Calcul de Primitives

Théorème : Soit f ***continue*** sur un ***intervalle*** I, alors f est ***primitivable*** sur I. Toutes les primitives sont égales à une constante près. Pour tout $a \in I$, $x \in I \longrightarrow \int_a^x f$ est ***la primitive*** de f sur I qui s'annule en a.

Remarques

- Il faut distinguer la notion ***primitivable*** de celle primitivable « *calculable* », qui signifie primitiver à l'aide des fonctions usuelles. Les primitives que tout étudiant doit savoir calculer sont les primitives des ***fractions rationnelles*** et des polynômes en sin-cos.
- Beaucoup de fonctions ne sont pas primitivables « *calculables* » : le calcul nécessite la « *création* » d'une ***nouvelle*** fonction : par ex. la fonction logarithme peut-être « *créée* » comme primitive de $x \to \frac{1}{x}$. Aussi l'exemple courant de $x \to e^{-x^2}$: dans les logiciels de calcul, sa primitive est souvent notée $Erf(x)$ (***Er***ror ***f***unction).
- Les fonctions continues par morceaux (les « *vraies* », cad non continues) ne sont en général ***pas primitivables***. Cela vient du fait qu'une dérivée vérifie le théorème des valeurs intermédiaires, (exo certainement traité en Sup) et une fonction continue par morceaux ***ne le vérifie pas*** en général (je vous laisse y réfléchir)

1 Primitives usuelles

A savoir par cœur / au programme

$$\int e^{at}\,dt = \frac{e^{at}}{a} \quad (a\in\mathbb{C}^*) \qquad \int t^a\,dt = \begin{cases} \frac{t^{a+1}}{a+1} & a \neq -1 \\ \ln|t| & a = -1 \end{cases} \qquad \int \ln t\,dt = t\ln t - t$$

$$\int \sin t\,dt = \cos t \qquad \int \cos t\,dt = \sin t \qquad \int \tan t\,dt = -\ln|\cos t|$$

$$\int \sinh t\,dt = \cosh t \qquad \int \cosh t\,dt = \sinh t$$

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t \qquad \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{t}{a}\right) \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t$$

A avoir déjà vu pour ne pas les confondre

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t \qquad \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = \operatorname{argth} t \qquad (= \text{ sur }]-1,1[\ \textbf{\textit{seulement}})$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right) = \operatorname{argsh} t \qquad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right) = \operatorname{argch} t$$

2 Primitives de Fractions Rationnelles

La ***méthode générale*** pour primitiver $F = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle avec P et Q polynômes est de ***décomposer en éléments simples sur*** $\mathbb{R}$. Il y a des exceptions dans certains cas particuliers comme $\frac{u'}{u}$ ou $\frac{u'}{u^2}$, voire un peu plus subtils comme $\frac{x^2}{1+x^6}$ (Ici, on effectue le changement de variables $u = x^3$...Vu ?). Sur $\mathbb{R}$, on décompose :

- ***Attention !*** , ***si*** $\deg P \geq \deg Q$, Il y a un polynôme « *à ajouter* » dans la décomposition : c'est le quotient dans la division euclidienne de P par Q (il est de degré $\deg P - \deg Q$).
- Des éléments simples de ***première espèce***, cad du type $\dfrac{b}{(x-a)^n}$. Elémentaire à primitiver.
- Des éléments simples de ***seconde espèce***, cad du type $\dfrac{dx+e}{(ax^2+bx+c)^n}$, avec des racines « *vraies* » complexes ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$). Dans la pratique, vous rencontrerez essentielllement le cas $n = 1$. Je rappelle la technique, vue en Sup, qui est d'utiliser ***la réduction canonique*** du trinôme, sur un exemple :

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \int \frac{x+1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx \overset{u=x+\frac{1}{2}}{=} \int \frac{\left(u-\frac{1}{2}\right)+1}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,du = \int \underbrace{\frac{u}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}_{A(u)}\,du + \int \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}_{B(u)}\,du$$

$A(u)$ de la forme $\dfrac{1/2\,y'}{y}$ se primitive en $\dfrac{1}{2}\ln\left|u^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right| = \dfrac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|$

$B(u)$ de la forme $\dfrac{1/2\,y'}{y^2+a^2}$ se primitive en $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\arctan\left(\dfrac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

Finalement : $\boxed{\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx} = \boxed{\displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}$

3 Primitives de Polynômes en sinus, cosinus (ou en ch, sh)

On « *coupe* » le polynôme en monômes, cad des éléments du type $\sin^m x\cos^n x$. L'idée générale est de ***linéariser*** en utilisant les complexes et la formule de **De Moivre**[1]. Mais dans certains cas, il peut être astucieux d'utiliser des formules de trigo comme par exemple le ***fréquent*** $\sin(px)\cos(qx)$ qu'on peut primitiver par une formule ***produit-somme***).

On prête attention à distinguer les ***puissances impaires et les puissances paires*** :

$$\boxed{\int \cos^4 x\,dx} = \int \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 dx = \frac{1}{16}\int \left(e^{4ix}+e^{-4ix}+4e^{2ix}+4e^{-2ix}+6\right)dx$$

$$= \frac{1}{16}\int \left(2\cos(4x)+8\cos(2x)+6\right)dx = \boxed{\frac{1}{32}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x}$$

$$\boxed{\int \cosh^2 x\,dx} = \int \left(\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(e^{2x}+e^{-2x}+2\right)dx = \frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{8}e^{-2x}+\frac{1}{2}x = \boxed{\frac{1}{4}\sinh(2x)+\frac{1}{2}x}$$

$$\boxed{\int \sin^5 x\,dx} = \int \sin^4 x\sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2\sin x\,dx \overset{\mathbf{u=\cos x}}{=} \int \left(1-u^2\right)^2 - du$$

$$= \int \left(-u^4+2u^2-1\right)du = \frac{-u^5}{5}+\frac{2u^3}{3}-u = \boxed{\frac{-1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x}$$

4 Primitives de Fractions rationnelles en sh(x) ch(x) th(x) e^x, e^{-x}

Sauf cas bien particuliers, la ***méthode générale*** est simplement d'utiliser le ***changement*** $u=e^x$, car

$$\sinh x = \frac{u-\frac{1}{u}}{2} \qquad \cosh x = \frac{u+\frac{1}{u}}{2} \qquad \tanh x = \frac{u-\frac{1}{u}}{u+\frac{1}{u}} = \frac{u^2-1}{u^2+1} \qquad dx = \frac{1}{u}\,du$$

Exemple : $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh x}} = \displaystyle\int \frac{2\,dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{2\,du/u}{u+1/u} = \int \frac{2}{u^2+1} = 2\arctan u = \boxed{2\arctan\left(e^x\right)}$

5 Primitives du type P(x) cos(x), P(x)e^x, P(x) ln(x) , P(x)arctan (x)...

L'idée est ici de faire une IPP. On peut d'ailleurs ***savoir par coeur*** que toute primitive ou dérivée d'une fonction du type $P(x)e^{ax}$ est une fonction du type $Q(x)e^{ax}$ avec$Q$ de même degré que P, car cela sert dans les techniques d'intégration d'équations différentielles.