (\lambda+1) \times \begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\0 & \lambda+1 & 0\\-1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$
$$= (\lambda+1)\Big(\lambda^2(\lambda+1) + 0 + 0 - (\lambda+1) - 0 - 0\Big) = \cdots = (\lambda-1)(\lambda+1)^3$$

On peut remarquer que B est **symétrique réelle**, donc B, donc φ diagonalisable. On **sait donc déjà** avant tout calcul (théorème d'aujourd'hui), que $\dim E(1) = \mu(1) = 1$ cad est une *droite*, et que $\dim E(-1) = \mu(-1) = 3 = 4 - 1$ cad un *hyperplan*. Il reste à les calculer car la question les demande. Comme plus haut.

Méthode 3 : Par polynôme annulateur (5/2)

On commence par remarquer que φ échange deux coefficients et en oppose deux autres, il vient, qu'en l'appliquant deux fois, on « retombe sur ses pieds » , cad mathématiquement, $\varphi^2 = Id$. φ est donc une projection, cad diagonalisable de valeurs propres 1 et -1. Noter que cette méthode ne donne pas la multiplicité…Pour les vecteurs propres, utilisez la synthèse de la méthode 2.