Quelques Corrections Algebre Linéaire

Exo1

On considère l'ensemble H des polynômes de la forme $P_{ab} = aX^3 + (b-2a)X^2 - 2bX + 3a$. ($a, b$ réels). Montrez que c'est un plan. *(muni des lois usuelles)*. Précisez une base.

Il est clair que H est un sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$, qui est un $\mathbb{R}$-ev usuel. Par conséquent, pour démontrer H $\mathbb{R}$-ev, il ***faut et il suffit*** de démontrer sous-ev de $\mathbb{R}[X]$

Méthode 1 générale (stabilité par les lois + et .) :

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ deux scalaires et $P_{ab}, P_{a'b'}$ deux polynômes de H. Montrons $\alpha P_{ab} + \beta P_{a'b'} \in H$:

$$\begin{aligned}
\alpha P_{ab} + \beta P_{a'b'} &= \alpha\Big(aX^3 + (b-2a)X^2 - 2bX + 3a\Big) + \beta\Big(a'X^3 + (b'-2a')X^2 - 2b'X + 3a'\Big) \\
&= (\alpha a + \beta a')X^3 + \Big((\alpha b + \beta b') - 2(\alpha a + \beta a')\Big)X^2 - 2(\alpha b + \beta b')X + 3(\alpha a + \beta a') \\
&= AX^3 + (B-2A)X^2 - 2BX + 3A \ = \ \boxed{P_{AB} \in H}
\end{aligned}$$

On a posé $A = \alpha a + \beta a'$ et $B = \alpha b + \beta b'$ qui sont bien réels. OK : on reconnaît bien la « *forme* » d'un élément de H.

Méthode 2 plus efficace ici :

On remarque :

$$P_{ab} = aX^3 + (b-2a)X^2 - 2bX + 3a = a\underbrace{\Big(X^3 - 2X^2 + 3\Big)}_{Q(X)} + b\underbrace{\Big(X^2 - 2X\Big)}_{R(X)} = \alpha Q + \beta R$$

Comme a, b ***parcourent tout*** $\mathbb{R}$, on en déduit que H est l'ensemble de ***toutes les combinaisons linéaires*** de la famille (Q, R). Par conséquent (cours), c'est un espace vectoriel, les sous-espace vectoriel ***engendré par*** cette famille. On note $H = \text{Vect}(Q, R) =< Q, R >$ et on en déduit $\dim H \leq 2$.

Pour démontrer que H est un plan, cad de dimension 2, on commence par chercher une base (il peut y a d'autres méthodes selon les exos). On reprend le « *fil* » de la méthode 2 (d'où son « *efficacité* ») : on a en fait démontré que (Q, R) est ***génératrice de*** H, et même $\dim H \leq 2$. Reste à regarder si la famille est ***libre*** : comme $\deg Q \neq \deg R$, la famille est libre, donc base de H, donc $\dim H = \text{Card}(Q, R) = 2$.

Remarques

- ***Attention au raisonnement !*** $E = \text{Vect}(u, v)$ ne donne pas dimension 2 mais $\dim E \leq 2$. Pensez au cas $u = v$ qui donne dimension 1 (et même dimension 0 si $u = 0$). Rappelons que $\text{Vect}(u, v)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires $\alpha u + \beta v$.

- Plus généralement, $E = \text{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ amène $\dim E \leq p$. Pour en savoir un peu plus, il faut regarder si la famille est libre ou liée et plus ***précisément*** le ***rang de la famille*** des $(x_i)_{1\leq i\leq p}$: $\dim E = \text{rg}(x_i)_{1\leq i\leq p}$.

- Une famille de polynômes de degrés tous distincts est ***libre*** (cours). On dit aussi une famille « *échelonnée en degrés* »

Exo2

Soit $A \neq 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ tq $\varphi(M) = M - \operatorname{tr}(M)A$. Montrez φ est automorphisme ssi $\operatorname{tr} A \neq 1$.

Je vous démontre que c'est un morphisme (d'ev), ou une application linéaire :
$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en appliquant la ***linéarité*** de la trace (cours) :

$$\varphi(\alpha M + \beta N) = (\alpha M + \beta N) - \operatorname{tr}(\alpha M + \beta N)A = \alpha M + \beta N - (\alpha \operatorname{tr} M + \beta \operatorname{tr} N)A$$
$$= \alpha(M - \operatorname{tr} MA) + \beta(N - \operatorname{tr} NA) = \alpha\varphi(M) + \beta\varphi(N)$$

Il y a beaucoup de méthodes pour démontrer ***automorphisme*** (cad ***bijectif***, une fois montré endomorphisme). Comme ici, on a un ***endomorphisme de dimension finie***, le plus simple et le « *plus usuel* » est de démontrer $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, ce qui équivaut à montrer φ injective et équivaut d'ailleurs aussi à démontrer $\operatorname{Ker}\varphi \subset \{0\}$ (puisque $\{0\} \subset \operatorname{Ker}\varphi$ est évident). On démontre donc les 2 sens de $\operatorname{tr} A \neq 1 \iff \operatorname{Ker}\varphi \subset \{0\}$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ ***Hypothèse*** $\operatorname{tr} A \neq 1$. Montrons $\operatorname{Ker}\varphi \subset \{0\}$. Soit $M \in \operatorname{Ker}\varphi$, donc $\varphi(M) = M - \operatorname{tr}(M)A = 0$. On passe à la trace :

$$\operatorname{tr}\big(M - \operatorname{tr}(M)A\big) = \operatorname{tr}(M) - \operatorname{tr}(M)\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(M)(1 - \operatorname{tr}(A)) = \operatorname{tr}(0) = 0$$

De l'hypothèse, il vient $\operatorname{tr}(M) = 0$ que l'on réinjecte dans $M - \operatorname{tr}(M)A = 0$ et qui nous donne $M = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On démontre l'autre sens ***par la contraposée***. On part donc de $\operatorname{tr} A = 1$ et on doit montrer $\operatorname{Ker}\varphi \neq \{0\}$. L'idée est de considérer $M = A \neq 0 \in \operatorname{Ker}\varphi$. On écrit :

$$\varphi(A) = A - \operatorname{tr}(A)A = A - A = 0$$

Je vous rappelle les propriétés sur la trace

Remarques

- La trace est la sommme des coefficients diagonaux d'une matrice $\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{ii}$
- la trace est linéaire : $\operatorname{tr}(\alpha M + \beta N) = \alpha \operatorname{tr}(M) + \beta \operatorname{tr}(N)$.
- $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. ***Propriété importante*** (qu'il faudrait savoir redémontrer : allez voir votre cours de Sup) d'autant plus que, ***en général, on a*** $AB \neq BA$. Je vous rappelle qu'on a aussi $\det(AB) = \det(BA)$.
  On peut en déduire, par exemple $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(BCA) = \operatorname{tr}(CAB)$. **mais attention ! pas** $= \operatorname{tr}(BAC)$
  (je vous laisse y réfléchir).

Exo3

Calculez noyau et image de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ donné dans la base canonique par $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Pour le noyau d'une matrice, le « *management* » est toujours le même : on cherche à partir du système, à écrire ***toutes*** les variables (ici 3 : x, y, z) en fonction d'1 ou de 2 variables (si c'est 1, c'est une droite, si c'est 2, c'est un plan etc...). Si vous avez bien assimilé la méthode du pivot, vous pouvez l'utiliser, mais ici, il y a un 0, c'est donc beaucoup plus facile :

$$u \in \operatorname{Ker} f \iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} M \iff MX = O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x-y+2z & = & 0 \\ y-z & = & 0 \\ x+2y-3z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & z \\ z & = & z \end{array} \right.$$

On ***reconnait*** la ***droite*** dirigée (engendrée) par $(1,1,1)$. $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}(1,1,1)$. On en déduit $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1e_1 + 1e_2 + 1e_3)$. Or ici, l'énoncé nous parle de la ***base canonique*** de $\mathbb{R}_2[X]$. On a donc $e_1 = 1$ $e_2 = X$ $e_3 = X^2$. Finalement $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(1 + X + X^2)$

Le ***théorème du rang*** amène donc dim $\operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 -$ dim $\operatorname{Ker} f = 3 - 1 = 2$. Le cours nous donne $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3)$, ce qui d'ailleurs signifie aussi que (C_1, C_2, C_3) est ***génératrice*** de $\operatorname{Im} M$. Trouver l'image d'une matrice est plus simple que pour un morphisme : il faut en donner une base. Comme la dimension de $\operatorname{Im} M$ est 3, cette famille ne peut pas être une base (il y en « *un de trop* »).
On a vu $(1,1,1) \in \operatorname{Ker} M$ ce qui nous donne ***aussi de manière équivalente*** $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, ou $C_3 = -C_1 - C_2$. Par conséquent $\operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1, C_2, C_3) = \operatorname{Vect}(C_1, C_2)$. La famille (C_1, C_2) est donc ***génératrice de*** l'image et est de ***cardinal 2***. C'est donc ***une base*** de $\operatorname{Im} M$. Terminé.
On « *revient* » au morphisme f pour donner $\operatorname{Im} f$ qui en fait est la question posée : $C_1 = (-1, 0, 1)$ et $C_2 = (-1, 1, 2)$. on utilise la base $(1, X, X^2)$, soit une base de $\operatorname{Im} f$ est $(-1 + X^2, -1 + X + 2X^2)$

Exo5

φ est linéaire car pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, f et g continues sur [0,1], et pour tout x réel :

$$\varphi(\alpha f + \beta g)(x) = \int_0^x \alpha f + \beta g = \alpha \int_0^x f + \int_0^x g = \alpha\varphi(f)(x) + \beta\varphi(g)(x) = \big[\alpha\varphi(f) + \beta\varphi(g)\big](x)$$

Pour montrer φ ***endo***morphisme il faut bien vérifier que $\varphi(f) \in E$, pour $f \in E$, cad que si f est ***continue*** sur [0,1], alors $x \to \int_0^x f$ est aussi ***continue*** sur [0,1]. Je rappelle le ***théorème*** : si f est continue sur un intervalle I, alors la fonction $x \to \int_a^x$ est la primitive sur I de f qui s'annule en a, elle est même de classe C^1. Sa dérivée sur I vaut $f(x)$. Il vient ici que $x \to \int_0^x$ est dérivable sur $I = [0,1]$, donc ***continue***, ce que l'on voulait.

Cherchons le noyau de φ :

$$f \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \varphi(f) = 0 \iff \forall x \in [0,1], \varphi(f)(x) = \int_0^x f = 0$$

En utilisant le théorème plus haut, il vient par dérivation de cette dernière égalité que pout tout x de $[0,1]$, $f(x) = 0$. ***Réciproquement***, la fonction nulle est bien élément du noyau. On a donc démontré $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

Pour trouver l'image de φ, on ne peut pas s'aider ici du théorème du rang car la dimension est infinie. Il faut essayer de « *reconnaitre* » cet ev et ***donc on analyse les*** « *images* » $\varphi(f)$. On a déjà vu que $\varphi(f)(x) = \int_0^x f$ est la primitive de f sur [0,1] qui s'annule en 0 et est de classe C^1. Or on sait que les fonctions C^1 sur [0,1] est un ev (comme les fonctions continues, revu en cours, on peut considérer que c'est du cours). Notons-le F. L'ensemble des fonctions s'annulant en 0 est aussi un ev, notons le G. Pour démontrer que c'est un ev, cad un ***sev*** de E, on peut prendre la méthode usuelle mais aussi une méthode plus rapide : on remarque que $G = \operatorname{Ker}\psi$ avec $\psi : f \longrightarrow f(0)$ (je vous laisse y réfléchir). En spé, on peut dire que la linéarité de ψ est immédiate. On vient donc de démontrer $\operatorname{Im}\psi \subset F$ et $\operatorname{Im}\psi \subset G$, soit encore $\operatorname{Im}\psi \subset F\cap G$. Le but est, dans l'analyse, de trouver une inclusion qui soit une égalité. C'est assez difficile en général. C'est le cas ici.

. Montrons la ***Réciproque***. Soit une fonction g de $F\cap G$, cad une fonction C^1 sur $[0,1]$ s'annulant en 0. ***Montrons*** qu'elle est dans l'image de φ, cad qu'il ***existe*** un f continu tel que $\int_0^x f = g$. Le lecteur vérifiera immédiatement que $f = g'$, car on a clairement :

$$\varphi(g')(x) = \int_0^x g' = g(x) - g(0) = g(x)$$

On a démontré $\operatorname{Im}\varphi = F\cap G$, cad est l'ev des fonctions C^1 sur $[0,1]$ s'annulant en 0

Exo6

.1.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \iff AM = 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+2c & = & 0 \\ b+2d & = & 0 \\ 2a+4c & = & 0 \\ 2b+4d & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2c \\ b & = & -2d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -2c+0d \\ b & = & 0c-2d \\ c & = & c+0d \\ d & = & 0c+d \end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{U} + d\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{V}$$

$\operatorname{Ker} f$ est donc un plan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\operatorname{Ker} f = \langle U, V \rangle$

.2. Comme $\operatorname{Ker} f \neq 0$, f n'est pas injective et comme f est une endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, de dimension finie (4), alors f n'est pas non plus surjective. On aurait pu aussi le retrouver par le théorème du rang qui nous donne $\dim \operatorname{Im} f = 4-2 = 2$. Or f est surjective ssi $\operatorname{Im} f = \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \iff \dim \operatorname{Im} f = 4$.

.3. (U,V) est génératrice de $\operatorname{Ker} f$. Comme (U,V) est clairement libre, puisque, visiblement, U et V ne sont pas colinéaires, donc (U,V) est unne base de $\operatorname{Ker} f$. Pour l'image, deux méthodes :
Méthode 1 :
Le théorème du rang nous amène dim $\operatorname{Im} f = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim \operatorname{Ker} f = 4-2 = 2$. Il s'ensuit que toute base de $\operatorname{Im} f$ contient deux matrices « libres » . On commence donc par en prendre deux « au hasard » et on verra bien…Par définition $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des matrices AM. Le plus simple est de commencer par prendre l'image de 2 matrices de la base canonique, donc on calcule :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(M) = AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = U' \qquad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow f(M) = AM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = V'$$

Visiblement (***on ne peut le dire que pour deux vecteurs !! sinon il faut le démontrer proprement)*** U' et V' ne sont pas colinéaires, donc (U',V') est une famille libre à deux éléments de $\operatorname{Im} f$, donc une base de $\operatorname{Im} f$.
Méthode 2 :
Par définition, $\operatorname{Im} f$ est l'ensemble des matrices AM, pour M « variant ». En reprenant plus haut, on écrit :

$$AM = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+4c & 2b+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ 2(a+2c) & 2(b+2d) \end{pmatrix} = (a+2c)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + (b+2d)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = (a+2c)U' + (b+2d)V'$$

On en déduit $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(U', V')$. (***Attention, on ne peut pas tout de suite conclure*** = car on n'a pas « $\alpha U' + \beta V'$ »). Pour prouver le =, on pourrait prouver que $a+2c$ et $b+2d$ parcourent tout $\mathbb{R}$ indépendamment l'un de l'autre. On peut aussi reprendre le théorème du rang : comme $\dim \operatorname{Im} f = 2$ et $\dim \operatorname{Vect}(U', V') \geq 2$, on en déduit le « = », cad (U', V') génératrice de $\operatorname{Im} f$, donc base de $\operatorname{Im} f$ car de « bon » cardinal.

Exo7

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \in \operatorname{Ker}\varphi \iff \varphi(M) = MD - DM = 0 \iff MD = DM$. (Le noyau de φ est donc l'ensemble des matrices qui commutent avec D, qu'on appelle le ***commutant*** de D et qui est un ev, puisque c'est un noyau ...). Cet exo ressemble un peu au précédent, sauf que c'est une matrice $n \times n$. c'est donc plus difficile à « gérer ».

On écrit $M = (M_{ij})$ et $D = (d_{ij})$ avec d_{ii} distincts entre eux et $\forall\, i \neq j, d_{ij} = 0$ et on applique la formule-produit : pour tous $1 \leq i, j \leq n$

$$[MD - DM]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ik} d_{kj} - \sum_{k=1}^{n} d_{ik} m_{kj} \overbrace{=}^{*} m_{ij} d_{jj} - d_{ii} m_{ij} = m_{ij}(d_{jj} - d_{ii})$$

* on a appliqué, pour la première somme, $d_{kj} = 0$ sauf (peut-être) pour $k = j$ et pour la deuxième, $d_{ik} = 0$, sauf pour $k = i$. De l'hypothèse, fondamentale donc, les coefficients d_{ii} sont tous distincts, il vient, que si $MD - DM = 0$, alors pour $i \neq j$, $d_{ii} - d_{jj} \neq 0$, donc $m_{ij} = 0$, cad on vient de démontrer que M est diagonale. La réciproque étant immédiate, on a $\operatorname{Ker}\varphi = D_n(\mathbb{C})$. Les élèves ambitieux peuvent retenir ce résultat : les matrices commutant avec les matrices diagonales à ***coefficients diagonaux tous distincts*** sont toutes les matrices diagonales. Rappelons aussi ce résultat : les matrices commutant avec toutes les matrices, sont seulement les matrices scalaires, cad les matrices d'homothétie, cad les αI_n.

Exo8

Je corrige juste l'inégalité non traitée en cours $\dim \operatorname{Ker} f^2 \leq 2 \dim \operatorname{Ker} f$.

En fait, si vous vous rappelez bien, on en était pas loin au tableau : considérons l'aplication φ définie de $\operatorname{Ker} f^2$ dans $\operatorname{Ker} f$ qui à x associe $f(x)$ (une sorte de f « *restreint* » à l'ev $\operatorname{Ker} f^2$). Par contre, ici, il faut prouver qu'elle est bien ***définie***, cad qu'on a bien $f(x) \in \operatorname{Ker} f$. Ceci provient immédiatement de $x \in \operatorname{Ker} f^2$ puisque $f(f(x)) = f^2(x) = 0$ (faites l'effort de comprendre). On applique maintenant le théorème du rang à φ :

$$\dim \operatorname{Ker} f^2 = [\dim E] = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im}\varphi$$

Cette dernière égalité se prouve par $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker} f$: on a clairement $x \in \operatorname{Ker}\varphi$ ssi $\varphi(x) = f(x) = 0$ et, ***ne pas oublier***, $x \in [E] = \operatorname{Ker} f^2$ donc ssi $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} f^2$. Or on a l'inclusion immédiate (montrée en exo) $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2$. Il vient donc $x \in \operatorname{Ker}\varphi \iff x \in \operatorname{Ker} f$.

Pour terminer, $\operatorname{Im}\varphi$ est un sev de l'espace d'arrivée de φ qui est $\operatorname{Ker} f$. Il vient donc $\dim \operatorname{Im}\varphi \leq \dim \operatorname{Ker} f$. En injectant plus haut, on a l'égalité demandée.

Exo9

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculez J^2. Montrez J inversible et exprimez J^{-1}

On calcule $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Il y a beaucoup de méthodes pour montrer qu'une matrice est inversible.

Méthode 1 : Calcul du déterminant non nul :

On utilise ici la méthode de **Sarrus**[1] :

$$\det J = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+1+1-0-0-0 = 2 \neq 0$$

Ok. Par contre cette méthode ne nous donne pas l'inverse...

Méthode 2 : Par le calcul du noyau

On vérifie $\operatorname{Ker} J = \{(0,0,0)\}$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} J \iff JX = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y+z &=& 0 \\ x+z &=& 0 \\ x+y &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array} \right.$$

Ok. Par contre cette méthode ne nous donne pas l'inverse...

Méthode 3 : Recherche d'un polynôme annulateur :

Ici, on « *sent bien* » qu'il faut utiliser le calcul de J^2. Comment ? Comme ça : il ***faut remarquer*** $J^2 = J + 2I_3$. Ensuite on écrit : $J^2 - J = 2I \implies \frac{1}{2}\, J(J-I) = I$. Ceci prouve J ***inversible*** et nous donne l'inverse : $J^{-1} = \frac{1}{2}(J-I)$, ce qui donne :

$$J^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarques

- Les 5/2 : $X^2 - X - 2$ est annulateur et $\operatorname{Sp} J \subset Rac(P)$. En tous cas, $0 \notin \operatorname{Sp} J$ donc J inversible
- Attention ! Par exemple : $2J = J \times 2I$ et ***non*** $2J = J \times 2$! On n'écrit ***pas*** $J^2 - J = J(J-1)$!
- Il y a une ***méthode générale*** pour calculer l'inverse d'une matrice. Je vous l'explique là : il faut la comprendre car je n'aurais pas trop le temps de la réexpliquer. L'idée est ***d'inverser le système associé***, ou encore d'écrire $Y = JX \iff X = j^{-1}X$. Vous allez comprendre sur cet exemple :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ x \end{pmatrix} \quad Y = JX \iff \left\{ \begin{array}{rcl} u &=& y+z \\ v &=& x+z \\ w &=& x+y \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} u-v &=& y-x \\ v &=& x+z \\ w &=& x+y \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x &=& w-u+v \\ 2y &=& u-v+w \\ z &=& v-x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \frac{1}{2}(-u+v+w) \\ y &=& \frac{1}{2}(u-v+w) \\ z &=& \frac{1}{2}(u+v-w) \end{array} \right.$$

$$\iff X = J^{-1}Y \quad \text{soit} \quad J^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Attention ! à bien mettre les varaibles ***dans l'ordre*** !

On pose $P_i = X^i(X-1)$, pour $0 \leq i \leq n-1$.

Méthode 1

La famille $\mathscr{E} = (P_i)_{0\leq i\leq n-1} = \Big(P_0, P_1, \dots, P_{n-1}\Big)$ est une ***base*** de $F = \Big\{ P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = 0 \Big\}$, puisque :

1. **Sarrus Pierre-Frédéric** : français (1798-1861). Connu pour méthode de calcul éponyme du déterminant d'ordre 3.

- $P_i \in F$ car clairement $P_i(1) = 0$.

- $\mathscr{E}$ est ***libre*** puisque constituée de polynômes de ***degrés distincts***. En effet $\deg P_i = i+1$.

- $\mathscr{E}$ est ***génératrice*** de F, puisque, pour tout $P \in F$, $P(1) = 0$ est équivalent à $X - 1 \;/\; P(X)$, puis :

$$\begin{aligned} P = (X-1)Q(X) &= \left(X-1\right)\left(a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}\right) \\ &= a_0\left(X-1\right) + a_1X\left(X-1\right) + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}\left(X-1\right) \\ &= a_0P_0 + a_1P_1 + \cdots + a_{n-1}P_{n-1} \end{aligned}$$

Méthode 2 (cours spé ? sur les hyperplans)

On considère l'application $\varphi : P \in \mathbb{R}_n[X] \to P(1)$. φ est clairement une ***forme linéaire*** sur $\mathbb{R}_n[X]$. Elle est non nulle donc $\operatorname{Ker}\varphi$ est un ***hyperplan***, cad un sev de dimension $\dim \mathbb{R}_n[X] - 1 = (n+1) - 1 = n$. Par définition de F, on a $F = \operatorname{Ker}\varphi$. Connaissant dans cette méthode la ***dimension*** de F, il est inutile de démontrer génératrice et on reprend donc la démonstration de base de F en « court-circuitant » la troisième partie :

La famille $\mathscr{E} = (P_i)_{1 \le i \le n-1}$ est une base de F, puisque :

- $P_i \in F$ car clairement $P_i(1) = 0$.

- $\mathscr{E}$ est ***libre*** puisque constituée de polynômes de ***degrés distincts***. En effet $\deg P_i = i+1$.

- $\operatorname{Card}\mathscr{E} = n = \dim F$

Exo18

Exo20

Analyse :

On pose $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que U est triangulaire supérieure « stricte » , donc nilpotente, en fait $U^2 = 0$.

Si A vérifie $A^n = U$, alors $A^{2n} = U^2 = 0$, cad A est nilpotente. Comme A est d'ordre 2, en utilisant l'exo précédent, $A^2 = 0$. D'ou, comme $A^n \neq 0$, on en déduit $n < 2$. On peut considérer l'analyse comme terminée. . .

Réciproque : Si $n \geq 2$, un tel A n'existe pas. Si $n = 0$, par convention, $A^0 = I \neq U$. Si $n = 1$, le seul A qui convient est $A = U$

Exo24

Si p est une projection de E, on sait $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = E$, et aussi, pour $x \in \operatorname{Im} p, u(x) = x$, cad $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p_I d)$ (l'espace propre associé à 1). En prenant une base ***adaptée*** à p, cad une base $(e_1, \dots, e_m)$ de $\operatorname{Ker} p$ complétée en une base de E : $(e_1, \dots, e_n)$. On a $u(e_1) = \cdots = u(e_m) = 0$, et pour $m+1 \leq i \leq n$, $u(e_i) = e_i$. Il vient que la matraice de p dans cette base adaptée est :

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\hphantom{0 \;\dots\; 0}}^{m}\;\overbrace{\hphantom{0 \;\dots\;\dots\; 0}}^{n-m} \\
\left(\begin{array}{ccc|cccc}
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\hline
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & & \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}$$

on constate immédiatement $\operatorname{tr} p = n - m$ et $\operatorname{rg} p = n - m$

Exo29

Méthode 1 :

On « *passe* » aux endomorphismes. Pour être plus précis, on considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ***canoniquement associé*** à A. On a alors, par hypothèse, $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{Im} f = 1$ et $\operatorname{tr} f = 1$. Le théorème du rang amène $\dim \operatorname{Ker} f = n-1$. On prend alors une base de $\operatorname{Ker} f$: $(e_1, \dots, e_{n-1})$ que l'on ***complète en une base*** $\mathscr{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On a $f(e_1) = \cdots = f(e_{n-1}) = 0$ et $f(e_n)$ quelconque, soit $f(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$, ce qui amène la « nouvelle » matrice M de f. La matrice M est en fait ***semblable à*** la matrice A et on a $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} f = \operatorname{tr} M$.

$$M = \operatorname{Mat}(f, \mathscr{E}) = \left(\begin{array}{ccc|c}
0 & \dots & 0 & a_1 \\
\vdots & & \vdots & a_2 \\
0 & & 0 & \vdots \\
\hline
0 & \dots & 0 & a_n
\end{array}\right)$$

On laisse « *visible* » la découpe en 4 « *blocs* ». Il vient alors $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr} f = 0 + a_n = 1$, puis un calcul, par blocs car c'est plus simple, donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & U \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M$$

ceci s'écrit aussi $f^2 = f$ ou $A^2 = A$. On a aussi démontré f ***projection***.

Méthode 2 :

Par définition $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_n) = 1$, toutes les colonnes sont donc colinéaires à un vecteur $U = (u_1, \dots, u_n) \neq 0$, soit $C_i = a_i U_i$. Il vient alors par un calcul sur les matrices (détail de chaque coefficient laissé au lecteur), et on a posé $v = a_1 u_1 + \cdots + a_n v_n$:

$$A = \begin{pmatrix}
a_1 u_1 & a_2 u_1 & \dots & \dots & a_n u_1 \\
a_1 u_2 & a_2 u_2 & \dots & \dots & a_n u_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
a_1 u_n & a_2 u_n & \dots & \dots & a_n u_n
\end{pmatrix} \Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix}
v a_1 u_1 & v a_2 u_1 & \dots & \dots & v a_n u_1 \\
v a_1 u_2 & v a_2 u_2 & \dots & \dots & v a_n u_2 \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
v a_1 u_n & v a_2 u_n & \dots & \dots & v a_n u_n
\end{pmatrix}$$

On termine en remarquant $v = \operatorname{tr}(A) = 1$, d'où $A^2 = A$.

Méthode 3 :

En reprenant A plus haut, on écrit A de rang 1 sous une forme plus astucieuse : on pose $V = (a_1, \dots, a_n)$, on a donc $A = U\,{}^tV$: regardez plus bas, où je fais le calcul et regardez bien aussi le produit « *inverse* » ***pour ne pas les***

confondre : ${}^tVU$. On prend exactement U, V ***vecteurs colonnes***, cad $U, V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et donc la ***transposée*** pour avoir un ***vecteur-ligne*** :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \\ U\,{}^tV = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} u_1a_1 & u_1a_2 & \dots & u_1a_n \\ u_2a_1 & u_2a_2 & \dots & u_2a_n \\ \dots & & & \dots \\ u_na_1 & u_na_2 & \dots & u_na_n \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \\ {}^tVU = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^n a_i u_i \right) \end{array}$$

Une fois écrit A et bien assimilé ceci, cela se « *déroule* » tout seul :

$$A = U\,{}^tV \implies A^2 = U\,{}^tV\,U\,{}^tV = U\,(\underbrace{{}^tVU}_{\text{scalaire}}\ {}^tV = ({}^tVU)\,U\,{}^tV = ({}^tVU)\,A$$

On a ${}^tVU = \sum_{k=1}^n a_i u_i = \operatorname{tr} A = 1$ (si on connaît bien son cours sur les ev euclidiens, on reconnait aussi l'expression du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$).

Méthode 4 (5/2)

On peut aller un peu plus vite. $\operatorname{rg} A = 1$, amène $\dim \operatorname{Ker} A = n-1$. Il s'ensuit que 0 est valeur propre de A d'ordre au moins $n-1$. On trouve la valeur propre manquante par la trace $\operatorname{tr} A = 0 + \dots + 0 + \lambda = 1 \implies \lambda = 1$. Donc 1 est valeur propre de A d'ordre au moins 1.Pour des raisons de dimension, ces inégalités deviennent des égalités, soit $\dim \operatorname{Ker} A = n-1 = \mu(n-1)$ et $\dim \operatorname{Ker}(A-I) = 1 = \mu(1)$, ce qui amène A diagonalisable et donc semblable à $D = D\mathrm{iag}(0,\dots,0,1$, d'où $D^2 = D\mathrm{iag}(0^2,\dots,0^2,1^2) = D$, cad $A^2 = A$. On peut aussi dire, c'est quasiment du cours, que toute matrice ***diagonalisable de valeurs propres 0 et 1*** est une matrice de projection.

Si vous regardez bien les démos, dans presque toutes les méthodes, on a même quasiment démontré, ***plus généralement***, que pour toute matrice A ***de rang 1*** (sans hypothèse sur la trace), $\boxed{A^2 = \operatorname{tr}(A)\ A}$.

Toute matrice de rang 1 et de trace 1 est ***donc*** une ***matrice de projection*** et d'ailleurs même plus, une matrice de rang 1 est une matrice de ***projection ssi*** sa trace vaut 1. On a d'ailleurs aussi (je vous laisse y réfléchir, c'est immédiat) qu'une matrice de rang 1 est ***nilpotente ssi*** sa trace vaut 0 ! Les 5/2, on a une matrice de rang 1 est ***diagonalisable ssi*** sa trace est non nulle.

Exo29

Méthode 1 Sol(E) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

- Sol(E)$\ni O$ car $O + {}^tO = O = 2(\operatorname{tr} O)I = 0I = O$
- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $M, N \in$Sol(E). On a donc $M + {}^tM = 2(\operatorname{tr} M)I_n$ et $N + {}^tN = 2(\operatorname{tr} N)I_n$. Il s'ensuit $(\alpha M + \beta N) + {}^t(\alpha M + \beta N) = \alpha(M + {}^tM) + \beta(N + {}^tN) = \alpha \operatorname{tr} M I_n + \beta \operatorname{tr} N I_n = \operatorname{tr}(\alpha M + \beta N) I_n$, d'où $\alpha M + \beta N \in$ Sol(E)

Méthode 2 Considérons $\varphi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to M + {}^tM - A \operatorname{tr} M I_n$. φ est clairement linéaire (la transposition et la trace sont linéaires d'après le cours), et d'autre part, il est immédiat que Sol(E)= $\operatorname{Ker}\varphi$. Il s'ensuit que Sol(E) est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour la dimension, c'est un peu plus compliqué... On peut commencer par remarquer que les matrices antisymétriques conviennent (eh oui, il faut le voir tout seul, mais à l'oral vous serez aidé, si vous ne l'avez pas vu…).Si $M \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, ${}^tM = -M$, et donc $M + {}^tM = 0$, et d'autre part, on sait que la diagonale de M est nulle d'où $2\,\mathrm{tr}\,(M)I_n = 0$. Pour la dimension, on peut déjà dire dimSol(E)≥ dim $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

On « regarde » alors les matrices symétriques : Si $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $M + {}^tM = 2M$. Il vient alors, que Si $M \in$Sol(E), alors $2M = 2\,\mathrm{tr}\,(M)I_n$, soit $M = \alpha I_n$ (Bien comprendre cette ***« technique »***.
Réciproquement, si $M = \alpha I_n$, alors $M \in$Sol(E) $\iff \alpha I_n + \alpha\, {}^tI_n = 2\,\mathrm{tr}\,(\alpha I_n)I_n \iff 2\alpha I_n = 2n\alpha I_n \iff n = 1$. (On « comprend » l'hypothèse $n \geq 2\ldots$). Aucune matrice symétrique ne convient (sauf O).

Pour terminer, il faut se rappeler la somme directe (c'est du cours) $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque, on écrit $M = A + S$, avec ${}^tS = S$ et ${}^tA = -A$.

$$\begin{aligned} M + {}^tM = 2\,\mathrm{tr}\,MI_n &\iff (A+S) + {}^t(A+S) = 2\,\mathrm{tr}\,(A+S)I_n \iff A + {}^tA + S + {}^tS = 2(\mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,S)I_n \\ &\iff 2S = 2\,\mathrm{tr}\,SI_n \iff S = 0 \text{ vu plus haut} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que seules les matrices antisymértiques sont solutions d'où Sol(E)= $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, ou dimSol(E)= $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Exo33
$L = \{u \in \mathscr{L}(E)\,/\,V \supset \mathrm{Im}\,u\}$ est un sev de $\mathscr{L}(E)$ puisque, clairement l'application nulle O appartient à L ($\mathrm{Im}\,O = \{0\} \subset V$) et si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $u, v \in L$, alors $\alpha u + \beta v \in L$: Soit $x \in \mathrm{Im}\,(\alpha u + \beta v)$, donc $x = \alpha u(y) + \beta v(y)$, avec $y \in E$. Par hypothèse, $u(y) \in \mathrm{Im}\,u \subset V$ et $v(y) \in \mathrm{Im}\,v \subset V$, et V étant stable par + et ., il vient $x \in V$. On a démontré $\mathrm{Im}\,(\alpha u + \beta v) \subset V$.

L'ensemble des endomorphismes de V est « exactement » (en fait, à un isomorphisme canonique près : voir remarque) l'ensemble des morphismes de E dans V ($\mathrm{Im}\,u \subset V$) et donc est de dimension $\mathscr{L}(E,V) = \dim E \times \dim V = np$.
Remarque : Comme mathématiquement, une aplication de E dans E à valeurs dans V n'est pas « exactement » une application de E dans V, on prend l'isomorphisme suivant (immédiat a démontrer), qui conserve donc les dimensions $\psi : L \longrightarrow \mathscr{L}(E,V)$ qui à $f : E \to E$ associe $\tilde{f} : E \to V$ défini par $\tilde{f}(x) = f(x)$!

Exo36 Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique inversible, soit ${}^tS = S$. On en déduit $({}^tS)^{-1} = S^{-1}$. Puis comme $S \times S^{-1} = I_n$ amène ${}^tS \times {}^t(S^{-1}) = {}^tI_n = I_n$, on en déduit ${}^t(S^{-1}) = ({}^tS)^{-1}$, d'où finalement ${}^t(S^{-1}) = S^{-1}$, soit $S^{-1} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$